

Working Paper Series

時系列モデルによるインフレ率予測誤差の分析

北川 源四郎（統計数理研究所）

川崎 能典（統計数理研究所）

Working Paper 01-13

2001年9月

日本銀行調査統計局

〒100-8630 東京中央郵便局私書箱 203 号

本論文の内容や意見は執筆者個人のものであり、日本銀行あるいは調査統計局の見解を示すものではありません。

時系列モデルによるインフレ率予測誤差の分析*

北川 源四郎[†]

川崎 能典[†]

概要

本稿では、時系列解析の立場から我が国の消費者物価指数の前年同期比伸び率がどの程度の精度で予測可能かを検討する。前半では多変量自己回帰モデルを用いた分析を報告する。ここでの分析は探索的なものであるが、予測性のある変数についてコンセンサスがでない状況下では、このような分析が有効であろう。後半では、観測不能要素モデルによる予測を試みる。この方法は、季節調整やトレンド推定に用いられる状態空間モデルを多変量に拡張したものと見なすことができるが、トレンド自体は個別に認める一方、トレンド周りの循環変動は各変数に共通すると仮定する。モデルとしてはやや強めの制約が置かれていると言えるが、この共通の循環変動は、フィリップス曲線やオーカンの法則といった、マクロ経済学における理論や経験則と対応づけながら、需給ギャップの迅速な推定を可能にすることから、経済理論に整合的な予測モデルの枠組みとして近年注目を浴びているものである。90年代に関しては、本稿の定式化の範囲では、多変量自己回帰モデルによるアウトサンプル予測精度の下限は、予測誤差の平方根平均二乗誤差で測って 0.45 程度、状態空間モデルで 0.6 程度となった。

キーワード: 長期予測, 多変量自己回帰モデル, 修正 AIC, 状態空間モデル, 観測不能要素モデル

1 はじめに

近年になってインフレ率の予測が重要性を増してきている背景には、先進諸国中央銀行の多くでインフレ率が金融政策の目標値として採用されていることが挙げられる。特に近年では、政策当局の説明責任の観点から、中央銀行がインフレ率に関してどのような見通しを持って金融政策を運営しているかに関心が集まるようになっており、我が国もそうした流れの中に位置づけられる。

本稿は時系列解析の立場から、特に二つの手法によって、我が国のインフレ率の予測がどの程度の精度で可能かを検討する。ここでのターゲットは、消費者物価指数の前年同期比伸び率である。第 2 章では、本稿の分析で用いるデータを示し、分析に先立って行った幾つかの事前処理などに関わる注意点を述べる。第 3 章では、多変量自己回帰モデルによる分析結果を報告する。多変量自己回帰モデル自体は、現代においては経済分析の標準的なツールのひとつになっており、様々なパッケージソフトウェア内でもごく簡単なコマンドで実行が可能になっている。しかしここでは、予測性のある変数を探索しながら解析を進めてゆく上で非常に便利であると思われる、統計数理研究所開発のプログラム MULMAR を改良して分析を行う。予測時点におけるデータの利用可能性など、実際上の制約を考えれば、インフレ予測の問題は本質的に長期予測の問題であり、本稿では長期予測の予測誤差を直接最小化する方法を中心に分析を行う。

第 4 章では、多変量状態空間モデルによる予測について、方法論的枠組みと予測結果を示す。ここで言う状態空間モデルとは、より狭義に定式化すれば、観測不能要素モデルであるとか、潜在変数モデルと呼ばれ

*2001 年 2 月 1 日初稿, 5 月 8 日改訂, 8 月 28 日改訂

[†]〒 106-8569 東京都港区南麻布 4-6-7 統計数理研究所

るものであり、1980年代に入ってから研究が進められ、現在でも広範な分野で応用されている。例えば潜在GDPとその周りの変動としてのGDPギャップ、というように、ある基準線を設けながら時系列を分解したいという要請は経済学に限っても事欠かないであろう。(例えばKuttner (1994) 参照。)

