Ⅰ．VaRの計測と検証

２０１５年１０月
日本銀行金融機構局
金融高度化センター

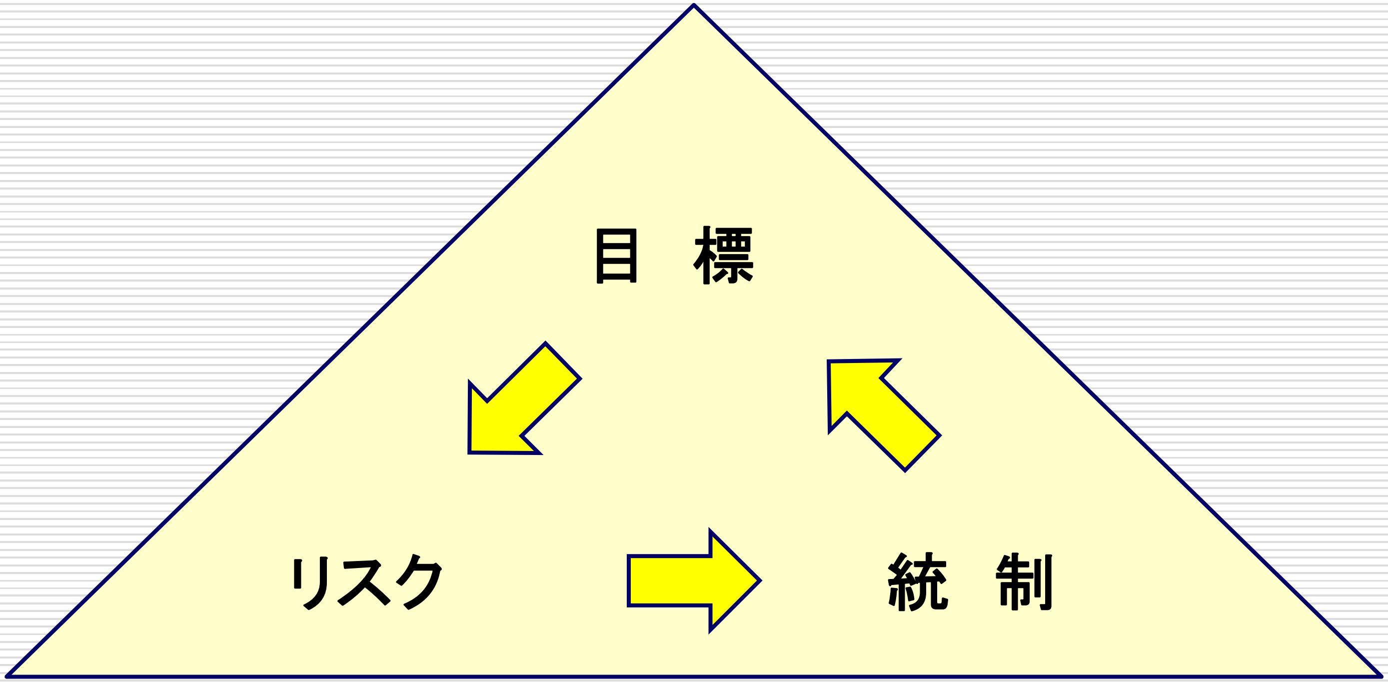
目　次

1. リスク、リスクマネジメントの定義

リスクの定義

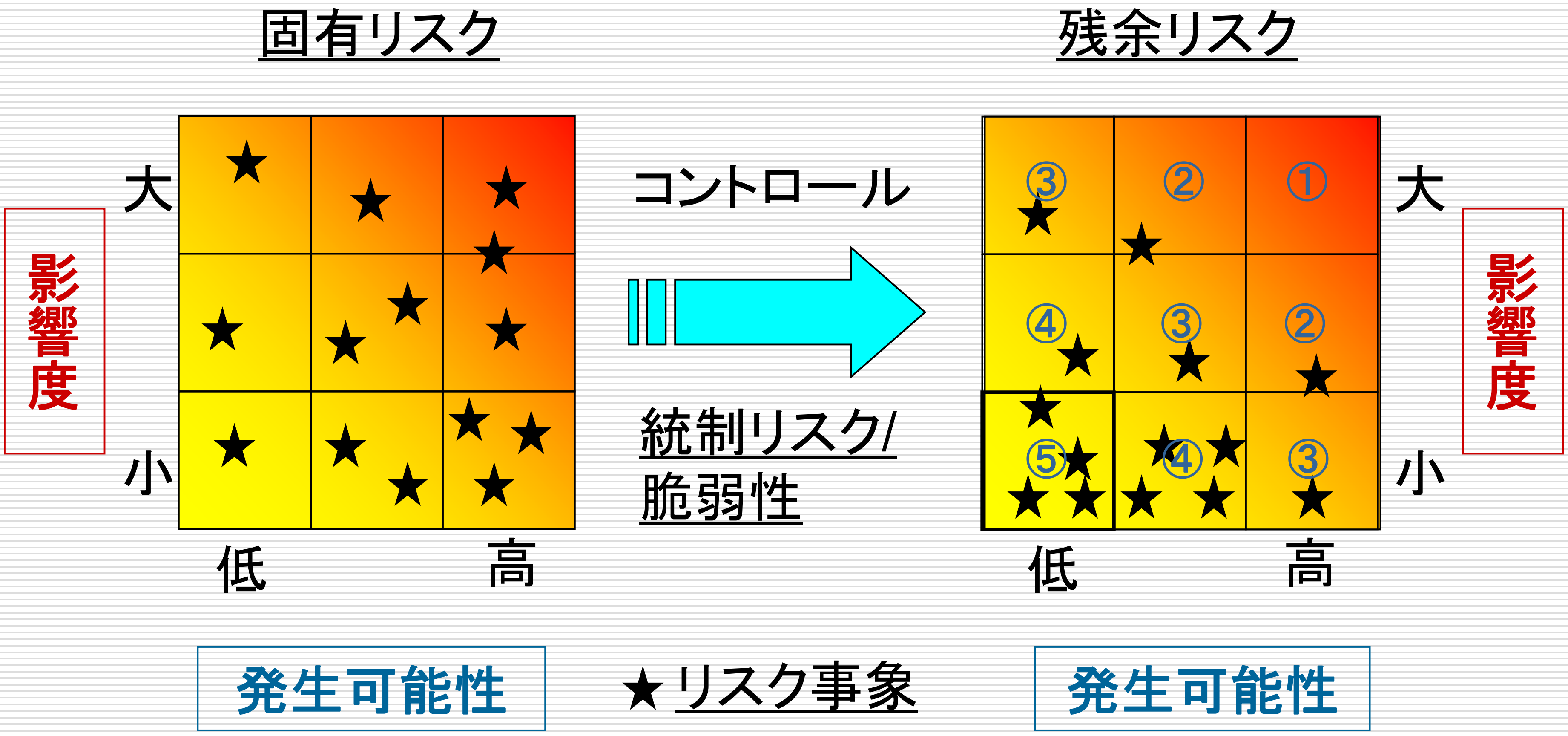
- 組織の目標・目的の達成に（マイナスの）影響を与える事象の発生可能性
- 影響の大きさと発生の可能性に基づいて測定される

目標･リスク･統制



リスクマネジメント

リスク・マップ


固有リスク
残余リスク
影響度
大
小
低
高
コントロール
統制リスク/
脆弱性
③
②
①
④
③
②
⑤
④
③
影響度
大
小
低
高
発生可能性
★リスク事象
発生可能性

固有リスク

◆ コントロール等が全く整備されていないと仮定した場合に存在するリスク

残余リスク

◆ 不利な事象の影響と発生の可能性を軽減する措置(コントロール等)を講じた後にさらに残るリスク

統制リスク/脆弱性

◆ 機能しないコントロール手続きに依存するリスク

統制リスク	小さい	大きい
脆弱性	低い	高い
コントロール	強い (有効である)	弱い (有効でない)

リスクマネジメントの定義

◆　組織の目標・目的の達成に関して合理的保証を提供するため、発生する可能性のある事象や状況を識別、評価、管理、コントロールするプロセス

1.組織の目標・目的の確立

2.リスクの識別/評価/優先順位付け

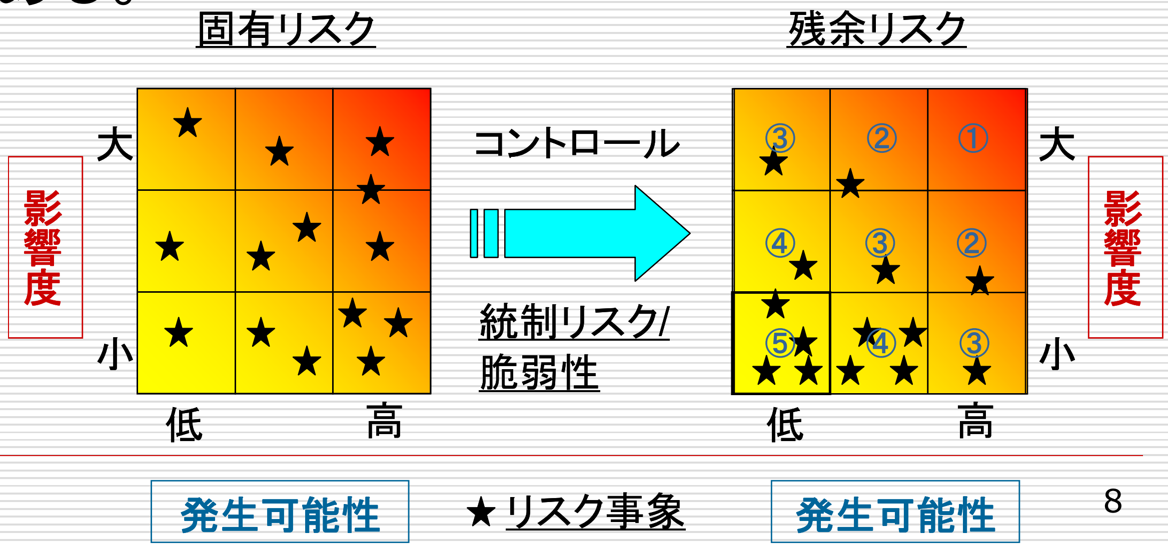
3.コントロール等のリスク軽減措置

4.モニタリング/修正

リスク評価の様々な手法

① リスクマップ方式

- 残余リスクでみて、右上の領域（影響度が大きく、発生可能性が高い）の方が重要度が高いと評価するのが一般的。
- 固有リスクでみて、影響度が大きい方が重要度が高いと評価することもある。
- 残余リスクでみて、発生可能性が高い方が重要度が高いと評価することもある。



② スコアリング方式

- 「影響度」、「発生可能性」、「コントロールの有効性」を評点化し、乗じることによって、残余リスクを評点化する。
- 「残余リスク」の評点に「閾値」を設けて、重要度を評価するのが一般的。
- 固有リスクの「影響度」や「コントロールの有効性」の評点に「閾値」を設けて、重要度を評価することもある。

（例）

リスク内容	固有リスク		コントロール	残余リスク
	影響度（評点A）	発生可能性（評点B）	有効性（評点C）	評価（評点A×B−C）
XXXXX	○点	△点	◇点	○×△−◇点
XXXXX	●点	▲点	◆点	●×▲−◆点
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

③ リスク計量化方式

- 残余リスクの「影響度」を金額ベースに換算し、それぞれの「発生可能性」の想定（○年に1回）を置く。
- 「影響度」が一定金額を超えたり、「発生可能性」が一定頻度を超えるとき、重要度が高いと評価する。

（例）

リスク内容	影響度			発生頻度	統制上の改善点
	直接費用	間接費用	その他		
XXXXX	○円	○円		○年に1回	×××××
XXXXX	△円	△円	顧客の信用を毀損	△年に1回	×××××
XXXXX	◇円	◇円		◇年に1回	×××××
XXXXX	●円	●円	顧客の信用を毀損	●年に1回	×××××
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

共通点、相違点

（共通点）

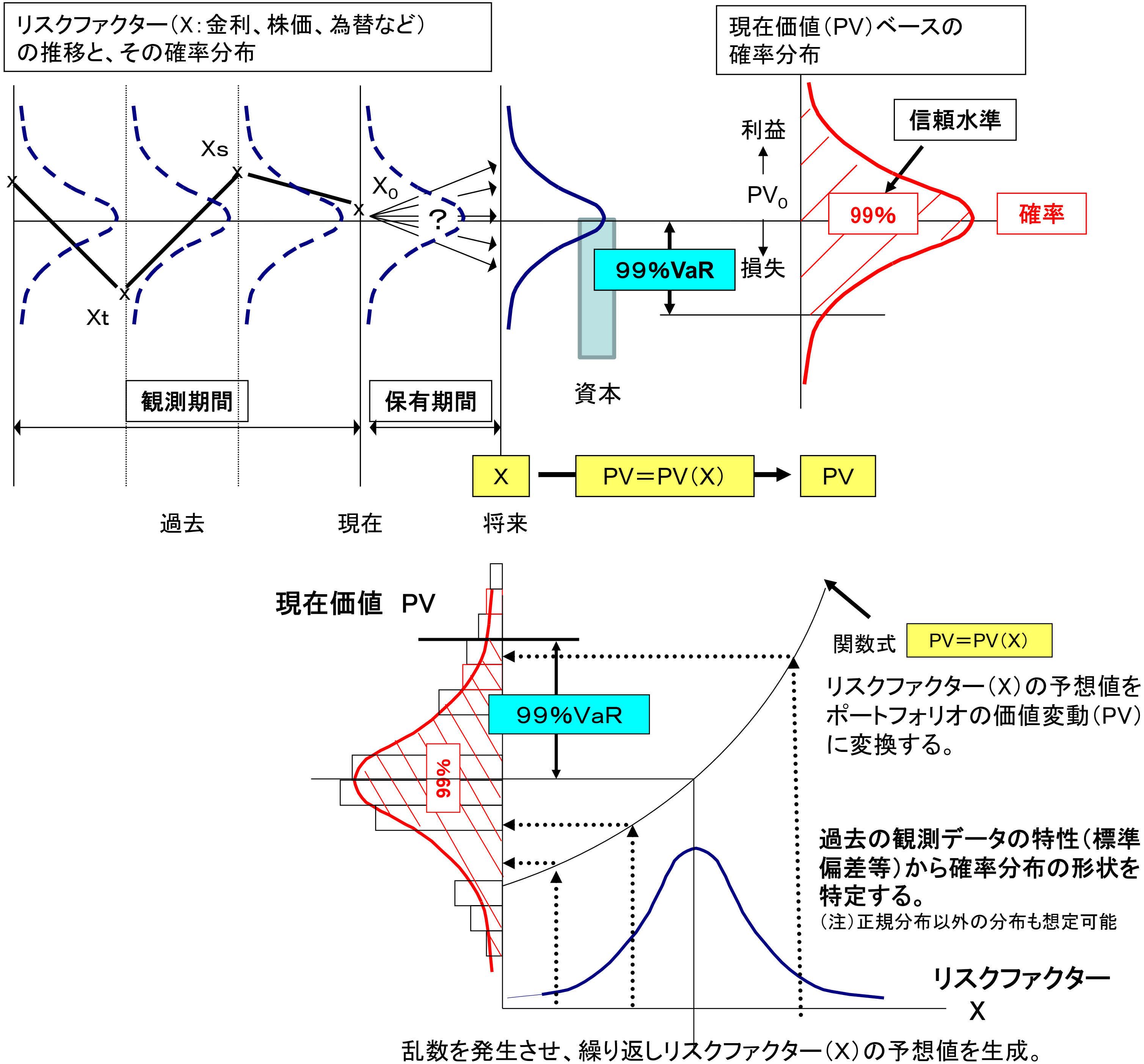
- リスクマップ方式、リスク評点化方式、リスク計量化方式いずれの方式でも、リスクの重要度や優先順位を決めることは可能。

（相違点）

- 　しかし、当該組織の収益・自己資本と対比して過大なリスクを負っているか否かは、リスク計量化方式でないと判定できない。

VaR（バリュー・アット・リスク）の起源

- JPモルガンの最高経営責任者 D. Weatherstoneは、今後24時間に自社のポートフォリオが受けるリスクを計量化することを求めた。
- これに対し、JPモルガンのスタッフは、金利、株式、為替などの過去の観測データからある確率をもって発生し得る最大損失額（VaR）を予想することを提案し、その計測モデルを開発した。
- 毎日16時15分、VaRの計測結果の報告を受け、リスク量が資本の範囲内にあること確認してから帰宅した。


リスクファクター（X：金利、株価、為替など）
の推移と、その確率分布
現在価値（PV）ベースの
確率分布
Xs
Xt
X_0
?
利益
PV_0
損失
信頼水準
99%
確率
99%VaR
資本
観測期間
保有期間
X
PV＝PV（X）
PV
過去
現在
将来
現在価値　PV
99%VaR
99%
関数式
PV＝PV（X）
リスクファクター（X）の予想値を
ポートフォリオの価値変動（PV）
に変換する。
過去の観測データの特性（標準
偏差等）から確率分布の形状を
特定する。
（注）正規分布以外の分布も想定可能
リスクファクター
X
乱数を発生させ、繰り返しリスクファクター（X）の予想値を生成。

VaRの計算シート　モンテカルロ・シミュレーション法

株式投信	100	億円
観測データ	250	

保有期間	10	日
信頼水準	99.0	%

分布関数を特定（ここでは正規分布）

標準偏差 （関数STDEVA）	3.869	%

F9キーで再計算

VaR	
8.92	億円

↑　↓　↑

↑　↓乱数で1万個の予想変化率を発生　関数PERCENTILE

↑　↓NORMSINV(RAND())×標準偏差　↑

	10日間 変化率	10日間 予想変化率		残高		10日間 予想増減額	
2006/9/29	0.785	−1.9155	×	100.00	＝	−1.9155	億円
2006/9/28	1.194	0.0509	×	100.00	＝	0.0509	
2006/9/27	0.319	5.0609	×	100.00	＝	5.0609	
2006/9/26	−2.994	−2.3250	×	100.00	＝	−2.3250	
2006/9/25	−3.783	−0.1294	×	100.00	＝	−0.1294	
2006/9/22	−3.139	2.1462	×	100.00	＝	2.1462	
2006/9/21	−3.894	1.1020	×	100.00	＝	1.1020	
2006/9/20	−5.040	−8.9002	×	100.00	＝	−8.9002	
2006/9/19	−3.538	−5.5228	×	100.00	＝	−5.5228	
2006/9/15	−2.474	2.6461	×	100.00	＝	2.6461	
2006/9/14	−2.248	−2.5754	×	100.00	＝	−2.5754	
2006/9/13	−1.822	−2.5844	×	100.00	＝	−2.5844	
2006/9/12	−1.875	−2.3236	×	100.00	＝	−2.3236	
2006/9/11	−0.235	2.1802	×	100.00	＝	2.1802	
2006/9/8	0.007	3.0396	×	100.00	＝	3.0396	