インフレ予測モデルのフレームワークとしては、物価変数の自己ラグと超過需要に対応する何らかの量(産出ギャップ)からモデルを構成するものが一般的であると思われる。この点を踏まえれば、もし産出ギャップを推定する方法として観測不能要素モデルが有効なのであれば、フレームワークを多変量に拡張して、産出ギャップを推定しつつそれがインフレ率の予測に反映される形式に発展させるのは、発想としては自然である。ただ、結論を先取りすれば、少なくとも今回の我々の分析では、多変量状態空間モデルでランダムウォークの精度を— 仮に上回るとしても — 劇的に改善するには至っていない。結果だけ見れば、第3章の多変量ARに基づくアプローチによる方が、純粋に予測誤差の観点からはすぐれたモデルを発見するに至る。が、そこで得られた変数等に関する知見が、当該予測期間の1990年代を超えて通用するものであるかについては一定の留保が必要だろう。

2 データセット

本稿の分析で用いたデータ系列を表1に掲げる。これら15変数をとりあえずの候補とするにあたって、事前の分析は行っていない。その意味では選択は恣意的であるが、後述するように時系列方向の長さが極めて限られていることを考えれば、無闇に多くの説明変数を採用できない。従って、この程度のデータセットから出発するのが適当であろう。分析に用いるデータ期間は、1981年第一四半期(Q1)から1999年第四四半期(Q4)までであり、90年代がアウトサンプル予測期間である。GDP以外は月次で取得したものを3ヶ月ごとに平均して四半期データに変換している。

予測ターゲットは消費者物価指数(除生鮮食料品、95年基準)の前年同期比伸び率である。まずCPIを月次で取得した後、消費税の導入(1989年4月)と引き上げ(1997年4月)の影響は事前に調整している。採用した方法は至って簡便である。すなわち、消費税導入(あるいは引き上げ)直前3月の前年比と導入(あるいは引き上げ)時4月の前年比が等しくなるようにレベルを調整している。それを3ヶ月ごとに平均して四半期データに変換した後、以下のように前年同期比伸び率(%換算)に変換する。

$$\Delta_4 \text{CPI}_n = 100 \times \frac{\text{CPI}_n - \text{CPI}_{n-4}}{\text{CPI}_{n-4}}, \quad n = 5, \dots, N$$

伸び率に換算する時点で最初の4点をデータの変換に使ってしまうため、実際には82年Q1からの72点が時系列方向の長さになる。

目的変数であるCPI伸び率については、変換によって季節性が除去されたと見なして分析を進めるが、他の系列に関して季節調整済系列が利用可能な場合はそちらを採用している。実際に予測を行うときの条件を考えれば季節変動の除去もプロシジャの一部として内生化されなければならないが、本稿ではそのような厳密な取り扱いを捨象している。もしモデルの中で有力な説明変数に、大きな季節変動を含む系列が採用された場合は、逐次的に季節性を除去しながら進むことで予測のパフォーマンスにどの程度の差異が生じるかを分析すべきであろう。

表 1: 分析に用いたデータ一覧と本稿における略称

	データ	略称
1	消費者物価指数 (除生鮮食料品)	CPI
2	実質国内総支出 (季調済)	GDP
3	有効求人倍率	求人倍率
4	完全失業率	失業率
5	付加価値ウェイト生産指数 (鉱工業)	IIP
6	稼働率 (製造工業)	稼働率
7	新設住宅着工戸数 (総計)	住宅着工
8	大型小売全業態販売額計	小売販売
9	建築受注 (民間計)	建築受注
10	公共工事請負額 (合計)	公共工事
11	全国勤労者世帯消費支出 (家用)	消費支出
12	広義流動性 (平残)	マネー
13	TOPIX 終値平均	TOPIX
14	長期プライムレート (貸出金利)	金利
15	円ドル為替レート (5 時月中平均)	為替