VaRの発展

- VaRの計測モデルは改良が加えられ、様々な計測手法が開発された。

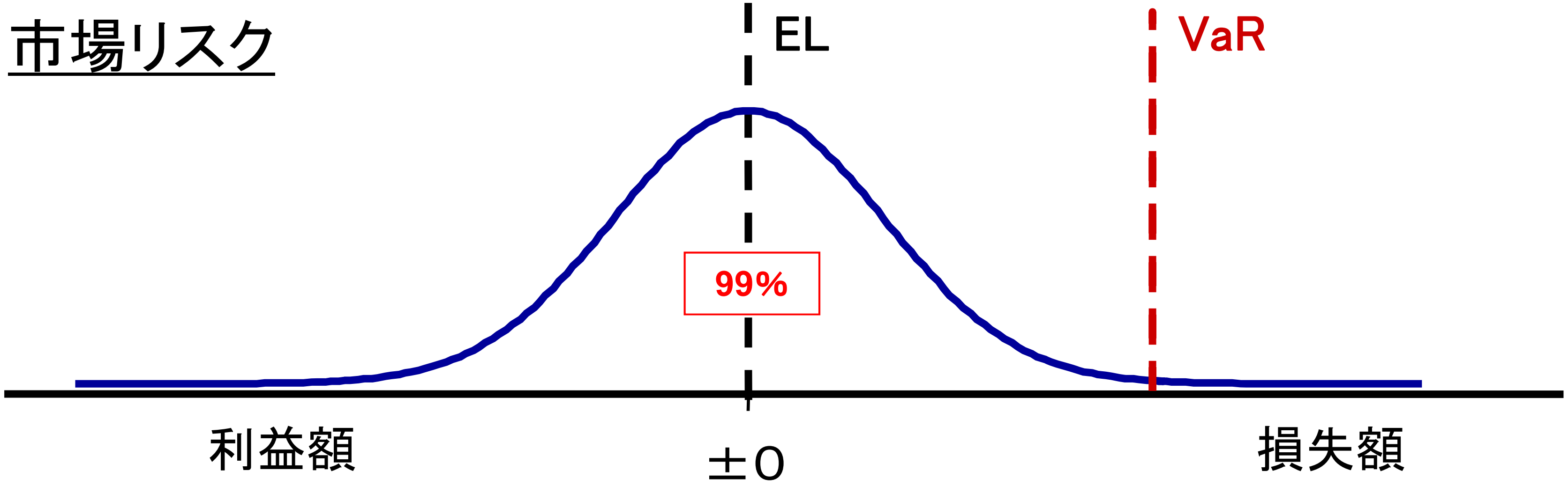
  ⇒ 分散共分散法、モンテカルロ・シミュレーション法、ヒストリカル法。

- リスクの計測対象も、市場リスク以外にも、貸し倒れなどの信用リスクや、事件・事故、システム障害、災害など業務全般に係るオペレーショナル・リスクに拡大。

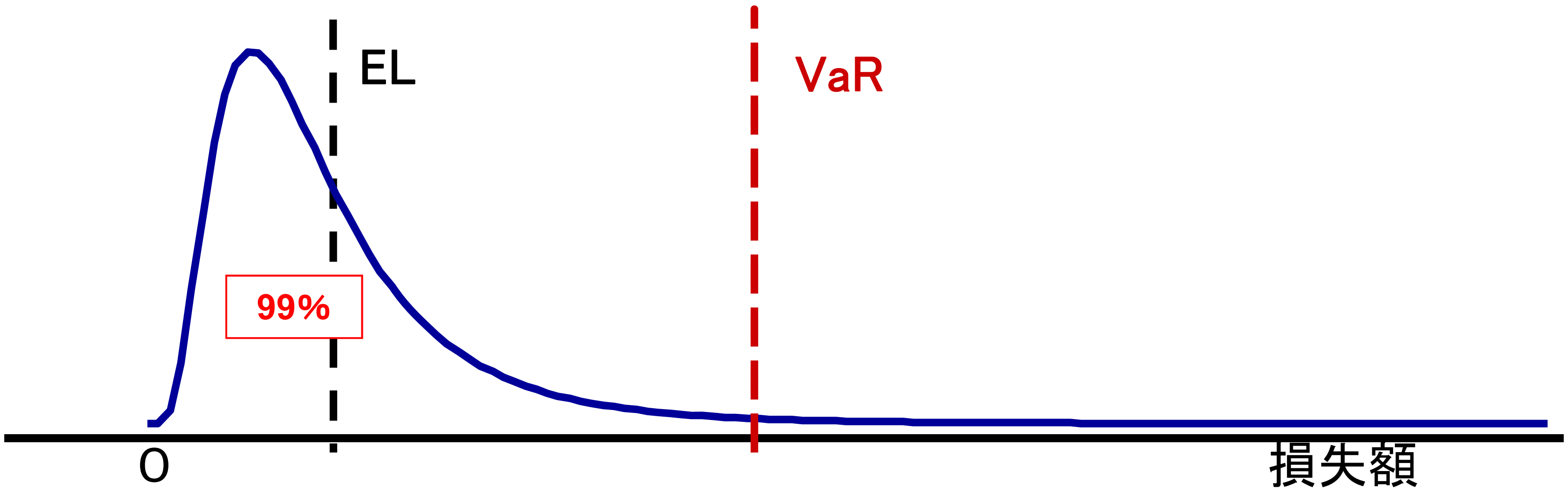
- 最近では、各リスクカテゴリーのリスクを VaR という共通の尺度で測定して、リスクを統合管理する企業・金融機関が増加している。

リスクカテゴリー別に見た損失分布（イメージ）

市場リスク



信用リスク、オペレーショナル・リスク



VaRを定義する

① 過去の一定期間(<u>観測期間</u>)の変動データにもとづき、

② 将来のある一定期間(<u>保有期間</u>)のうちに

③ ある一定の確率(<u>信頼水準</u>)の範囲内で

④ 被る可能性のある最大損失額を

⑤ 統計的手法により推定した値をVaR として定義する。

VaRの特徴を一言でいうと

- 「過去」のデータを利用して
- 統計的手法で「推定」される
- 「確率」を伴うリスク指標

VaR（バリュー・アット・リスク）は

- どのくらいの損失が、どのくらいの確率で起きるかが分かる、画期的なリスク指標である。
- しかも、過去のデータに基づき統計的手法を用いて求められるため、客観性が高い。
- そのため、株主、顧客、当局に対する説得力が高い。

VaR（バリュー・アット・リスク）は

- 統計的手法によって求められる指標であるため、その「前提」を確認する必要がある。
- 厳密にいえば、統計的に「推定」された値であり、使用に耐えられるか、バックテストなどで統計的に「検証」する必要がある。
- 「過去は繰り返す」という考え方に基づいて求められているため、予測値としては「限界」がある。ストレス・テストなどで「補完」する必要がある。

VaRを理解するために
必要となる統計・確率の基礎知識

(統計量)	(確率分布)	(統計理論)
平均	正規分布	推定
分散	2項分布	検定
標準偏差	i.i.d	
99%点		
相関係数		
共分散		

2. VaRの計測手法

（1）市場VaRの計測手法

A. 分散共分散法

B. モンテカルロ・シミュレーション法

C. ヒストリカル法

（2）信用VaRの計測手法

（3）オペリスクVaRの計測手法

(1)市場VaRの計測手法

- 金利・株価・為替等のリスクファクターの変動に伴って金融資産・負債の価値が、確率的に、どのように変動するかを捉える。
- 市場VaRの計測手法としては、①分散共分散法、②モンテカルロ・シミュレーション法、③ヒストリカル法等があるが、各計測手法の制約を踏まえ、リスクプロファイルに合った計測手法を選択する必要がある。

A. 分散共分散法
ー デルタ法とも呼ばれる

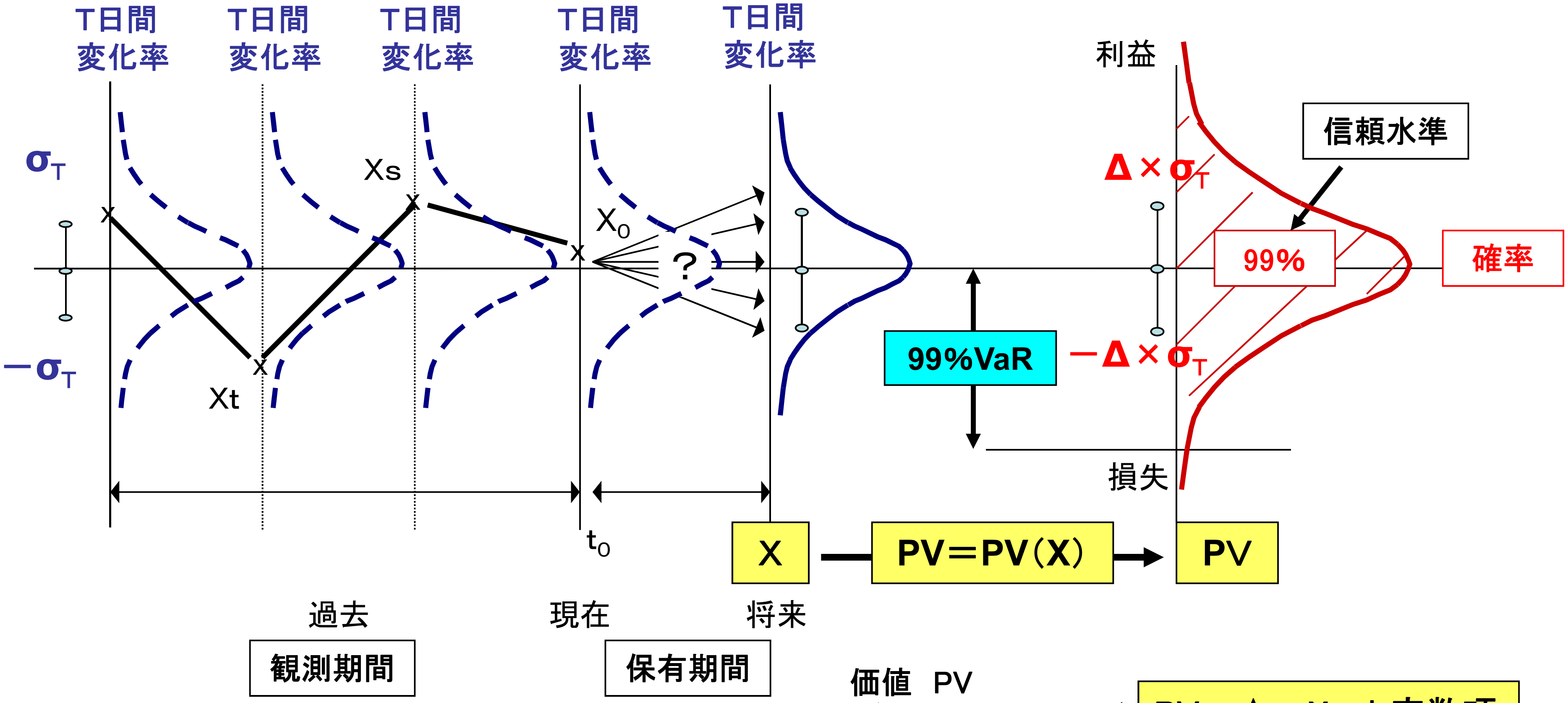
リスクファクターが正規分布にしたがって変動し、リスクファクターに対する当該資産・負債の現在価値の感応度（デルタ）が一定であると仮定して、VaRを算出する。

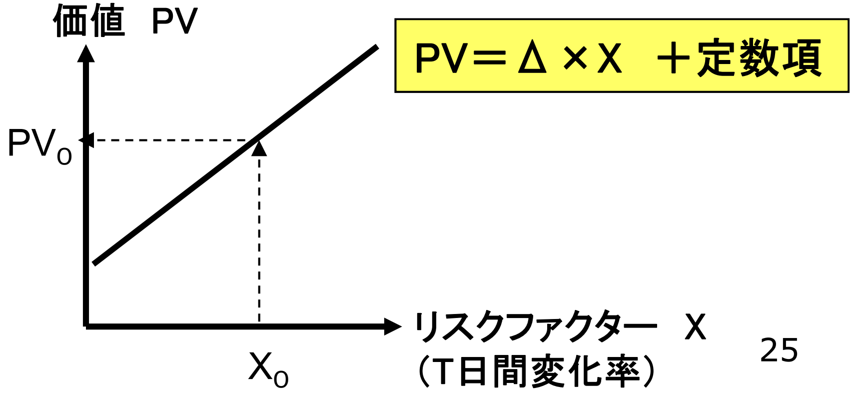
（利点）
- VaRの算出が容易。

（欠点）
- リスクファクターの変動が、必ずしも正規分布に従うとは限らない（例えば、実際の分布がファット・テイルの場合、VaRを過少評価する可能性）。
- 感応度（デルタ）が一定にならない場合は、近似式での計測となる。

感応度：デルタ（Δ）＝ΔPV/ΔX

分散共分散法（ムービング・ウィンドウ法）





仮定①
リスクファクターの確率分布は
正規分布（ i. i. d. ）

仮定②
Δは一定、すなわち、ポートフォリオ価値PVは
リスクファクターの１次関数としてあらわされる。

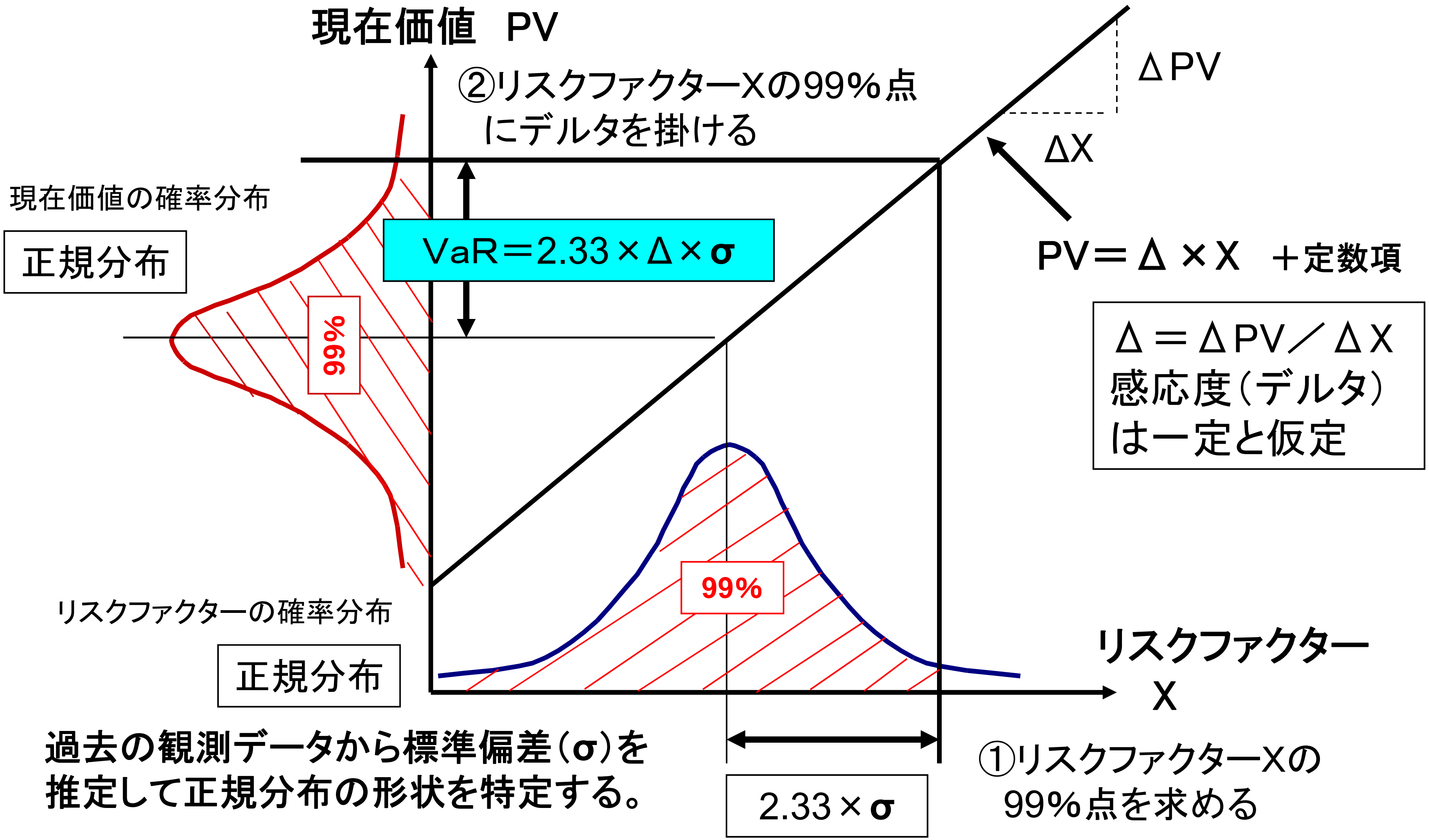
	信頼係数		感応度		ボラティリティ
VaR ＝	2．33	×	Δ	×	σ_T

- ポートフォリオの現在価値は、リスクファクターの変動の影響を受けて変化する。
- VaRは、リスクファクターのボラティリティと、リスクファクターの変動に対する現在価値の感応度を考慮したリスク指標。