3 多変量自己回帰モデルによる予測

多変量自己回帰モデルは、80年代初頭から経済学においても頻繁に用いられるようになり、現在では標準的な分析ツールの位置を占めている。この種の線形モデルは、急速に発達した現代の計算機環境にあっては極めて推定が容易であり、様々なレベルの言語で実装が可能であるばかりか、計量経済分析を念頭に置いたソフトウェアパッケージの中には、プロシジャや関数があらかじめ用意されていることも少なくない。以下、場合によっては「自己回帰 (AutoRegressive)」の部分を AR と略し、多変量 AR モデルと記すことにする。

この章では、多変量 AR モデルによる分析結果を報告する。一口に多変量 AR モデルといっても様々な定式化があるので、3.1 節でモデルと推定法について説明し、アウトサンプル予測の結果は 3.2 節に報告する。方法論について記した 3.1.3 節から 3.1.5 節は、直交変換と最小二乗法、AIC によるモデル選択といういわばエッセンスだけを記してあるので、計算手順の詳細などを知るための参考文献をここで挙げておく。

本節の内容に沿った多変量 AR モデルの解説書としては、赤池・中川 (1972) の第 3 章、北川 (1993) の第 7 章、尾崎・北川 (1998) の第 10 章などが挙げられる。時系列データを利用した計量経済分析を念頭に網羅的に論点を解説したものとして Hamilton (1994) の第 11 章がある。Mills (1990) の第 14 章は必ずしも多変量 AR モデルのみに焦点を絞ったものではないが、多変量時系列モデルの経済学への応用例に富んでいる。理論中心にまとめられたテキストとしては Reinsel (1993) が挙げられる。

3.1 モデルと推定法

3.1.1 プログラム MULMAR

本稿の分析で用いるソフトウェアは、統計数理研究所のライブラリ TIMSAC 78(Akaike et al. (1979)) 所収の MULMAR (Multiple case of Minimum AIC method of AR fitting) である。MULMAR の特徴の第一は、同時応答 (instantaneous response) を考慮していることである。多変量 AR モデルの推定で重要なのは、各変数を駆動するイノベーション過程の同時点での相関を考慮したモデルを効率よく推定することである。いま観測値を表す k 次元ベクトルを $\mathbf{x}_n = (x_{n,1}, \dots, x_{n,k})^T$ と書き、次のような多変量 AR モデルを考える。

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{B}_0 \mathbf{x}_n + \mathbf{B}_1 \mathbf{x}_{n-1} + \dots + \mathbf{B}_m \mathbf{x}_{n-m} + \mathbf{w}_n \quad (1)$$

ここで \mathbf{B}_0 は対角線以上が全てゼロ成分の下三角行列、観測ノイズ \mathbf{w}_n は平均ゼロで分散共分散行列 $\Sigma_w = \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_k^2)$ の正規分布に従うとする。最小二乗法で (1) を推定し、両辺に $(\mathbf{I} - \mathbf{B}_0)^{-1}$ をかけることで、

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_{n-1} + \dots + \mathbf{A}_m \mathbf{x}_{n-m} + \mathbf{u}_n \quad (2)$$

を得る。ここで、 $\mathbf{A}_i = (\mathbf{I} - \mathbf{B}_0)^{-1} \mathbf{B}_i$ 、 $\mathbf{u}_n = (\mathbf{I} - \mathbf{B}_0)^{-1} \mathbf{w}_n$ である。この方法の利点は、 Σ_w の対角性から、まず (1) に基づいて個別の方程式で最適なモデルを選択しておき、次にそれらに基づいて方程式間の誤差相関を考慮した多変量モデル (2) を導けることにあり、全てのパラメータを同時に推定するより遙かに効率が良い。この方法は Akaike (1968) に遡ることができるが、経済学的観点からは、同時応答の箇所に経済理論と整合的な関係を盛り込めることから、80 年代半ば過ぎから構造型 VAR (Structural VAR、例えば Bernanke (1986) を参照) として用いられることとなった。こちらのほうがよりなじみ深いという人向けに説明すれば、本稿で採用するモデルは、構造型 VAR における下三角型の特定化と理解して良い。

MULMAR のもうひとつの特徴は、最小 AIC となるラグの前後で変数を加える・削除する作業を繰り返し、より小さい AIC を達成するモデルを自動的に探索することである。前述の同時応答モデリングによって方程式ごとに推定が可能になったことから説明変数ごとに個別にラグの選択を行えるが、それだけでなく、目的変数ごとに個別に最適なラグを選択することが可能なのである。ただし、変数や最大ラグを固定した下で可能な組み合わせを総当たりで探索するのではなく、初期段階で推定されたモデルをベースに部分探索を繰り返してよりよいモデルに到達する方法であることに注意が必要である。

3.1.2 MULMAR, MULMAR4

伸び率に換算された消費者物価指数を CPI_n と表すとき、通常の変量 AR の枠組みで推定されるモデルは

$$\text{CPI}_n = \sum_{j=1}^m \mathbf{a}_j \mathbf{x}_{n-j} + \varepsilon_n \quad (3)$$

と表される。ただしここで、 $\mathbf{x}_{n-j} = (x_{n-j,1}, \dots, x_{n-j,k})^T$ 、 $\mathbf{a}_j = (a_{j1}, \dots, a_{jk})$ である。(すなわち \mathbf{a}_j はラグ j における係数行列から第 1 行を取り出したものである。) 3.1.3 節以下に述べるように、誤差項正規分布の仮定の下では、上記モデルの最尤推定は最小二乗推定と同等であるから、このモデルは一期先予測の良さに対応している。

ところで、分析結果を報告する節で再述するが、実際に求められている予測は、各四半期の足下における1期先予測(あるいは4期先予測)である。上のモデルを利用するのであれば、1期先予測を4回繰り返すことになる¹。便宜上このモデルを、その推定法と同一視して、本稿内ではMULMARと言及することにする。一方、直接4期先予測モデルを与えることもできる。

$$\text{CPI}_n = \sum_{j=1}^m a_j x_{n-3-j} + \varepsilon_n \quad (4)$$

このように定式化すると、単一方程式回帰の問題に帰着し、同時応答表現にこだわる必要はなくなるが、変数の自動選択の観点から依然MULMARを用いるメリットがある。上の呼び方に習って、この方式を本稿ではMULMAR4と呼び、更に8期先予測モデルを推定する手続きをMULMAR8と呼ぶことにする。

3.1.3 回帰モデルとAIC最小化法

以下の3小節では、MULMAR, MULMAR4の推定法の基礎的事項を一般的な定式化でまとめてある。鏡映変換を利用した最小二乗推定について知識のある読者は、3.1.5節の修正AICの利用だけに注意して、分析結果に進まれても良い。

y_n を目的変数、 x_{n1}, \dots, x_{nm} を説明変数とする回帰モデル

$$y_n = \sum_{i=1}^m a_i x_{ni} + \varepsilon_n \quad (5)$$

の推定の問題を考えることにする。ただし、 a_i は回帰係数、 m は次数で、残差 ε_n は平均0、分散 σ^2 の正規分布に従う独立な確率変数と仮定する。ここで、未知パラメータを $\theta = (a_1, \dots, a_m, \sigma^2)^T$ と表すことにする。 N 組の観測値 $\{y_n, x_{n1}, \dots, x_{nm}\}$, ($n = 1, \dots, N$) が与えられたとき、回帰モデルの対数尤度は

$$\ell(\theta) = -\frac{N}{2} \log 2\pi\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=1}^N \left(y_n - \sum_{i=1}^m a_i x_{ni} \right)^2 \quad (6)$$

で与えられる。これより、 σ^2 の最尤推定値は

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left(y_n - \sum_{i=1}^m a_i x_{ni} \right)^2 \quad (7)$$

となる。さらに、これを(6)式に代入すると対数尤度は

$$\ell(a_1, \dots, a_m) = -\frac{N}{2} \log 2\pi\hat{\sigma}^2 - \frac{N}{2} \quad (8)$$