ボラティリティ ＝ リスクファクターがどれだけ変動するか
（σ_T： 変化率の標準偏差）

感応度 ＝ 現在価値ベースでは、リスクファクターの変動が、どれだけ増幅されるか
（Δ： 関数式の傾き）

分散共分散法



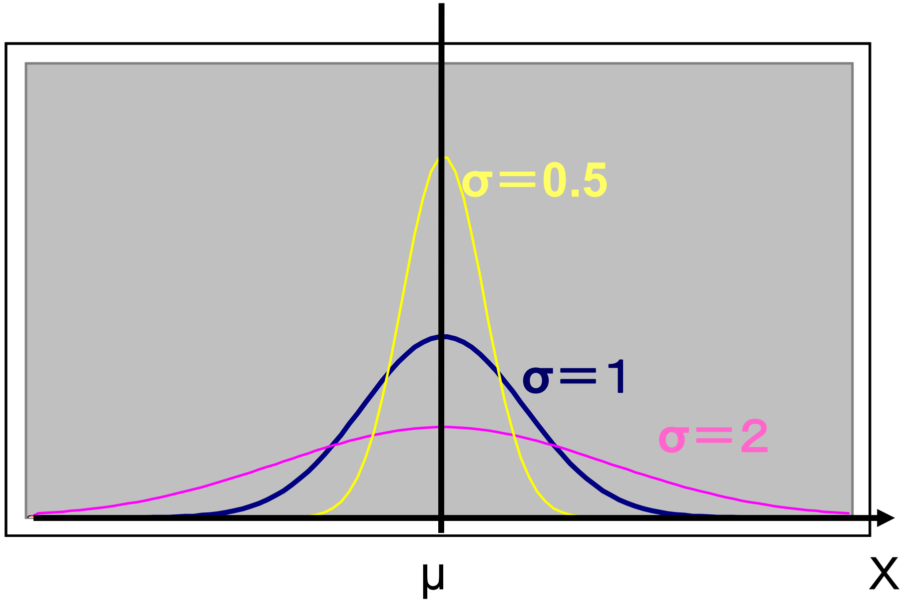
過去の観測データから標準偏差（σ）を推定して正規分布の形状を特定する。

正規分布：　左右対称の釣鐘型をした確率分布。

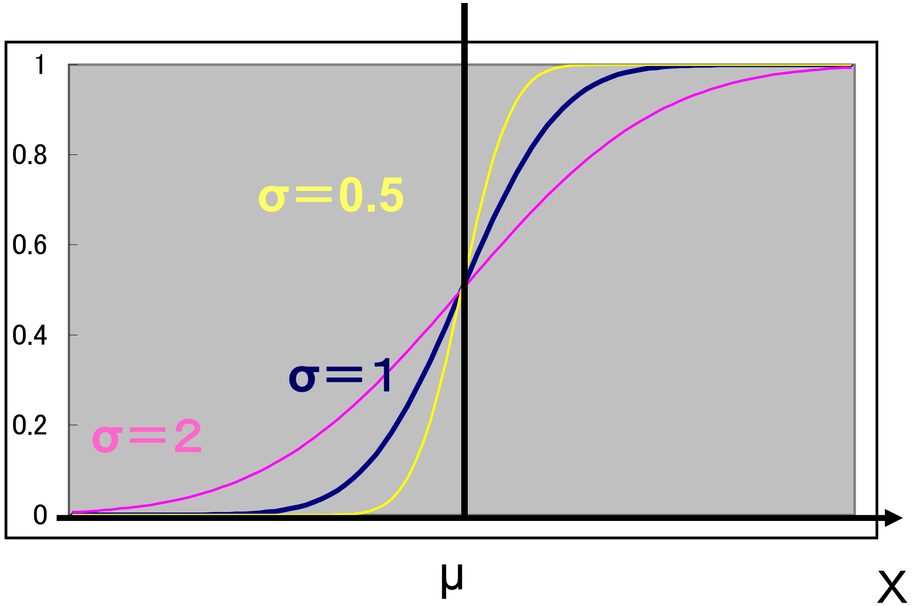
平均（μ）、標準偏差（σ）を与えると分布の形状が決まる。 ⇒ $N(\mu, \sigma^2)$と表す。

EXCEL関数　NORMDIST（X, μ, σ, 関数形式）

f（X）　確率密度関数



F（X）　分布関数

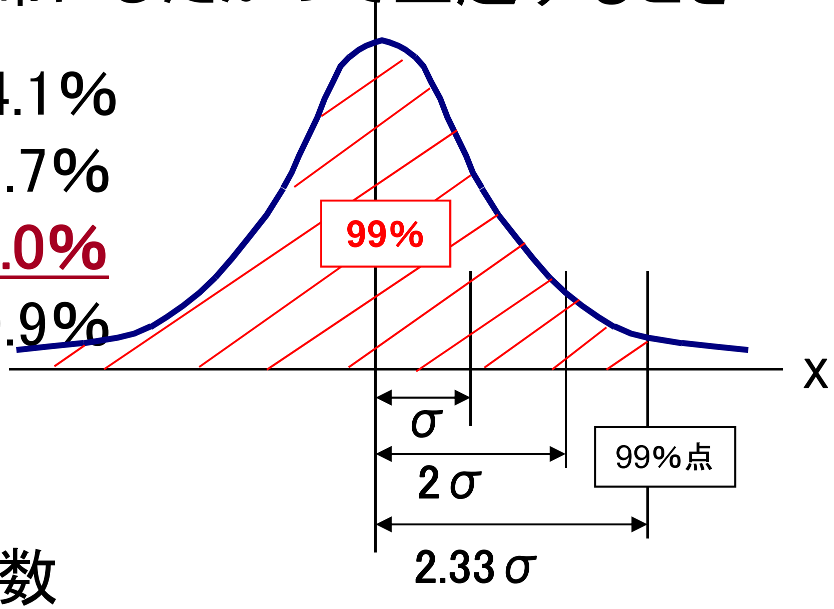


正規分布の特徴

- 平均からどれだけ離れているか（標準偏差の何倍か）という情報から、X以下の値をとる確率が分かる。
- 例えば、XがN（0, σ^2）の正規分布にしたがって生起するとき

X　≦　　　σとなる確率は　84.1%
X　≦　　2σとなる確率は　97.7%
X　≦　2.33σとなる確率は　99.0%
X　≦　　3σとなる確率は　99.9%

となることが知られている。

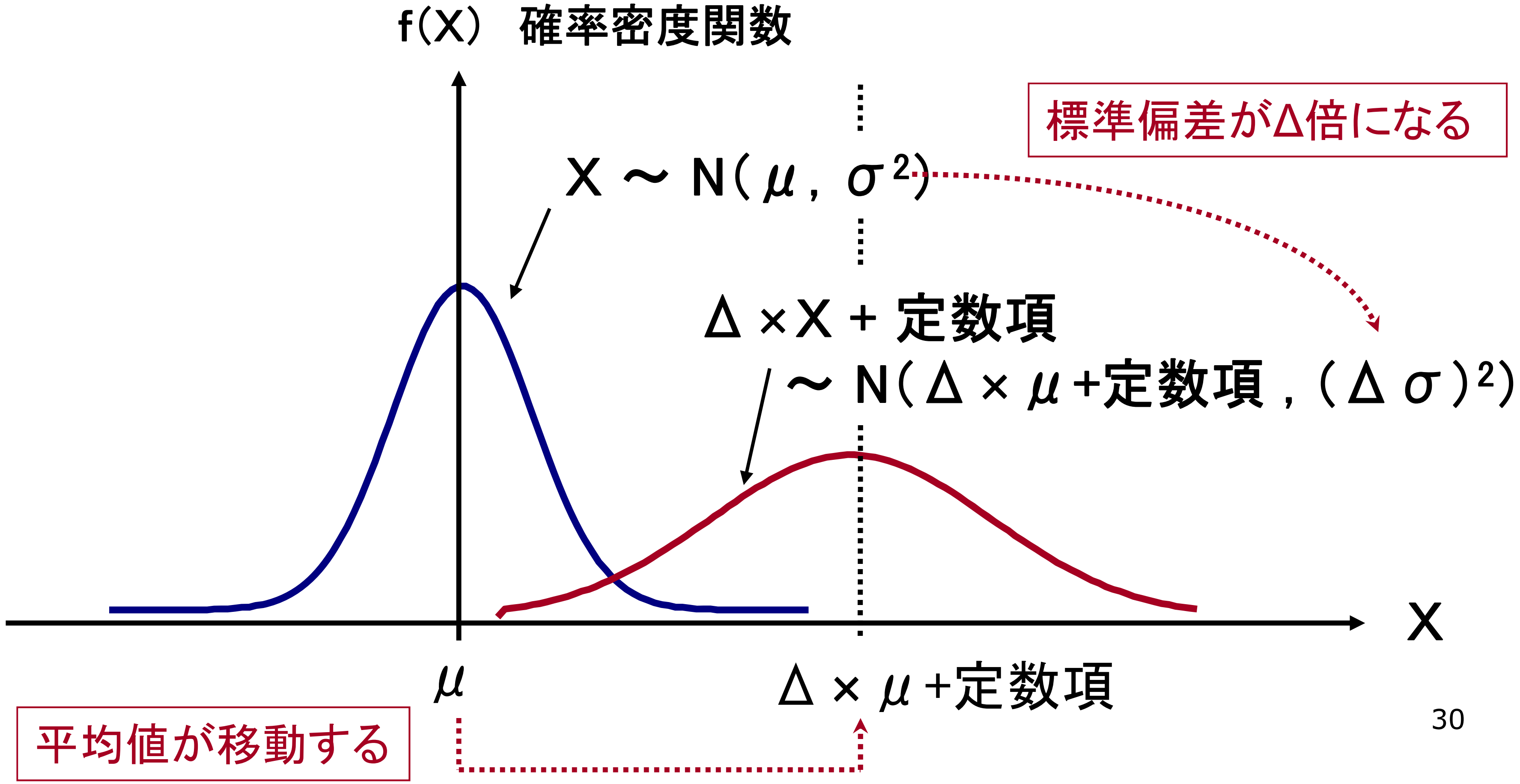


- このとき、σの前に付いている係数を「信頼係数」という。

- **正規分布は、Xが「信頼係数」×σ以下となる確率が分かる**便利な確率分布の１つ。

正規分布の特徴

確率変数　X　が　正規分布にしたがうとき
確率変数　Δ×X＋定数項　は　正規分布にしたがう。



分散共分散法（ムービング・ウィンドウ法）の計算例

（例）投信残高（PV）　　：100億円（東証TOPIX指数に完全連動）

リスクファクター（X_t）：　東証TOPIXの10日間変化率（注1）

⇒　X_tは、同一かつ互いに独立な正規分布 N（0, σ^2）にしたがって変動すると仮定。

観測期間　　：　250日

保有期間　　：　10日間

信頼水準　　：　99%

現在価値の変化額 ＝ 100億円 ×東証TOPIXの10日間変化率

VaR＝ $\boxed{\text{信頼係数}}$ × $\boxed{\text{感応度（Δ）}}$ × $\boxed{\text{リスクファクターの標準偏差（σ）}}$

＝ $\boxed{2.33}$ × $\boxed{\text{100億円}}$（注2） × $\boxed{\sigma}$

（注1）リスクファクターとしては、金利、為替、株価等の変化率（幅）を利用することが多い。

（注2）感応度（Δ）は100億円（＝現在価値の変動額÷東証TOPIXの10日間変化率）。

分散共分散法（ムービング・ウィンドウ法）による計算例

VaRの計算シート

株式投信	100	億円
観測データ	250	

分散共分散法（デルタ法）

保有期間	10	日
信頼水準	99.00	%
信頼係数（関数NORMSINV）	2.33	
標準偏差（関数STDEVA）	3.869	%

↑ 正規分布と想定 ↑

↓ 信頼係数×標準偏差 ↓

	10日間変化率
2006/9/29	0.785
2006/9/28	1.194
2006/9/27	0.319
2006/9/26	−2.994
2006/9/25	−3.783
2006/9/22	−3.139
2006/9/21	−3.894
2006/9/20	−5.040
2006/9/19	−3.538
2006/9/15	−2.474
2006/9/14	−2.248
2006/9/13	−1.822
2006/9/12	−1.875