となる。したがって、回帰モデルのパラメータの最尤推定値は最小二乗法によって求められる。

¹ 多変量時系列の一要素にしか関心がない場合であっても、このように多重ステップで1期先予測を繰り返す場合は、同時応答表現に基づく推定が有利である。なぜなら、予測値をもって予測を繰り返すような場合には、各目的変数ごとにできるだけ精度の良いモデルを用意しておく必要があるからである。例えば、全ての説明変数について同一のラグを選択し、イノベーションの誤差相関を無視し、各方程式を自己回帰分布ラグモデルとして個別に推定して寄せ集めたようなシステムでは、高精度の動的予測は一般に期待できないだろう。

また, m 次の回帰モデルに含まれるパラメータは a_1, \dots, a_m および σ^2 の $m+1$ 個であることから, その AIC は

$$\begin{aligned} \text{AIC}_m &= -2 \ell(\hat{\theta}) + 2 (\text{パラメータ数}) \\ &= N(\log 2\pi\hat{\sigma}_m^2 + 1) + 2(m+1) \end{aligned} \quad (9)$$

で与えられる.

3.1.4 ハウスホルダー法による最小二乗法

ここで, N 次元ベクトル \mathbf{y} と $N \times m$ 行列 \mathbf{Z} を

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1m} \\ x_{21} & \cdots & x_{2m} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{N1} & \cdots & x_{Nm} \end{bmatrix} \quad (10)$$

$\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m)^T$, $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)^T$ と定義すると回帰モデルは

$$\mathbf{y} = \mathbf{Z}\mathbf{a} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (11)$$

と簡潔に記述できる. 最小二乗法の評価関数は

$$\sum_{n=1}^N \left(y_n - \sum_{i=1}^m a_i x_{ni} \right)^2 = \|\mathbf{y} - \mathbf{Z}\mathbf{a}\|_N^2 = \|\boldsymbol{\varepsilon}\|_N^2 \quad (12)$$

と表現できる. ただし, $\|\mathbf{y}\|_N$ は N 次元ベクトル \mathbf{y} のユークリッドノルムを表す.

\mathbf{U} を任意の $N \times N$ 直交行列とすると,

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{Z}\mathbf{a}\|_N^2 = \|\mathbf{U}(\mathbf{y} - \mathbf{Z}\mathbf{a})\|_N^2 = \|\mathbf{U}\mathbf{y} - \mathbf{U}\mathbf{Z}\mathbf{a}\|_N^2 \quad (13)$$

が成り立つので $\|\mathbf{U}\mathbf{y} - \mathbf{U}\mathbf{Z}\mathbf{a}\|_N^2$ を最小にするベクトル \mathbf{a} と $\|\mathbf{y} - \mathbf{Z}\mathbf{a}\|_N^2$ を最小にする \mathbf{a} とは同一である. これは, 回帰係数ベクトル \mathbf{a} の最小二乗解を求めるためには, まず適当な直交変換によって $\mathbf{U}\mathbf{Z}$ を都合の良い形に変形してから (13) を最小とするベクトル \mathbf{a} を求めれば良いことを示している.

(13) の関係に基づく最小二乗法の解法はハウスホルダー変換を利用して次のように効率良く実現することができる. まず説明変数行列 \mathbf{Z} の右側に目的変数ベクトル \mathbf{y} を付加して $N \times (m+1)$ 行列

$$\mathbf{X} = [\mathbf{Z} \mid \mathbf{y}] \quad (14)$$

を作る. この行列 \mathbf{X} に適当なハウスホルダー変換 \mathbf{U} を適用すると次のような上三角行列 \mathbf{S} に変形できる.

$$\mathbf{U}\mathbf{X} = \mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1m} & s_{1,m+1} \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & s_{mm} & s_{m,m+1} \\ & & & s_{m+1,m+1} \\ & \mathbf{O} & & \end{bmatrix} \quad (15)$$

このとき、 S の $1 \sim m$ 列は UZ に、また $m+1$ 列は Uy に対応するので

$$\begin{aligned}
& \|Uy - UZa\|_N^2 \\
&= \left\| \begin{bmatrix} s_{1,m+1} \\ \vdots \\ s_{m,m+1} \\ s_{m+1,m+1} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1m} \\ & \ddots & \vdots \\ & & s_{mm} \\ & 0 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \right\|_N^2 \\
&= \left\| \begin{bmatrix} s_{1,m+1} \\ \vdots \\ s_{m,m+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1m} \\ & \ddots & \vdots \\ & & s_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \right\|_m^2 + s_{m+1,m+1}^2 \quad (16)
\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで最右辺の第 2 項 $s_{m+1,m+1}^2$ は a の値に依存せず一定の値をとる。したがって、第 1 項を最小すなわち 0 とするベクトル $a = (a_1, \dots, a_m)^T$ が最小二乗解となる。これは a の最小二乗推定値が一次方程式

$$\begin{bmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1m} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & s_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{1,m+1} \\ \vdots \\ s_{m,m+1} \end{bmatrix} \quad (17)$$

の解として求められることを示している。(17) の一次方程式は左辺の行列が上三角形なので後退代入により簡単に解くことができる。また $s_{m+1,m+1}^2$ が残差ベクトルの長さの 2 乗を与えるので m 次の回帰モデルの残差分散 σ^2 の推定値は

$$\hat{\sigma}_m^2 = \frac{s_{m+1,m+1}^2}{N} \quad (18)$$

によって求められる。

3.1.5 AIC 最小化法と有限標本修正

(15) の上三角行列 S が求められると m 次の回帰モデルだけでなく、それ以下の次数の回帰モデルをすべて求めることができる。すなわち、 $j \leq m$ のとき、 x_{n1}, \dots, x_{nj} を説明変数とする j 次の回帰モデル

$$y_n = \sum_{i=1}^j a_i x_{ni} + \varepsilon_n \quad (19)$$

の残差分散の推定値および AIC は

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_j^2 &= \frac{1}{N} \sum_{i=j+1}^{m+1} s_{i,m+1}^2 \\
\text{AIC}_j &= N(\log 2\pi \hat{\sigma}_j^2 + 1) + 2(j+1) \quad (20)
\end{aligned}$$

によって計算できる．また，その回帰係数を推定するためには一次方程式

$$\begin{bmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1j} \\ & \ddots & \vdots \\ & & s_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{1,m+1} \\ \vdots \\ s_{j,m+1} \end{bmatrix} \quad (21)$$

を解けばよい．

AIC を用いて次数選択を行なうためには， AIC_0, \dots, AIC_m を (20) によって求め，最小の値をとる次数を探せばよい．ここで注目すべきことは，いったん上三角行列 S が求まると，回帰係数の推定を行なうまでもなく (20) によってすべての次数の AIC がただちに計算できることである．したがって，三角行列 S さえ求めれば，ほとんど付加的な計算なしにすべての次数のモデルの残差および AIC を求めることができる．なお，ここでのモデル選択には有限標本を考慮した修正版 AIC を用いる．すなわち，推定すべき自由パラメータの数を m とすると，通常の AIC

$$AIC = -2 \times (\text{最大対数尤度}) + 2m$$

によってモデル選択を行うのではなく，データ数 N とパラメータ数 m の両方に依存させて

$$CAIC = -2 \times (\text{最大対数尤度}) + \frac{N}{N - m - 2} 2m$$

としてモデル選択を行う (Sugiura (1978), Hurvich and Tsai (1989))．多変量 AR モデルの自動変数選択を行う場合は，限られたデータ数に対し，ときに多くのパラメータをあてはめることになる．このような場合には推定値が不安定になり，AIC が導出過程で根拠としている漸近理論の妥当性が危うくなるので，単純に AIC 最小化法を適用した結果には注意が必要である．

3.2 予測結果

本節では MULMAR, MULMAR4 によるアウトサンプル予測の結果を報告する．1981 年 Q1 から 1989 年 Q4 までのデータを使って 4 期先予測モデルを推定し，1990 年 Q4 を予測する．データが追加されるごとに，予測の足下と予測時点を 1 時点ずらし，1998 年 Q4 から 1999 年 Q4 を推定するまでの 37 時点が予測評価区間になる．