予想変化率		感応度		VaR	
9.000	×	100	＝	9.00	億円

$PV = \Delta * X$

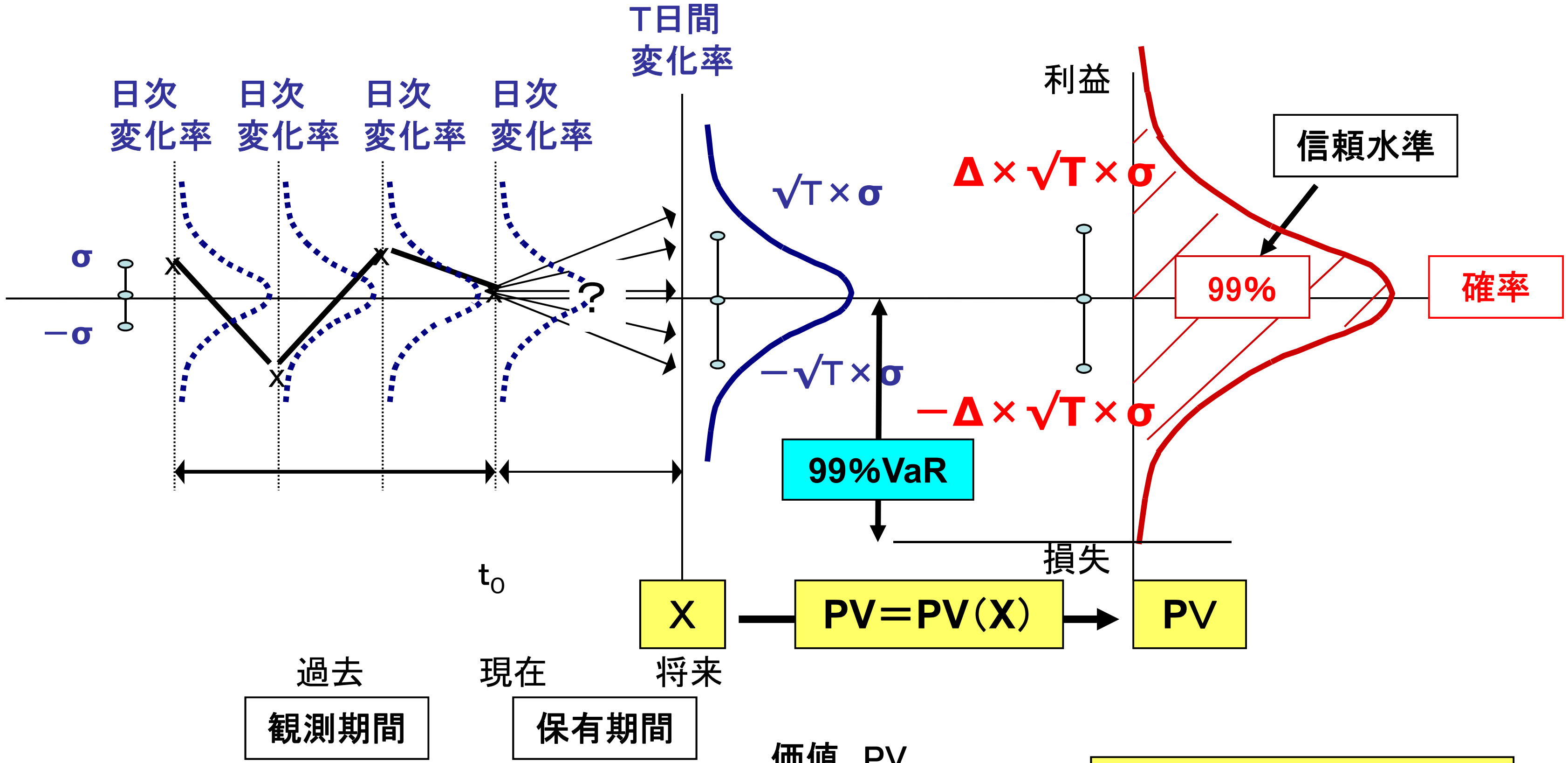
PV ： 株式投信価額

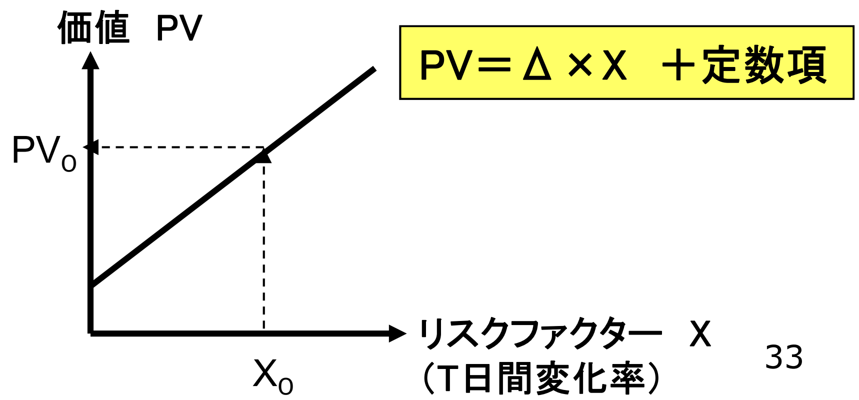
X ： 東証TOPIX指数の変化率

Δ ： 直近時点の株式価額（PV_0）×1

MW法 ： ムービング・ウィンドウ法

分散共分散法（ルートT倍法）





仮定①
リスクファクターの確率分布は
正規分布（ i. i. d. ）

仮定②
Δは一定、すなわち、ポートフォリオ価値PVは
リスクファクターの１次関数としてあらわされる。

	信頼係数		感応度		ボラティリティ
VaR ＝	2．33	×	Δ	×	√T×σ

◆ ポートフォリオの現在価値は、リスクファクターの変動の影響を受けて変化する。

◆ VaRは、リスクファクターのボラティリティと、リスクファクターの変動に対する現在価値の感応度を考慮したリスク指標。

ボラティリティ ＝ リスクファクターがどれだけ変動するか
（σ： 変化率の標準偏差）

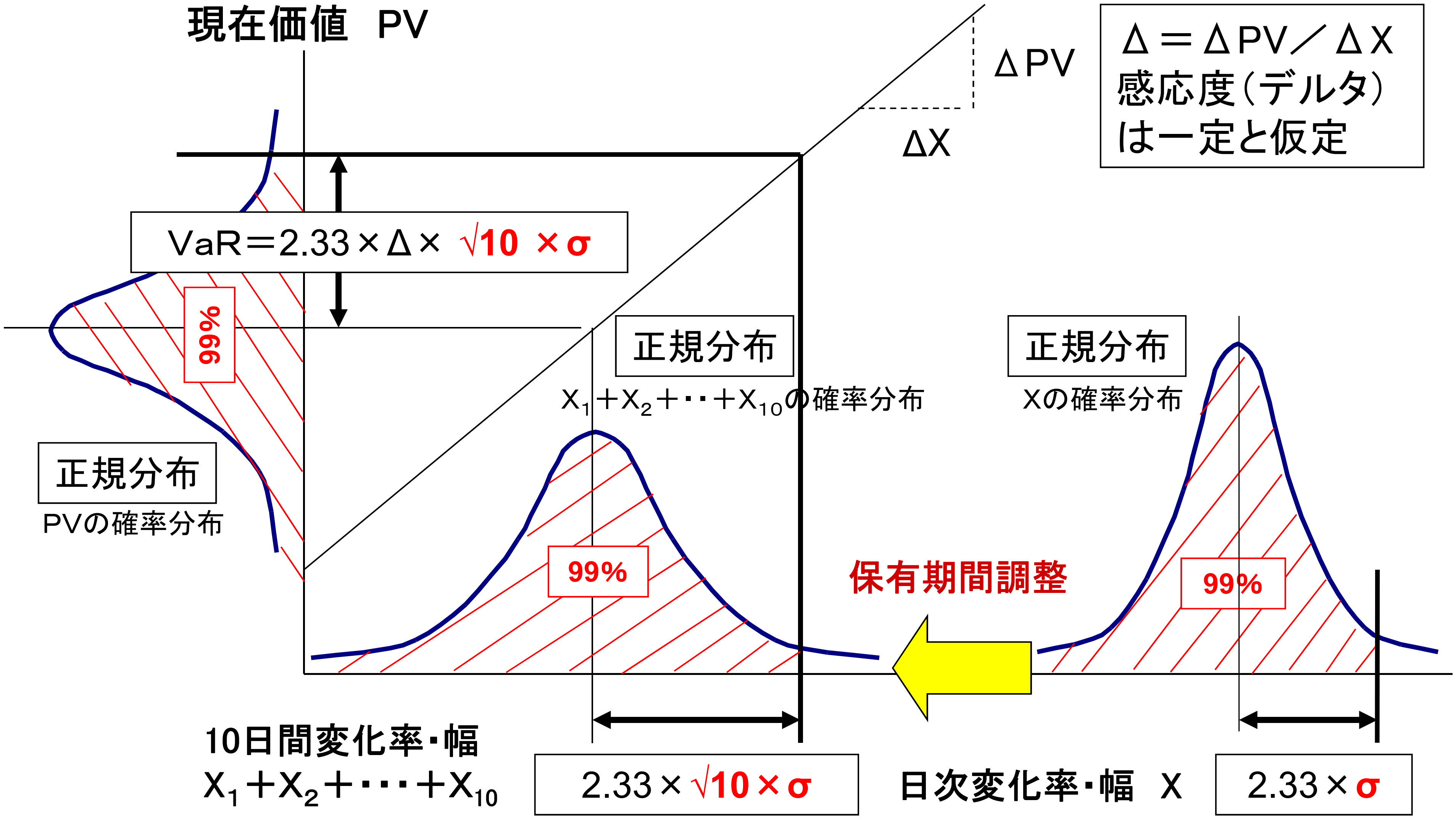
感応度 ＝ 現在価値ベースでは、リスクファクターの変動が、どれだけ増幅されるか
（Δ： 関数式の傾き）

基本統計量	Excel関数	日次 対数変化率	10日間 対数変化率
データ数	COUNT	250	250
平均	AVERAGE	0.063	0.656
分散	VARA	1.540	14.966
標準偏差	STDEVA	1.241	3.869

- 分散を計算してみると、10日間対数変化率の分散は、日次対数　変化率の分散の概ね10倍となっている。

- 標準偏差を計算してみると、10日間対数変化率の標準偏差は、日次対数変化率の標準偏差の概ね$\sqrt{10}$倍（＝3.162倍）となっている。

分散共分散法（ルートT倍法）によるVaR計測手法



分散共分散法（ルートT倍法）による計算例

VaRの計算シート

株式投信	100	億円
観測データ	250	

分散共分散法（デルタ法）（保有期間調整）

保有期間	10	日
信頼水準	99.00	%
信頼係数（関数NORMSINV）	2.33	
日次・標準偏差（関数STDEVA）	1.241	%
保有期間調整（保有期間）^0.5	3.162	

↑ ↓

正規分布を想定↑

↓信頼計数×日次・標準偏差×√T

予想変化率		感応度		VaR	
9.130	×	100	＝	9.13	億円

	日次変化率
2006/9/29	0.508
2006/9/28	0.722
2006/9/27	2.651
2006/9/26	−0.667
2006/9/25	−0.245
2006/9/22	−1.048
2006/9/21	0.629
2006/9/20	−1.379
2006/9/19	−0.091
2006/9/15	−0.295
2006/9/14	0.917
2006/9/13	−0.153
2006/9/12	−0.661

PV＝Δ*X

PV ： 株式投信価額

X ： 東証TOPIX指数の変化率

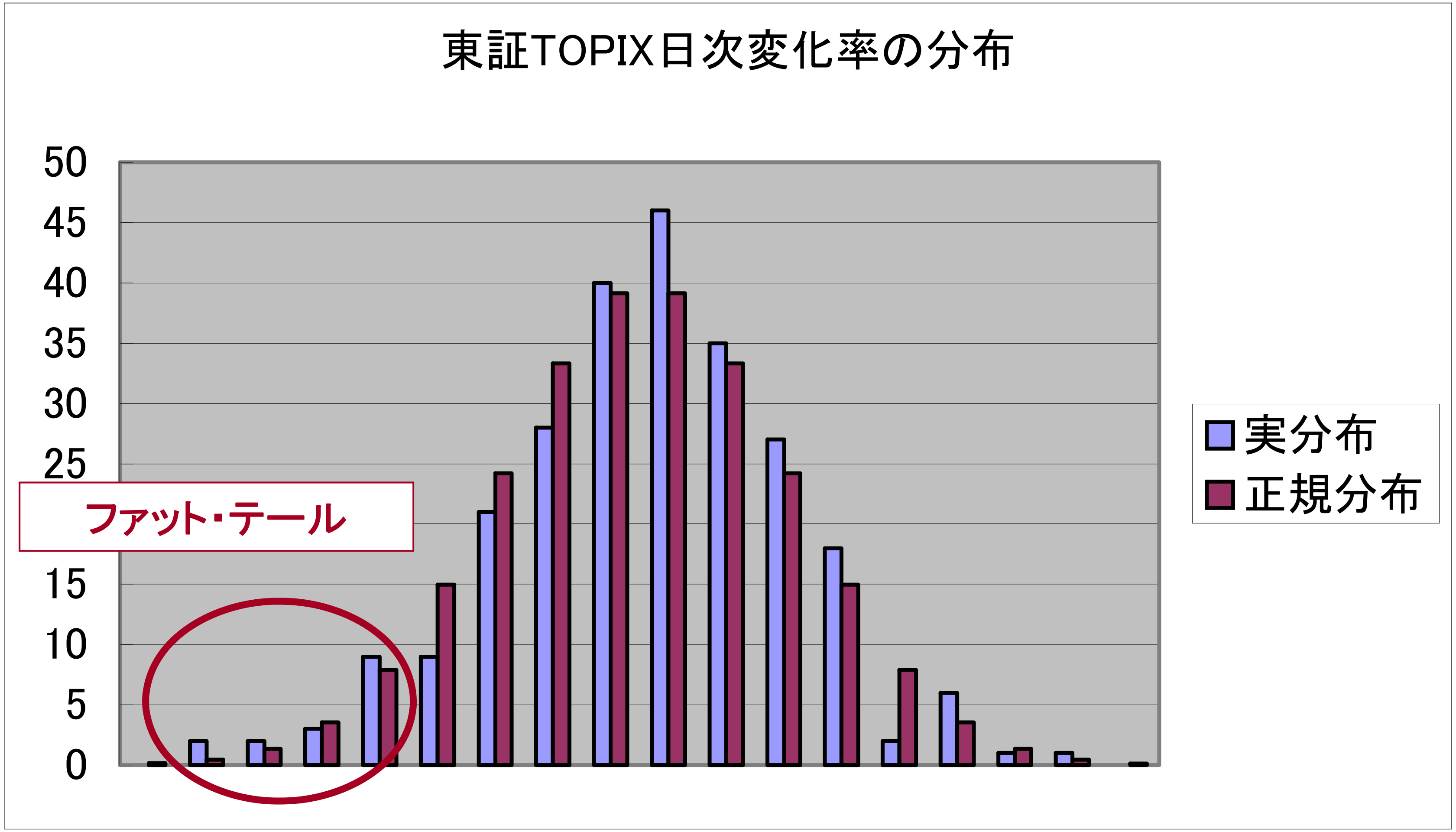
Δ ： 直近時点の株式価額（PV_0）×1

留意事項①

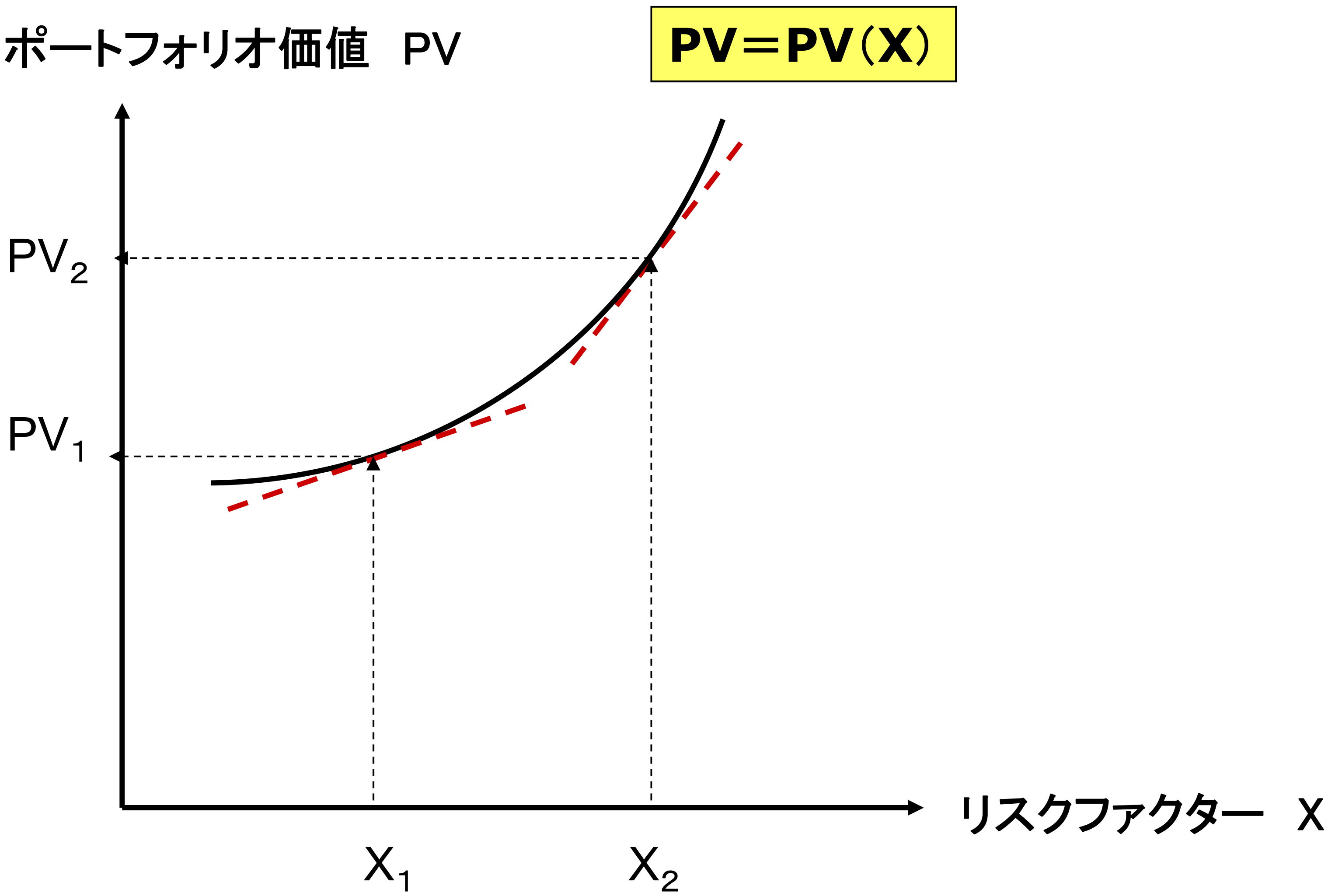
- リスクファクターの変動が正規分布に従うと仮定している。
- デルタは一定であると仮定している。
- 実際には、上記の仮定が満たされることはないが、分散共分散法で計測されたVaRは全く意味がないのか？

⇒　分散共分散法で計測されたVaRについて「近似的な適用」が可能かどうかを検討する。

リスクファクターの変動　:ファットテールなケース



ポートフォリオ価値とリスクファクターの関係
:デルタ一定が満たされないケース

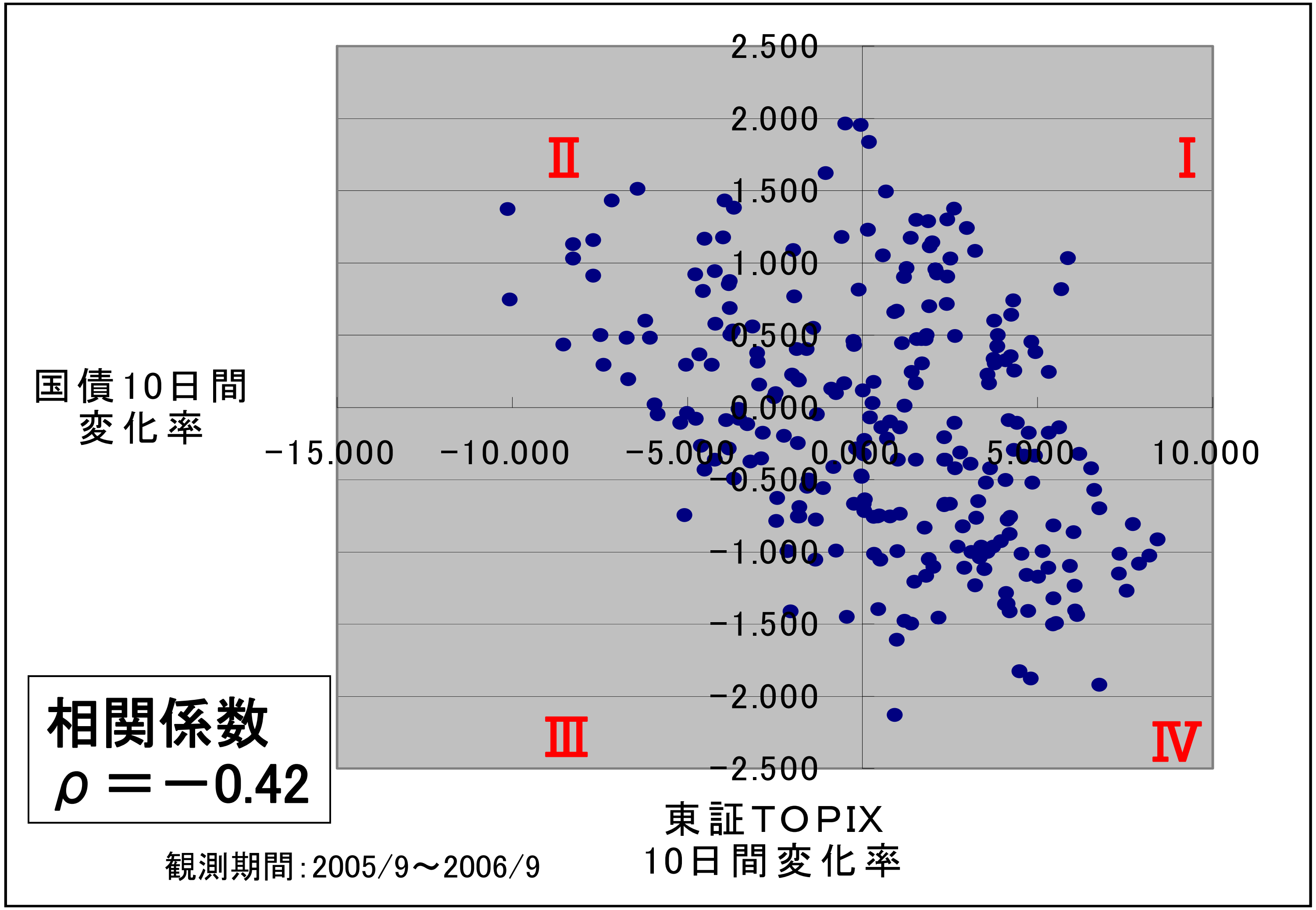


留意事項②

- ポートフォリオ価値に影響を与えるリスクファクターは複数存在する。
- リスクファクター間の「相関」がリスク総量を変化させるため、「相関」をみながらポートフォリオの残高・構成を見直すのが一般的。
  - 分散投資によるポートフォリオ価値の安定化
  - レバレッジを利かせたハイリスク・ハイリターン投資
- 代表的なリスクファクター間の「相関」の変化をフォローすることが重要。

国債価格変化率と株価変化率の相関関係

◆ Ⅱ、Ⅳのエリアに分布が多く､｢負の相関｣が観察される。



観測期間:2005/9～2006/9

分散共分散法（デルタ法）の計算例
― リスクファクターが2つの場合

VaRの計算シート　　分散共分散法（MW法）

【ポートフォリオ】

株式投信	100	億円
10年割引国債	100	億円
保有期間	10	日
信頼水準	99.00	%
観測データ	250	日

	東証TOPIX 10日間変化率	10年割引国債 10日間変化率
2006/9/29	0.785	−0.098
2006/9/28	1.194	0.010
2006/9/27	0.319	0.177
2006/9/26	−2.994	0.315
2006/9/25	−3.783	0.688
2006/9/22	−3.139	0.560
2006/9/21	−3.894	−0.088
2006/9/20	−5.040	0.295
2006/9/19	−3.538	−0.010
2006/9/15	−2.474	0.098
2006/9/14	−2.248	−0.197
2006/9/13	−1.822	0.187
2006/9/12	−1.875	0.403
2006/9/11	−0.235	0.433
2006/9/8	0.007	0.118
2006/9/7	−0.591	1.179
2006/9/6	0.155	1.228
2006/9/5	0.582	1.051
2006/9/4	1.534	1.296
2006/9/1	−0.495	1.964
2006/8/31	0.184	1.837
	⋮	⋮

	単独VaR		標準偏差	×信頼係数	×感応度
株式投信	9.00	＝	3.8686	2.33	100
割引国債	1.99		0.8568	2.33	100

	ポートVaR		
単純合算	10.99	①	
相関考慮後	8.35	②	①＞②：ポートフォリオ効果

投信VaR	国債VaR
9.00	1.99

相関行列

1	−0.4233
−0.4233	1

9.00	投信VaR
1.99	国債VaR

行列計算（関数MMULT）

8.1560	−1.8162

行列計算（同）

VaR^2：	69.78
VaR：	8.35

投信感応度	国債感応度
100.00	100.00

分散共分散行列

14.96626	−1.4031
−1.4031	0.7341395

100.00	投信感応度
100.00	国債感応度

行列計算（関数MMULT）

1356.3178	−66.8938

行列計算(同)

ポート分散：	12.89	（単位調整）
ポート標準偏差：	3.59	
信頼係数	2.33	
ポートVaR	8.35	

(リスクファクターが1変量の場合)

99%VaR＝信頼計数 × Δ × σ

＝信頼係数× $\boxed{\sqrt{\Delta \times \sigma^2 \times \Delta}}$

＝信頼係数× $\boxed{\sqrt{\text{感応度} \times \text{分散} \times \text{感応度}}}$

（リスクファクターが多変量の場合）

99%VaR

$$
=\text{信頼計数}\times\sqrt{\overset{\text{（感応度）}}{\begin{pmatrix}\Delta_{X1} & \Delta_{X2} & \cdots & \Delta_{XN}\end{pmatrix}}\ \overset{\text{（分散共分散行列）}}{\begin{pmatrix} V_{X1} & COV(X_1、X_2) & \cdots & COV(X_1、X_N) \\ COV(X_1、X_2) & V_{X2} & \cdots & COV(X_2、X_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ COV(X_1、X_N) & COV(X_N、X_2) & \cdots & V_{XN}\end{pmatrix}}\ \overset{\text{（感応度）}}{\begin{pmatrix}\Delta_{X1} \\ \Delta_{X2} \\ \vdots \\ \Delta_{XN}\end{pmatrix}}}
$$

$$
=\sqrt{\overset{\text{（単独VaR）}}{\begin{pmatrix}VaR(X_1) & VaR(X_2) & \cdots & VaR(X_N)\end{pmatrix}}\ \overset{\text{（相関行列）}}{\begin{pmatrix} 1 & \rho(X_1、X_2) & \cdots & \rho(X_1、X_N) \\ \rho(X_1、X_2) & 1 & \cdots & \rho(X_2、X_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho(X_1、X_N) & \rho(X_N、X_2) & \cdots & 1\end{pmatrix}}\ \overset{\text{（単独VaR）}}{\begin{pmatrix}VaR(X_1) \\ VaR(X_2) \\ \vdots \\ VaR(X_N)\end{pmatrix}}}
$$

Ｂ．モンテカルロ・シミュレーション（MS法）

乱数を利用して、繰り返しリスクファクターの予想値を生成する。

上記リスクファクターの予想値に対応した当該資産・負債の現在価値をシミュレーションにより算出する。

シミュレーションで得られた現在価値を降順に並べて、信頼水準に相当するパーセンタイル値からVaRを求める。

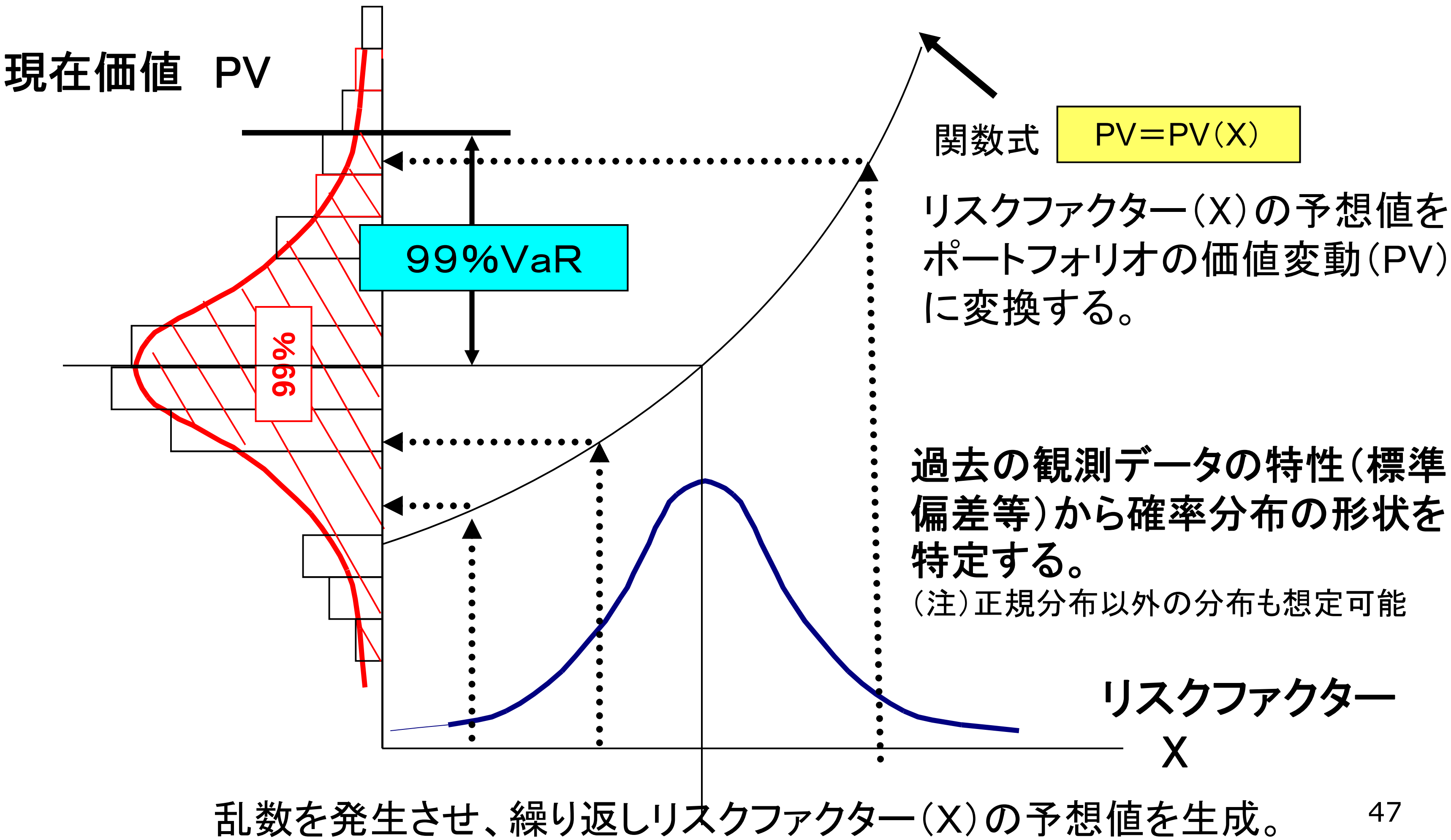
（利点）

・リスクファクターの確率分布について正規分布以外も想定可能。
・非線型リスクにも対応が可能。

（欠点）

・リスクファクターの分布に前提あり（モデルリスク）。
・複雑なモデルで大量のデータを扱うと、計算負荷が重い。

《MS法》
乱数を発生させ、繰り返しリスクファクターの予想値を生成。
そして、ポートフォリオの価値変動をシミュレーションする。



VaRの計算シート　モンテカルロ・シミュレーション法

株式投信	100	億円
観測データ	250	

保有期間	10	日
信頼水準	99.0	%

分布関数を特定(ここでは正規分布)

標準偏差 (関数STDEVA)	3.869	%

F9キーで再計算

VaR	
8.92	億円

↑　↓　↑

↑　↓乱数で1万個の予想変化率を発生　関数PERCENTILE

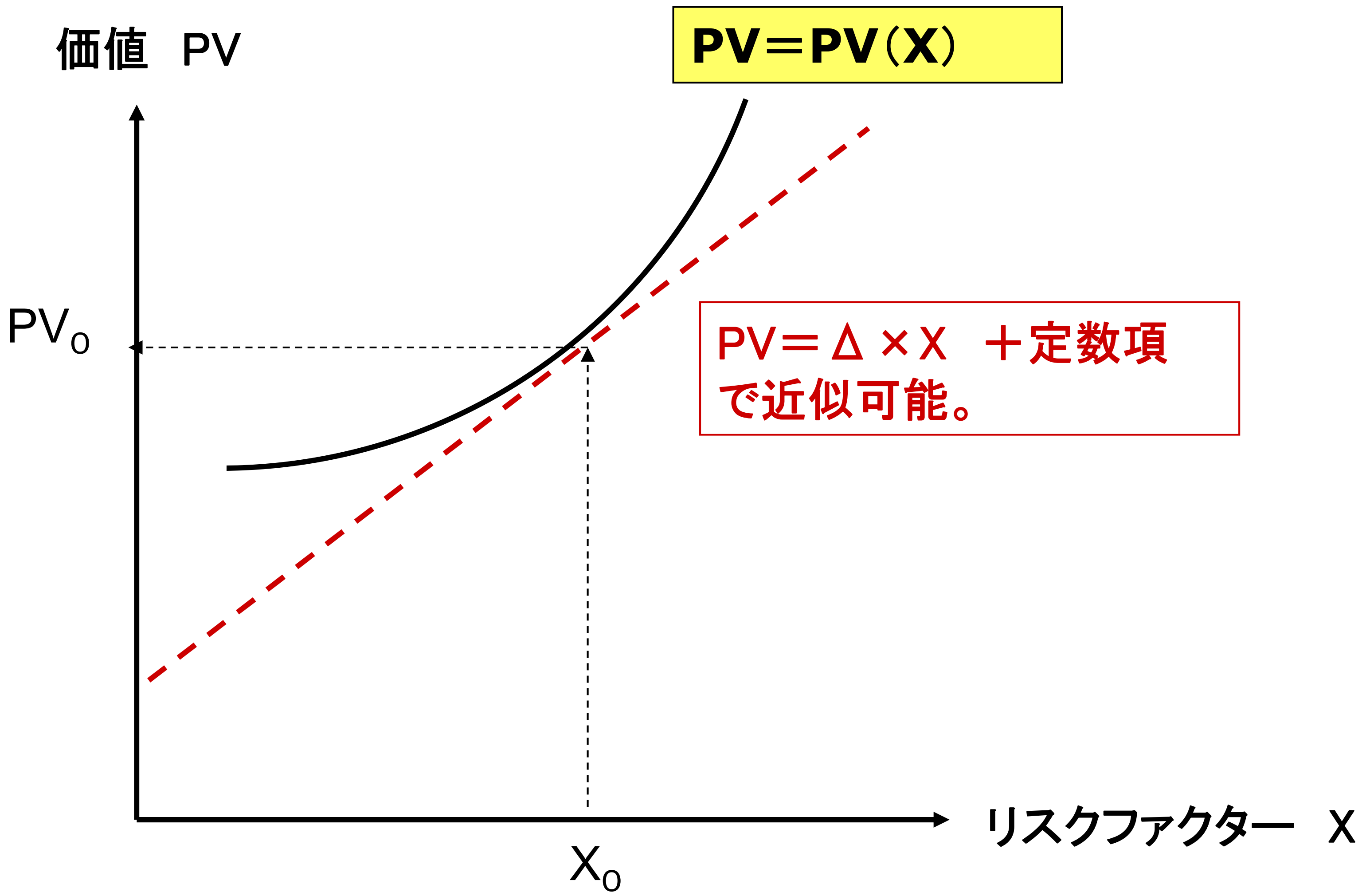
↑　↓NORMSINV(RAND())×標準偏差　↑

	10日間 変化率	10日間 予想変化率		残高		10日間 予想増減額	
2006/9/29	0.785	−1.9155	×	100.00	＝	−1.9155	億円
2006/9/28	1.194	0.0509	×	100.00	＝	0.0509	
2006/9/27	0.319	5.0609	×	100.00	＝	5.0609	
2006/9/26	−2.994	−2.3250	×	100.00	＝	−2.3250	
2006/9/25	−3.783	−0.1294	×	100.00	＝	−0.1294	
2006/9/22	−3.139	2.1462	×	100.00	＝	2.1462	
2006/9/21	−3.894	1.1020	×	100.00	＝	1.1020	
2006/9/20	−5.040	−8.9002	×	100.00	＝	−8.9002	
2006/9/19	−3.538	−5.5228	×	100.00	＝	−5.5228	
2006/9/15	−2.474	2.6461	×	100.00	＝	2.6461	
2006/9/14	−2.248	−2.5754	×	100.00	＝	−2.5754	
2006/9/13	−1.822	−2.5844	×	100.00	＝	−2.5844	
2006/9/12	−1.875	−2.3236	×	100.00	＝	−2.3236	
2006/9/11	−0.235	2.1802	×	100.00	＝	2.1802	
2006/9/8	0.007	3.0396	×	100.00	＝	3.0396	

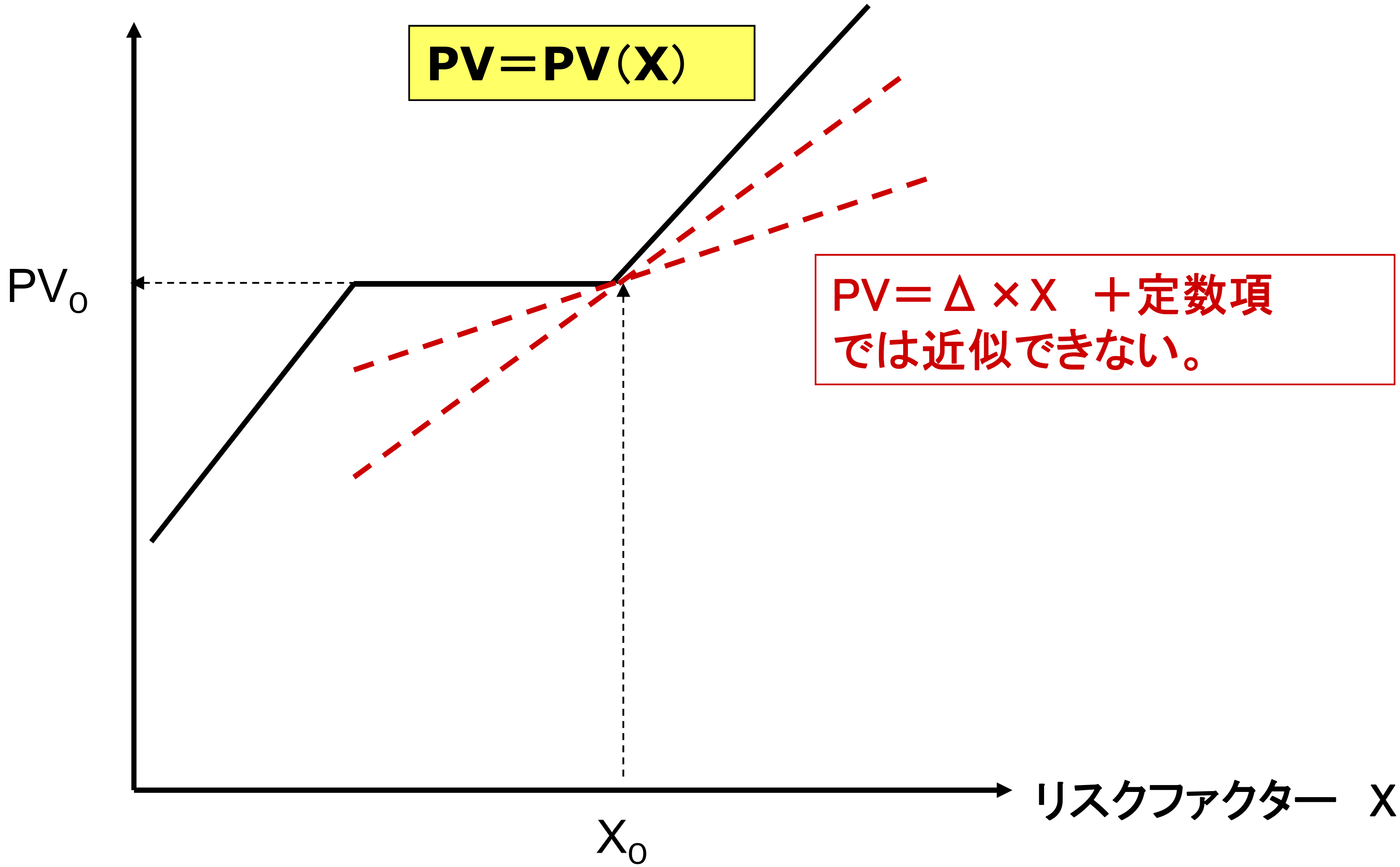
留意事項③

- 分散共分散法では、デルタ一定が前提となっている。非線形リスクが強いオプション性の商品等については、分散共分散法によるVaRの計測値では、近似精度が十分に得られないことがある。
- 非線形リスクが強い商品については、正確な価格算出モデルを利用して、モンテカルロ・シミュレーション法や後述のヒストリカル法により、VaRを計測するのが望ましい。

デルタ(Δ)一定の仮定が満たされなくても
近似精度が相応に得られ、分散共分散法を適用しても問題がないケース



デルタ(Δ)一定の仮定が満たされないため、
近似精度が殆ど得られず、分散共分散法を適用するのが適当でないケース



C. ヒストリカル法

現時点のポートフォリオ残高・構成を前提に、過去のリスクファクター値を利用して、理論価値を遡って計算する。

こうして得られた現在価値の分布を用いて信頼水準に相当するパーセンタイル値からVaRを求める。

（利点）

- 確率分布として特定の分布を前提にしない
- 過去のデータ変動にもとづく分布を利用するため、過去のデータ変動が持つファット・テール性、非線形リスクを相応に勘案することができる。

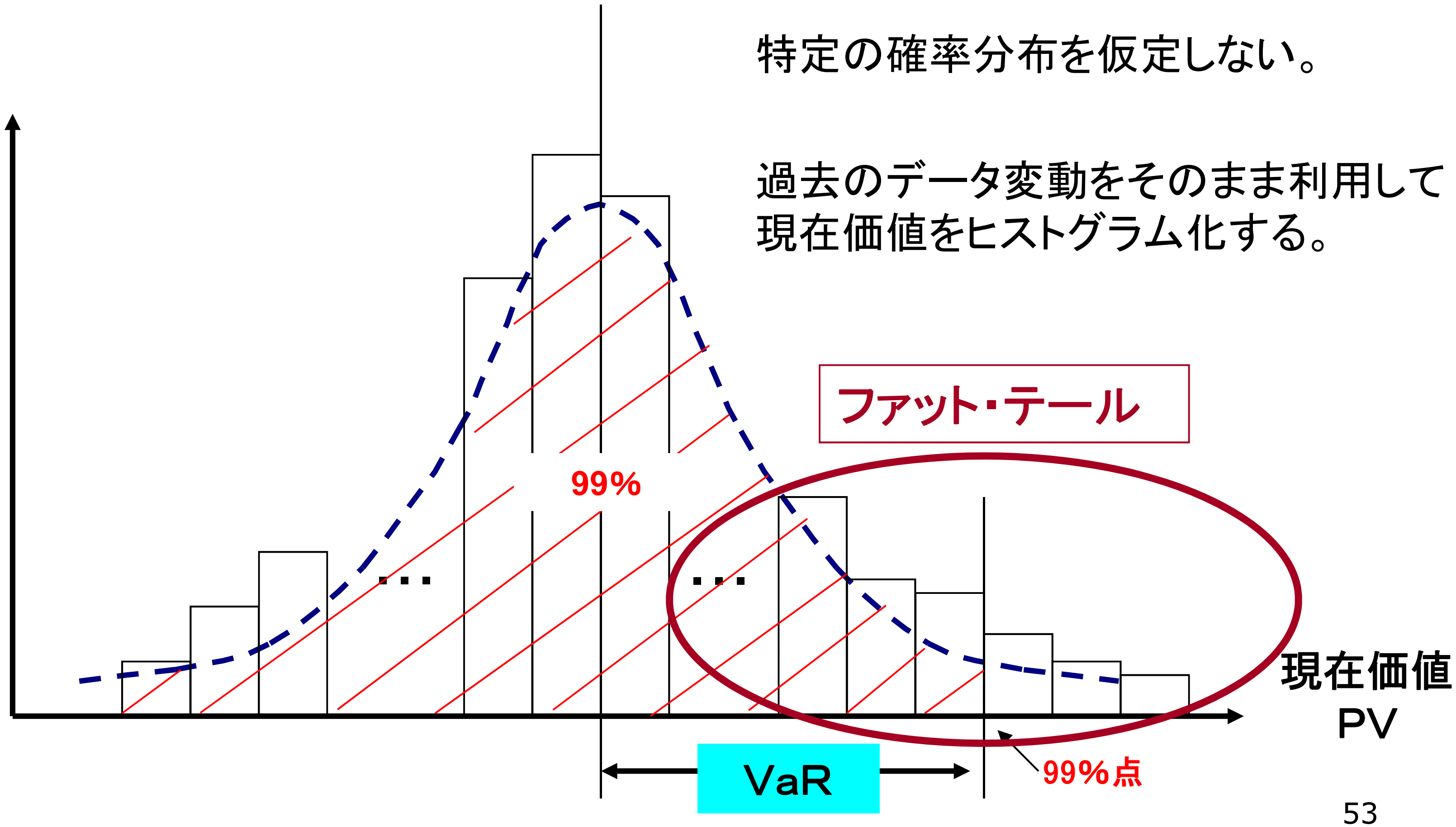
（欠点）

- 過去に起こったことしか取り扱えない。
- 観測期間を短くとるとデータ数が不足し、計測結果が不安定化する。
- データ数を確保するため、観測期間を長くとると、遠い過去のデータに引摺られ、直近のデータ変動が反映されにくい。

ヒストリカル法は、過去のデータ変動を利用して そのままヒストグラムを作る（イメージ図）

特定の確率分布を仮定しない。

過去のデータ変動をそのまま利用して
現在価値をヒストグラム化する。



VaRの計算シート　ヒストリカル法

株式投信	100	億円
観測データ	250	

保有期間	10	日
信頼水準	99.0	%

VaR	
8.40	億円

↑

関数PERCENTILE

↑

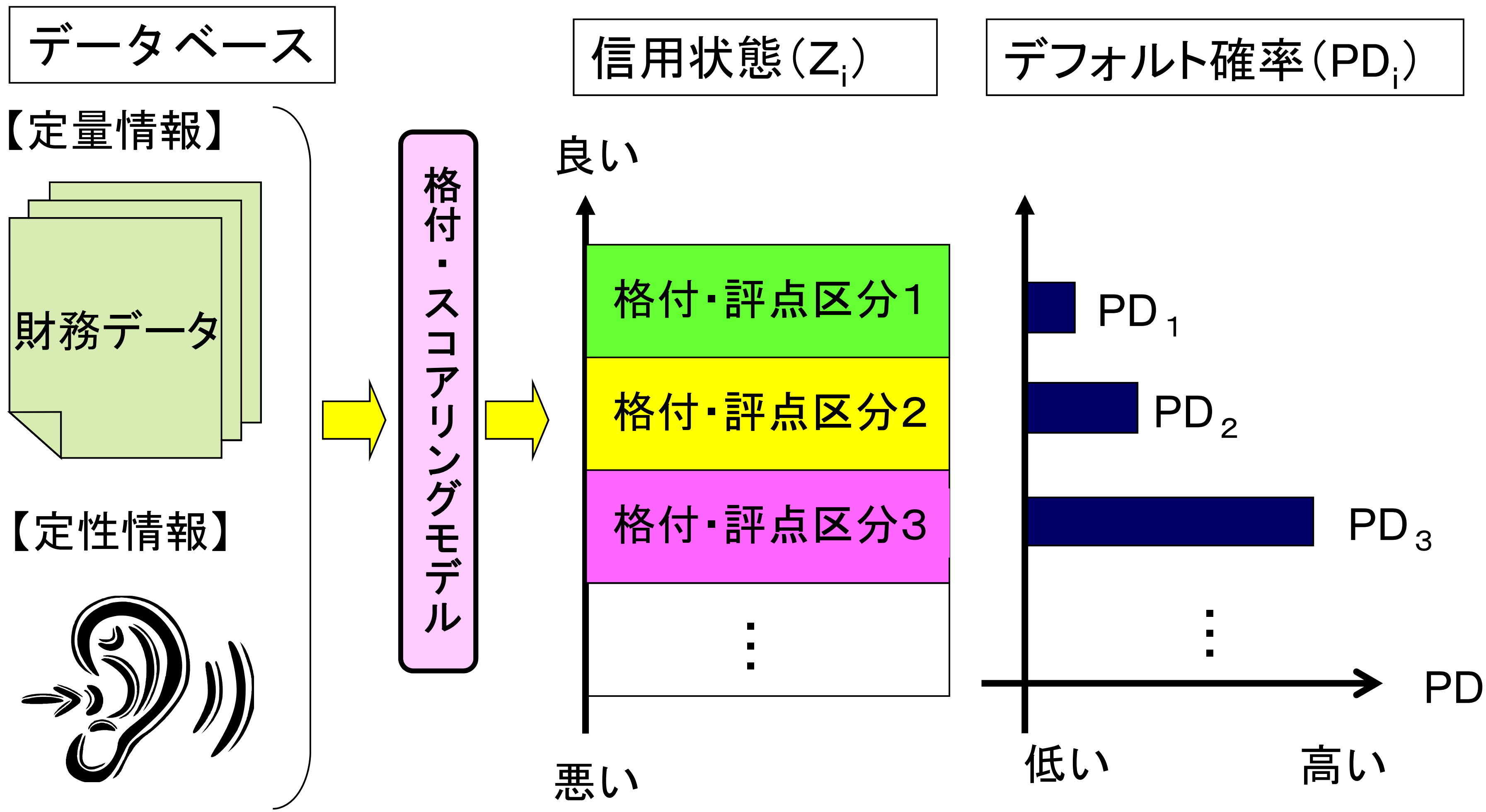
	10日間 変化率		残高		10日間 予想増減額	
2006/9/29	0.785	×	100.00	＝	0.7853	億円
2006/9/28	1.194	×	100.00	＝	1.1939	
2006/9/27	0.319	×	100.00	＝	0.3185	
2006/9/26	−2.994	×	100.00	＝	−2.9940	
2006/9/25	−3.783	×	100.00	＝	−3.7832	
2006/9/22	−3.139	×	100.00	＝	−3.1390	
2006/9/21	−3.894	×	100.00	＝	−3.8939	
2006/9/20	−5.040	×	100.00	＝	−5.0403	
2006/9/19	−3.538	×	100.00	＝	−3.5385	
2006/9/15	−2.474	×	100.00	＝	−2.4744	
2006/9/14	−2.248	×	100.00	＝	−2.2478	
2006/9/13	−1.822	×	100.00	＝	−1.8216	
2006/9/12	−1.875	×	100.00	＝	−1.8745	
2006/9/11	−0.235	×	100.00	＝	−0.2346	
2006/9/8	0.007	×	100.00	＝	0.0068	
2006/9/7	−0.591	×	100.00	＝	−0.5914	

（2）信用VaRの計測方法

- 個別債務者（i）が確率（p_i）でデフォルトし、そのとき貸倒れに伴う損失（L_i）が発生するという前提で、（注） 全債務者に関するモンテカルロ・シミュレーションを行って得られた損失分布からVaRを計測する。

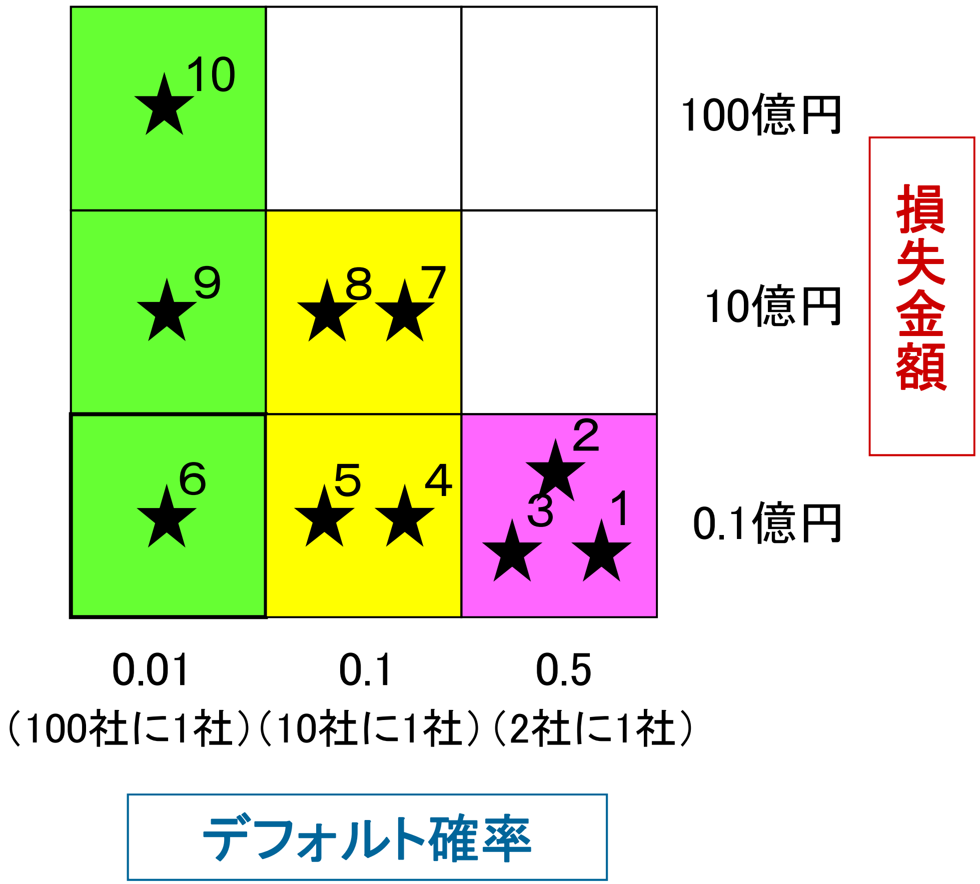
（注）格付の低下等に伴う、与信の現在価値の下落を損失に含める考え方もある。

基本的な考え方

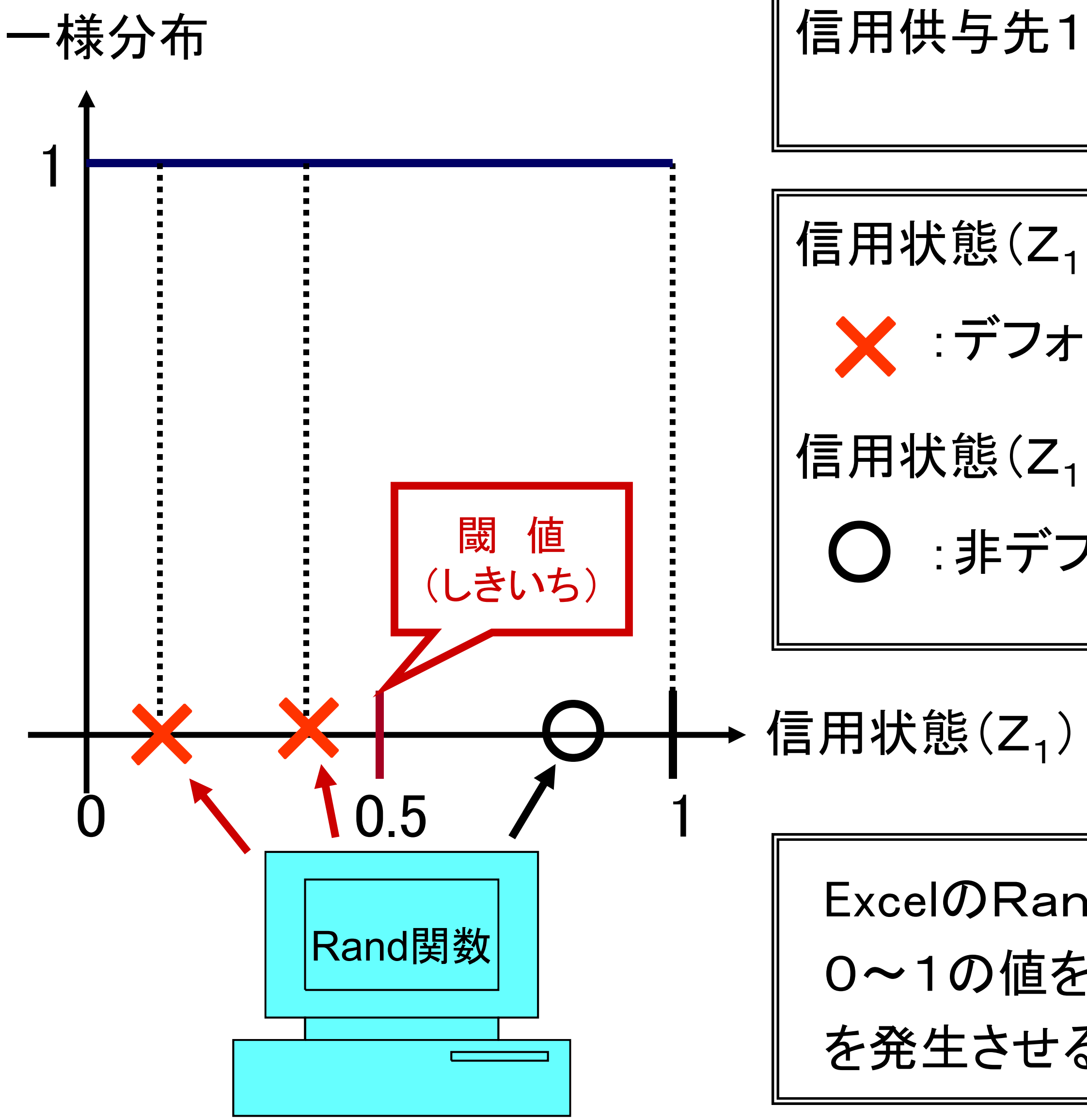

データベース
【定量情報】
財務データ
【定性情報】
格付・スコアリングモデル
信用状態(Zi)
良い
格付・評点区分1
格付・評点区分2
格付・評点区分3
⋮
悪い
デフォルト確率(PDi)
PD 1
PD 2
PD 3
⋮
PD
低い
高い

信用ポートフォリオの想定

債務者	格付	デフォルト確率	損失金額
1	C	0.5	0.1
2	C	0.5	0.1
3	C	0.5	0.1
4	B	0.1	0.1
5	B	0.1	0.1
6	A	0.01	0.1
7	B	0.1	10
8	B	0.1	10
9	A	0.01	10
10	A	0.01	100



（例１）簡単な信用リスク計量モデル



信用供与先１ ﾃﾞﾌｫﾙﾄ確率　0.5
損失金額　0.1億円

信用状態（Z_1）が 0.5 以下のとき

✕ ：デフォルト　損失 0.1億円

信用状態（Z_1）が 0.5 超のとき

○ ：非デフォルト 損失　なし

ExcelのRand関数　を使って
０～１の値をとる一様乱数（Z_1）
を発生させる。

供与先	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
損失	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	10	10	10	100
確率	0.5	0.5	0.5	0.1	0.1	0.01	0.1	0.1	0.01	0.01

試行	乱数1	乱数2	乱数3	乱数4	乱数5	乱数6	乱数7	乱数8	乱数9	乱数10
1	0.245	0.059	0.004	0.110	0.364	0.431	0.778	0.785	0.598	0.487
2	0.548	0.387	0.884	0.398	0.977	0.587	0.334	0.724	0.172	0.383
3	0.291	0.257	0.202	0.384	0.248	0.166	0.200	0.944	0.351	0.862
4	0.768	0.380	0.934	0.075	0.587	0.495	0.808	0.101	0.721	0.605
5	0.250	0.267	0.955	0.140	0.957	0.505	0.744	0.716	0.113	0.097
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

試行	損失1	損失2	損失3	損失4	損失5	損失6	損失7	損失8	損失9	損失10	損失計
1	0.100	0.100	0.100	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.300
2	0.000	0.100	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.100
3	0.100	0.100	0.100	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.300
4	0.000	0.100	0.000	0.100	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.200
5	0.100	0.100	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.200
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

：デフォルト（損失）が発生した箇所

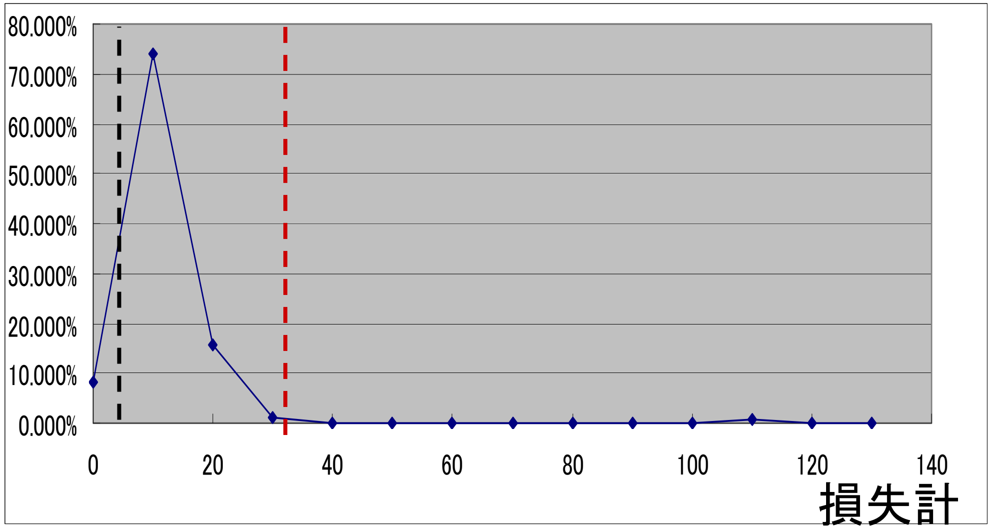
シミュレーション結果（試行回数：1万回）

損失計	確率	累計
0	7.740%	7.740%
～ 10	73.470%	81.210%
～ 20	16.650%	97.860%
～ 30	1.120%	98.980%
～ 40	0.020%	99.000%
～ 50	0.000%	99.000%
～ 60	0.000%	99.000%
～ 70	0.000%	99.000%
～ 80	0.000%	99.000%
～ 90	0.000%	99.000%
～ 100	0.080%	99.080%
～ 110	0.780%	99.860%
～ 120	0.130%	99.990%
～ 130	0.010%	100.000%
130超	0.000%	100.000%

平均値	
理論値	3.3
試行値	3.3

	パーセント点
90.00%	10.2
95.00%	10.3
99.00%	30.6
99.50%	100.2
99.90%	110.1
99.95%	110.3

確率分布



（注）

（例2）マートン型の1ファクター・モデル

感応度（追随率）

共通要因

固有要因

個別債務者（i）の信用状態 $Z_i = a_i X + \sqrt{1 - a_i^2}\, Y_i$

- X、Y_iは互いに独立な**標準正規分布**にしたがうと仮定する。

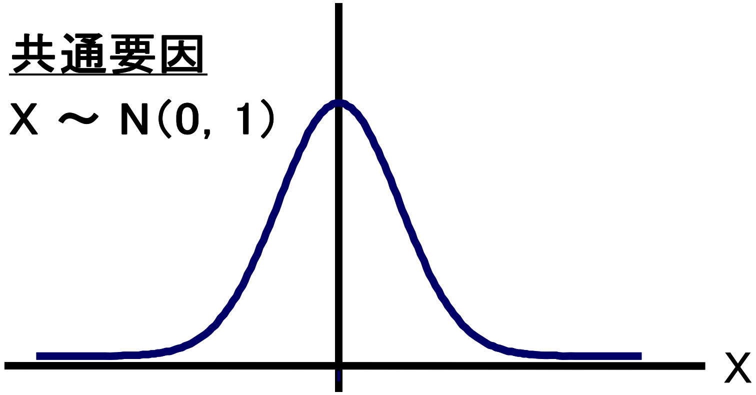
⇒ Z_i も**標準正規分布**にしたがう。

- Z_i の X に対する感応度（追随率）を a_i と仮定する。

（注）共通要因が1個という意味。複数の共通要因の存在を仮定する場合は、マルチ・ファクターモデルと呼ばれる。

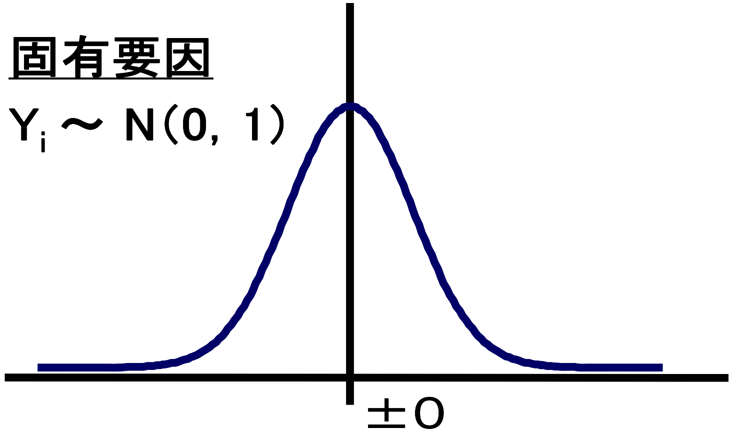
共通要因

$X \sim N(0,\ 1)$



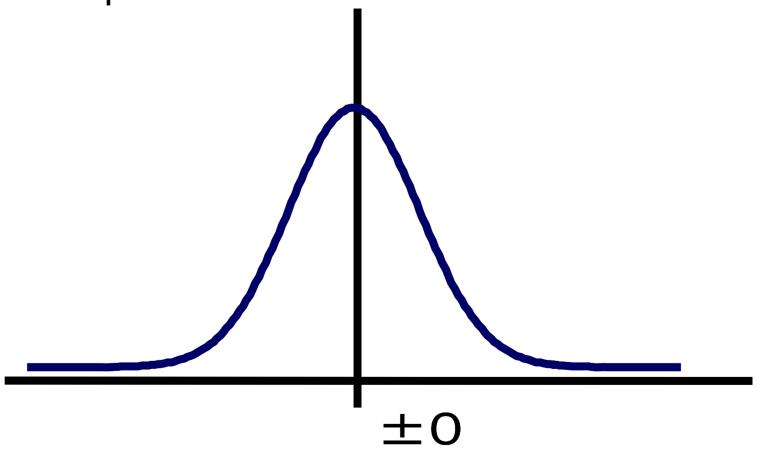
固有要因

$Y_i \sim N(0,\ 1)$



個別債務者(i)の信用状態

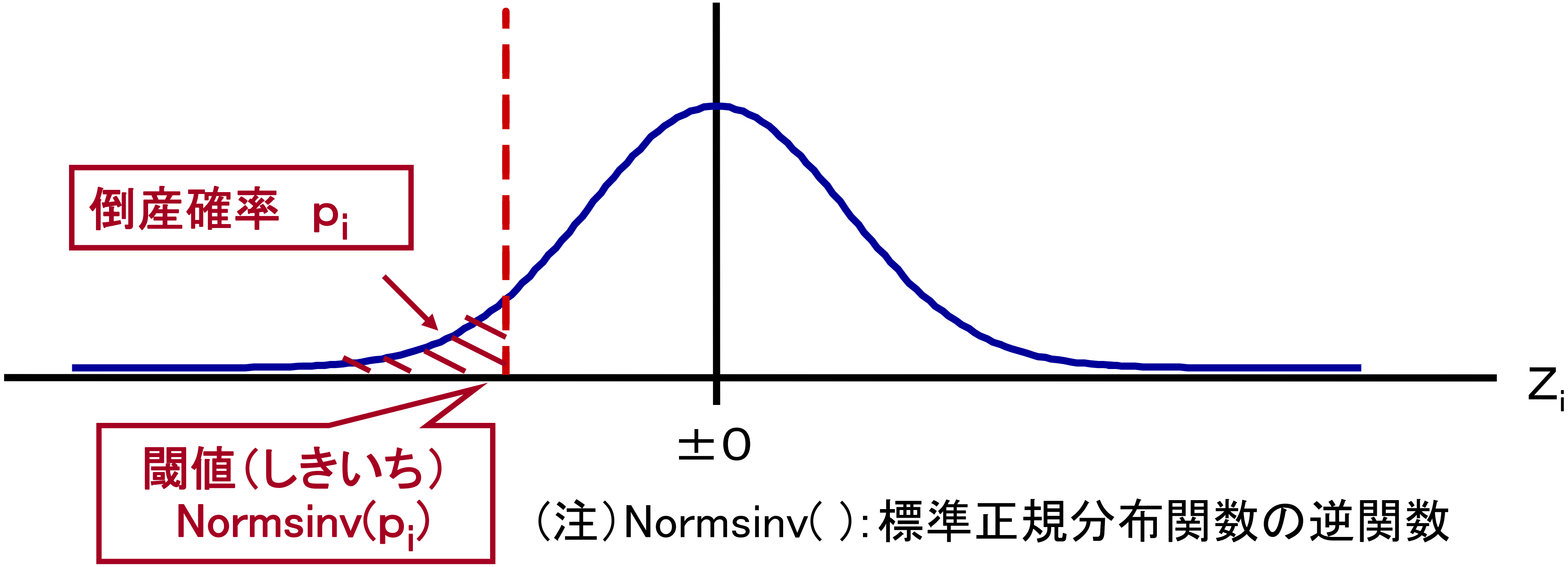
$Z_i \sim N(0,\ 1)$



$$Z_i = a_i X + \sqrt{1 - a_i^2}\ Y_i$$

個別債務者の信用状態

Z_i〜 N（0, 1） 標準正規分布にしたがう。



（注）Normsinv( ): 標準正規分布関数の逆関数

個別債務者の信用状態（標準正規乱数 Z_i）が
閾値を下回った場合（$Z_i \leqq$ Normsinv(p_i)） （注）
この債務者はデフォルトすると考える。

（注） p_iは、個別債務者のデフォルト確率。

	X	Z1	Z2	Z3	Z4	Z5	Z6	Z7	Z8	Z9	Z10
a	—	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4
金額	—	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	10	10	10	100
確率	—	0.5	0.5	0.5	0.1	0.1	0.01	0.1	0.1	0.01	0.01
閾値	—	0.000	0.000	0.000	−1.282	−1.282	−2.326	−1.282	−1.282	−2.326	−2.326

試行	乱数X	Z1	Z2	Z3	Z4	Z5	Z6	Z7	Z8	Z9	Z10
1	−0.106	−0.683	1.890	−0.346	0.657	−0.720	−0.345	−0.727	−1.231	−0.835	−1.047
2	−1.419	0.386	−0.979	0.230	−0.788	0.343	−1.836	0.224	−0.052	0.825	−0.371
3	0.010	0.914	2.001	−0.830	−0.535	1.671	−0.460	−1.478	−0.571	0.728	0.965
4	0.939	0.508	0.694	−1.041	0.616	1.850	1.173	−0.562	0.091	0.328	1.136
5	−1.018	−0.557	−1.208	−1.710	0.648	0.214	1.134	0.041	−0.149	−1.929	−0.460
6	−1.889	−0.821	−1.786	−0.169	0.012	−0.383	−1.385	−2.541	−0.944	−0.358	−1.779
7	−1.611	0.545	−0.264	0.164	−2.471	−0.806	0.271	−1.459	−1.920	0.703	−0.364
8	1.349	−1.542	1.111	1.053	2.497	1.164	−0.119	−0.675	0.297	0.563	0.443
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

試行		L1	L2	L3	L4	L5	L6	L7	L8	L9	L10	損失計
1		0.1	0.0	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.200
2		0.0	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.100
3		0.0	0.0	0.1	0.0	0.0	0.0	10.0	0.0	0.0	0.0	10.100
4		0.0	0.0	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.100
5		0.1	0.1	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.300
6		0.1	0.1	0.1	0.0	0.0	0.0	10.0	0.0	0.0	0.0	10.300
7		0.0	0.1	0.0	0.1	0.0	0.0	10.0	10.0	0.0	0.0	20.200
8		0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.100
⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

:デフォルト(損失)が発生した箇所

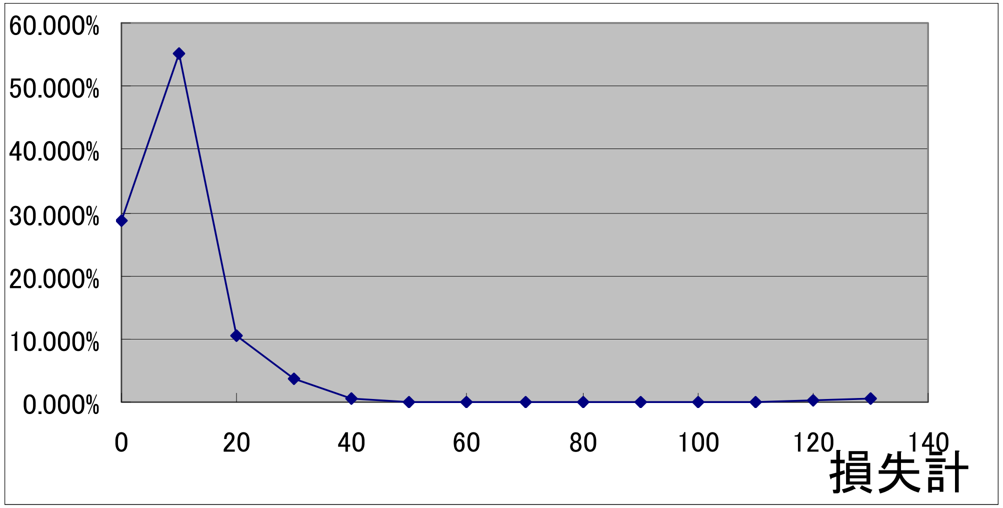
シミュレーション結果（試行回数：1万回）

損失計	確率	累計
0	28.850%	28.850%
～　10	55.300%	84.150%
～　20	10.650%	94.800%
～　30	3.620%	98.420%
～　40	0.430%	98.850%
～　50	0.000%	98.850%
～　60	0.000%	98.850%
～　70	0.000%	98.850%
～　80	0.000%	98.850%
～　90	0.000%	98.850%
～　100	0.000%	98.850%
～　110	0.120%	98.970%
～　120	0.300%	99.270%
～　130	0.510%	99.780%
130超	0.220%	100.000%

	損失計
平均値	3.4

	パーセント点
90.00%	10.3
95.00%	20.2
99.00%	110.3
99.50%	120.5
99.90%	130.5
99.95%	130.6

確率分布



（参考１）マルチ・ファクター・モデル（業種別）

- 個別債務者の信用状態に影響を与える「業種別要因」の存在を仮定。

個別債務者(i)の信用状態

$$Z_i = a_i X_{s(i)} + \sqrt{1 - a_i^2}\, Y_i$$

$X_{s(i)}$ ： 債務者(i)の属する業種（S(i)）の要因

（参考２）一般化マルチ・ファクターモデル

- 個別債務者の信用状態に影響を与える「複数の共通要因」の存在を仮定。

個別債務者（i）の信用状態

$$Z_i = a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + \cdots + a_{iN}X_N$$

$$+ \sqrt{1 - (a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \cdots + a_{iN}^2)}\ Y_i$$

$X_1 \sim X_N$：　共通要因の例

（１）マクロ経済　（景気、金利、為替等）

（２）業種

（３）地域

（3）オペリスクVaRの計測方法

- 一定期間の事件・事故等の発生件数（K）と、1件当たりの損失発生額（L_j）を確率変数と考え、モンテカルロ・シミュレーションを行う。
- モンテカルロ・シミュレーションにより、一定期間の損失発生額の累計額（ $\sum_{j=1}^{K} L_j$ ）を繰り返し求めて、得られた損失分布からVaRを計測する。
  - ― ここでは、「損失分布手法」と呼ばれる手法によるVaRの計測方法を紹介する。

（例）「損失分布手法」によるVaRの計測

①一定期間（例えば1年間）当りのリスク事象の発生件数（実損失顕現化事例の発生件数）の「頻度分布」を損失データをもとに推定。

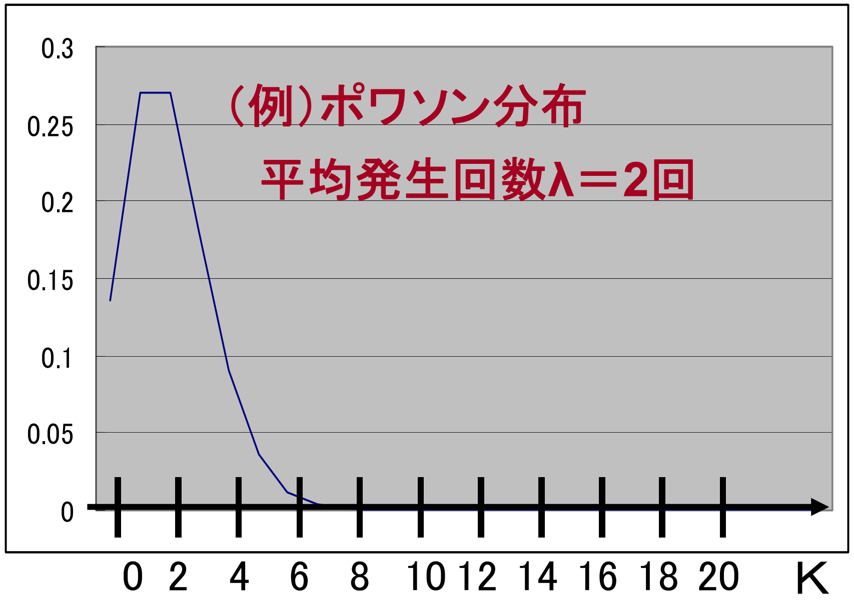
②1件当たり損失発生額の「損失金額分布」を損失データをもとに推定。

③両者を組み合わせて、モンテカルロ・シミュレーションを行い、一定期間の損失発生額の累計額の分布を作成する。

④一定期間の損失発生額の累計額の分布から、統計的に把握される一定の信頼水準の下での最大予想損失額（VaR）を算出する。

頻度分布

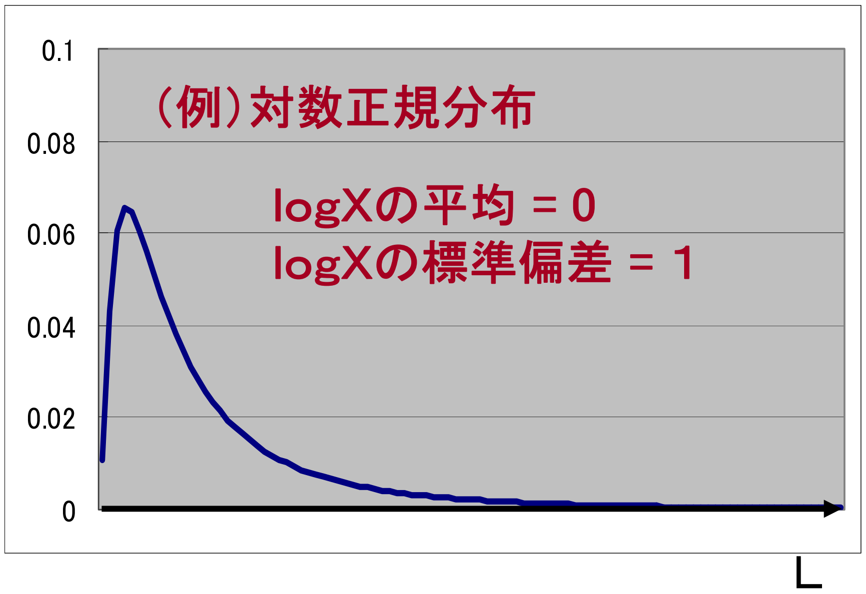
確率分布



リスク事象の発生件数

損失金額分布

確率分布



1件当たりの損失発生金額

事件事故の発生件数を
ポワソン分布にしたがう
乱数として発生させる

事件事故の発生件数分だけ、
損失額を、対数正規分布にしたがう
乱数として発生させる

（億円）

試行	発生件数	1	2	3	4	5	6	損失計
1	3	1.05	1.20	2.06	0.00	0.00	0.00	4.305
2	2	7.88	0.16	0.00	0.00	0.00	0.00	8.040
3	1	1.07	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.074
4	0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.000
5	2	0.70	0.61	0.00	0.00	0.00	0.00	1.318
6	3	2.15	0.29	0.16	0.00	0.00	0.00	2.602
7	1	0.70	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.699
8	4	0.61	1.44	0.44	0.17	0.00	0.00	2.663
9	3	3.91	0.78	0.40	0.00	0.00	0.00	5.088
10	3	3.87	0.21	1.83	0.00	0.00	0.00	5.914

：事件・事故に伴う損失の発生

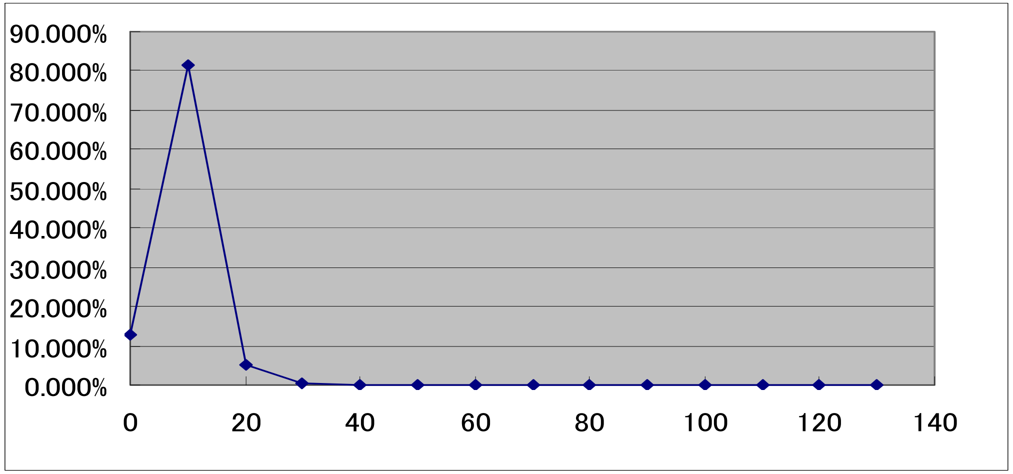
シミュレーション結果（試行回数：1万回）

損失計	確率	累計
0	12.810%	12.810%
～ 10	81.530%	94.340%
～ 20	5.080%	99.420%
～ 30	0.420%	99.840%
～ 40	0.100%	99.940%
～ 50	0.040%	99.980%
～ 60	0.020%	100.000%
～ 70	0.000%	100.000%
～ 80	0.000%	100.000%
～ 90	0.000%	100.000%
～ 100	0.000%	100.000%
～ 110	0.000%	100.000%
～ 120	0.000%	100.000%
～ 130	0.000%	100.000%
130超	0.000%	100.000%

	損失計
平均値	3.3
最大値	58.9

	発生件数
平均値	2.0
最大値	10.0

	パーセント点
90.00%	7.9
95.00%	10.4
99.00%	17.2
99.50%	21.2
99.90%	33.8
99.95%	40.1



留意事項

- 観測データやシナリオ・データから「頻度分布」や「損失金額分布」に関してフィットの良い確率分布を特定するのが難しい（統計的に高いスキルが必要）。
- オペレーショナル・リスクは、顕現化する頻度が少ない事象もあり、観測データが不足する。どのようなリスク事象が起き得るか、シナリオを作成して、観測データの不足を補う必要がある。

  ⇒　データ・コンソーシアムの構築が望まれる。

留意事項④

- VaR計測モデルをブラック・ボックス化させてはならず、リスクプロファイルに合致したVaR計測モデルを選択する必要がある。
- しかし、多大な経営資源・コストをかけて、より高度なVaR計測モデルへの乗り換えを図ることだけが経営の選択肢ではない。
- たとえば、

  ① 現行VaRモデルの限界を踏まえて、ストレステスト、多様なシナリオ分析を強化する

  ② リスク量の捕捉が難しい複雑なリスクプロファイルの仕組商品投資からの撤退を検討する

  など、幅広い選択肢の中から検討を行うことが重要。

３．バックテストによるVaRの検証

- VaRは、過去の観測データから統計的手法を用いて計測された推定値。バックテストによる検証を要する。
- VaRの計測後、事後的にVaRを超過する損失が発生した回数を調べる。

⇒　VaR超過損失の発生が、信頼水準から想定される回数を大幅に上回っていないか。

例えば、99%の信頼水準のVaRを計測している場合は、VaRを超過する損失が発生する確率は、100回に1回と想定される。

（参考）
バーゼル銀行監督委員会の3ゾーン・アプローチ

- 信頼水準99%、保有期間10日のトレーディング損益に関するVaR計測モデルについて、250回のうち何回、VaRを超過する損失が発生したかによって、その精度を評価する。

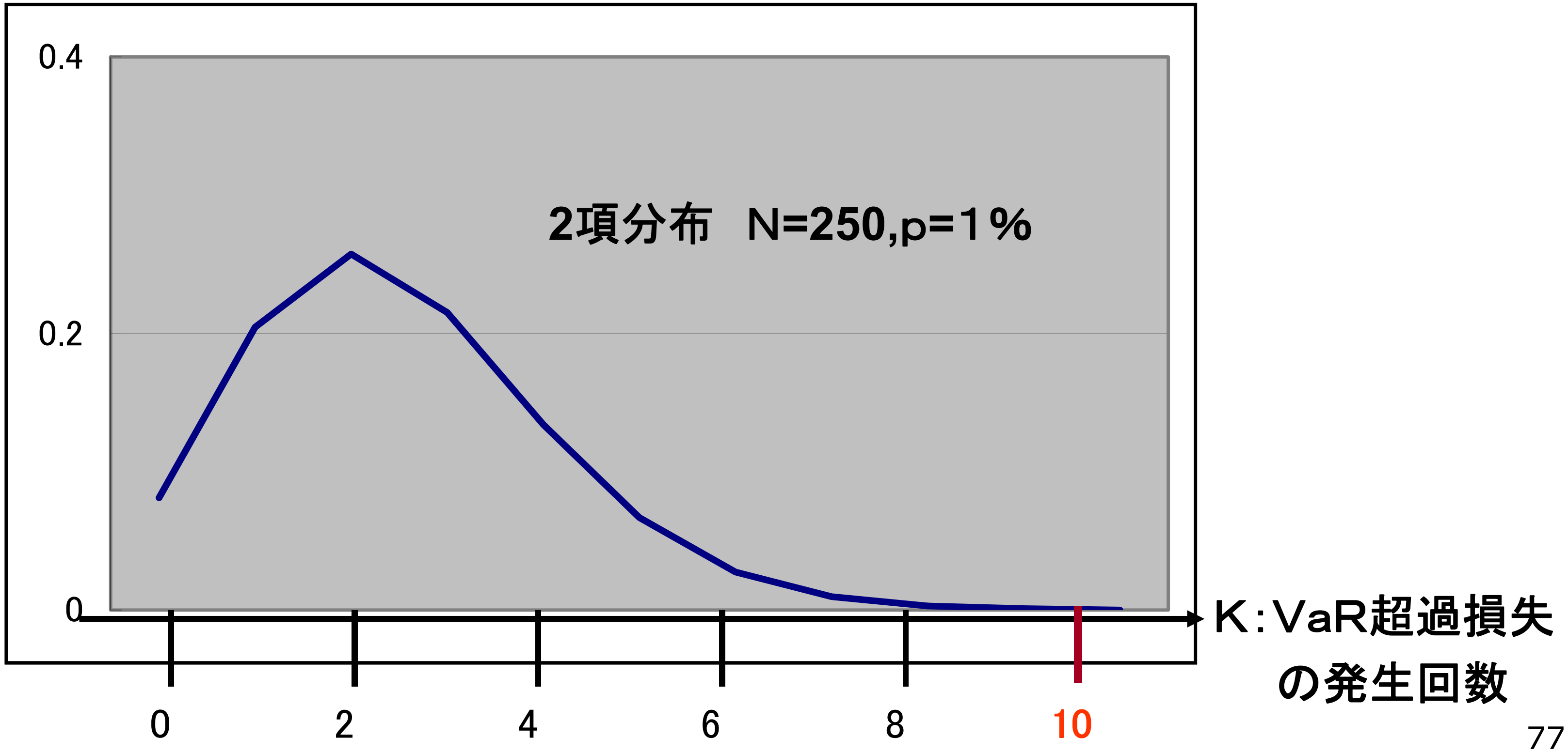
	超過回数	評　価
グリーン・ゾーン	0～4回 （2%未満）	モデルに問題がないと考えられる
イエロー・ゾーン	5～9回 （2%以上4%未満）	問題の存在が示唆されるが決定的ではない
レッド・ゾーン	10回以上 （4%以上）	まず間違いなくモデルに問題がある。

「マーケット・リスクに対する所要自己資本算出に用いる内部モデル・アプローチにおいてバックテスティングを利用するための監督上のフレームワーク」、1996年1月、バーゼル銀行監督委員会

VaRを超過する損失が発生する回数（K）とその確率

VaRを超過する確率　　p　＝　１％
VaRを超過しない確率　1－p ＝ 99%（信頼水準）
VaRの計測個数　　　　N＝250

発生確率　$f(K) = {}_{250}C_K\,(0.01)^K\,(0.99)^{250-K}$



バックテスト（２項検定）

観測データ数	250	N回
信頼水準	99%	
1－信頼水準	1%	p%

N回の観測で、K回、VaRを超過する確率

２項分布 $_{N}C_{K}\, p^{K}(1-p)^{N-K}$

VaR超過回数（K回）	確率	累積確率	VaR超過回数（K回以上）
0	8.11%	100.00%	0回以上
1	20.47%	91.89%	1回以上
2	25.74%	71.42%	2回以上
3	21.49%	45.68%	3回以上
4	13.41%	24.19%	4回以上
5	6.66%	10.78%	5回以上
6	2.75%	4.12%	6回以上
7	0.97%	1.37%	7回以上
8	0.30%	0.40%	8回以上
9	0.08%	0.11%	9回以上
10	0.02%	0.03%	10回以上
11	0.00%	0.01%	11回以上
12	0.00%	0.00%	12回以上
13	0.00%	0.00%	13回以上
14	0.00%	0.00%	14回以上
15	0.00%	0.00%	15回以上

バックテストは「検定」の考え方にしたがって行う。

- VaR計測モデルは正しい（帰無仮説）。

↓

- VaR超過損失の発生が、250回中、10回以上発生した。

↓

- VaR超過損失の発生が、250回中、10回以上発生する確率は0.03%と極めて低い。

↓

- VaR計測モデルは誤っている（結論）

分散共分散法・VaRの検証例

バックテストによるVaRの検証シート

【ポートフォリオ】

株式投信	100	億円
10年割引国債	100	億円
保有期間	10	日
信頼水準	99.00	%
観測データ	250	日

	東証TOPIX 10日間変化額	10年割引国債 10日間変化額	ポートフォリオ 10日間変化額	VaR（分散共分散法）			超過回数（超過1：範囲内：0）		
				株式投信	割引国債	ポート全体	7	4	6
2006/9/29	0.79	−0.10	0.69						
2006/9/28	1.19	0.01	1.20						
2006/9/27	0.32	0.18	0.50						
2006/9/26	−2.99	0.31	−2.68						
2006/9/25	−3.78	0.69	−3.10						
2006/9/22	−3.14	0.56	−2.58						
2006/9/21	−3.89	−0.09	−3.98						
2006/9/20	−5.04	0.29	−4.75						
2006/9/19	−3.54	−0.01	−3.55						
2006/9/15	−2.47	0.10	−2.38						
2006/9/14	−2.25	−0.20	−2.44	9.05	1.99	8.41	0	0	0
2006/9/13	−1.82	0.19	−1.63	9.04	2.00	8.40	0	0	0
2006/9/12	−1.87	0.40	−1.47	9.03	2.01	8.40	0	0	0
2006/9/11	−0.23	0.43	0.20	9.02	2.01	8.39	0	0	0
2006/9/8	0.01	0.12	0.12	9.02	2.03	8.40	0	0	0
2006/9/7	−0.59	1.18	0.59	9.02	2.05	8.40	0	0	0

ヒストリカル法・VaRの検証例

バックテストによるVaRの検証シート

【ポートフォリオ】

株式投信	100	億円
10年割引国債	100	億円

保有期間	10	日
信頼水準	99.00	%

観測データ	250	日

	東証TOPIX 10日間変化額	10年割引国債 10日間変化額	ポートフォリオ 10日間変化額	VaR(ヒストリカル法)			超過回数(超過1:範囲内:0)		
				株式投信	割引国債	ポート全体	9	5	12
2006/9/29	0.79	-0.10	0.69						
2006/9/28	1.19	0.01	1.20						
2006/9/27	0.32	0.18	0.50						
2006/9/26	-2.99	0.31	-2.68						
2006/9/25	-3.78	0.69	-3.10						
2006/9/22	-3.14	0.56	-2.58						
2006/9/21	-3.89	-0.09	-3.98						
2006/9/20	-5.04	0.29	-4.75						
2006/9/19	-3.54	-0.01	-3.55						
2006/9/15	-2.47	0.10	-2.38						
2006/9/14	-2.25	-0.20	-2.44	-8.43	-1.86	-7.77	0	0	0
2006/9/13	-1.82	0.19	-1.63	-8.43	-1.86	-7.77	0	0	0
2006/9/12	-1.87	0.40	-1.47	-8.43	-1.86	-7.77	0	0	0
2006/9/11	-0.23	0.43	0.20	-8.43	-1.86	-7.77	0	0	0
2006/9/8	0.01	0.12	0.12	-8.43	-1.86	-7.77	0	0	0
2006/9/7	-0.59	1.18	0.59	-8.43	-1.86	-7.77	0	0	0

バックテストの分析・活用

- バックテストにより、VaR超過損失の発生が判明したときはその原因・背景について、分析を行うのが重要。
- VaR超過損失の発生事例の分析により、

①ストレス事象の洗出しや、②VaR計測モデルの改善に繋げることができる。

VaR超過損失の発生原因・背景

- ストレス事象の発生
- ボラティリティの変化
  - VaR計測後、ボラティリティが増大
- 確率分布モデルの問題
  - 実際の確率分布が正規分布よりもファットテイル
- トレンド、自己相関がある
  - √T倍ルール*での近似に限界

    *VaR計測で保有期間を調整する手法のこと
- 観測データ数の不足
  - 観測データが不足すると、VaRは不安定化
- 観測期間が不適切
  - 遠い過去の観測データ(ボラティリティ小)の影響

- 本資料に関する照会先

日本銀行金融機構局金融高度化センター

企画役　碓井茂樹　CIA,CCSA,CFSA

Tel　03(3277)1886　E-mail shigeki.usui@boj.or.jp

- 本資料の内容について、商用目的での転載・複製を行う場合は予め日本銀行金融機構局金融高度化センターまでご相談ください。転載・複製を行う場合は、出所を明記してください。
- 本資料に掲載されている情報の正確性については万全を期しておりますが、日本銀行は、利用者が本資料の情報を用いて行う一切の行為について、何ら責任を負うものではありません。