3.2.1 8 変数による分析

まず本節では，説明変数の候補を広めにとってモデル選択し，修正 AIC 最小化法によって選ばれたモデルを外挿して予測をした場合の予測精度について報告する．推定に用いることができるデータは時系列方向に 72 時点しかないため，多くの候補変数を採用すればラグ構造を極端に浅くしなければならなくなる．従ってここでは，CPI, 求人倍率, 失業率, 稼働率, 小売販売, 公共工事, 金利, 為替の 8 変数のラグ付き変数の中から説明変数を選ぶことを考える．データが少ないところではラグを 2 とし，ある程度データ数が確保できるところでラグを 3 に切り替えることとする．分析方法は以下の 2 通りを考える．

- 1 期先予測誤差を最小化するモデルで 4 期先を予測 (MULMAR)

表 2: MULMAR, MULMAR4 による予測の精度

モデル	MSE	RMSE	Bias	MAD
MULMAR	1.539	1.240	0.158	0.903
MULMAR4	0.771	0.878	-0.618	0.722
Random Walk	0.520	0.721	-0.405	0.620

- 4 期先予測誤差を最小化するモデルで予測 (MULMAR4)

MULMAR その他は本来単にプログラムコードの名前であるが、ここではモデルや予測手続きと同一視して記述する。

さて、CPI は伸び率に変換しているため非定常性は除去されたと考えるとしても、他の変数については何らかの事前処理が必要である。そこで、アウトサンプル予測において、説明変数については利用可能な最新時点までその都度トレンド補正を行っている。すなわち、いま説明変数の一つを $a_t (t = 1, \dots, T)$ と書くと、 $d = (a_T - a_1)/T$ によって $\tilde{a}_t = a_t - a_1 - dt$ と補正する。(目的変数である CPI 伸び率については、トレンド補正を行わない。)

トレンド補正の後、全変数について最新時点まで平均を除去する。CPI の予測の観点からすれば、予測の足下で算出した平均的伸び率が 4 期後もその値を保つと仮定し、その周りの変動を時系列モデルで捉えて予測を行うことになる。

先に述べた 8 変数で MULMAR, MULMAR4 を適用した予測結果のおおまかなまとめが表 2 である。表中の MSE は平均二乗誤差 (Mean Squared Error), RMSE は MSE の平方根 (Root Mean Squared Error), Bias は平均的な偏り, MAD は平均絶対偏差 (Mean Absolute Deviation) を表す。アウトサンプル予測のプロットは図 1 に示されている。4 期先の予測を考えるならば、1 期先予測モデルを外挿するよりも、4 期先予測の意味で最適なモデルを選んだ方がよい、という極めて自然な結果になっている。

図 1 は、左右でスケールを統一してあるが、MULMAR による予測が 93 年 4Q において大きく下にはずれているため、全体として縦につぶれたようなグラフになっているので注意されたい。MULMAR 法で 92 年 4Q に推定されたモデルは、周囲の時点と比べると採用された説明変数の数が多く、何らかの理由で過剰適合 (overfitting) が生じたところで長期の外挿を行い、結果として予測が悪くなった可能性がある。

さて、ここで最も問題なのは、MULMAR4 においてすらランダムウォークモデルの RMSE を下回ることができないことである。MULMAR4 によって推定されたモデルの誤差分散はおおむね 0.3 程度であり、RMSE にすれば 0.54 程度の精度は期待してもいいはずであるが、アウトサンプル予測では RMSE が 0.87 程度の精度でしかない。図 1 右側のパネルで明らかのように、MULMAR4 による予測値は概して大きめに与えられており、この期間の物価の下降傾向を追い切れていない。結果として平均的なバイアスは非常に大きな値となっている。MSE からバイアスの寄与度を除去すれば、誤差分散は約 0.39、平方根をとれば 0.62 程度となり、理論値に近い値が得られる。

従って、ここでの分析をベースにモデルを改良する一案としては、局所的にトレンドに追従するようなメカニズムを組み込むことが考えられる。しかし、近傍数点で傾きを計算するなど、かなりアドホックな手法に頼らざるを得なくなるので、手法としての汎用性を欠くことになりがちである。

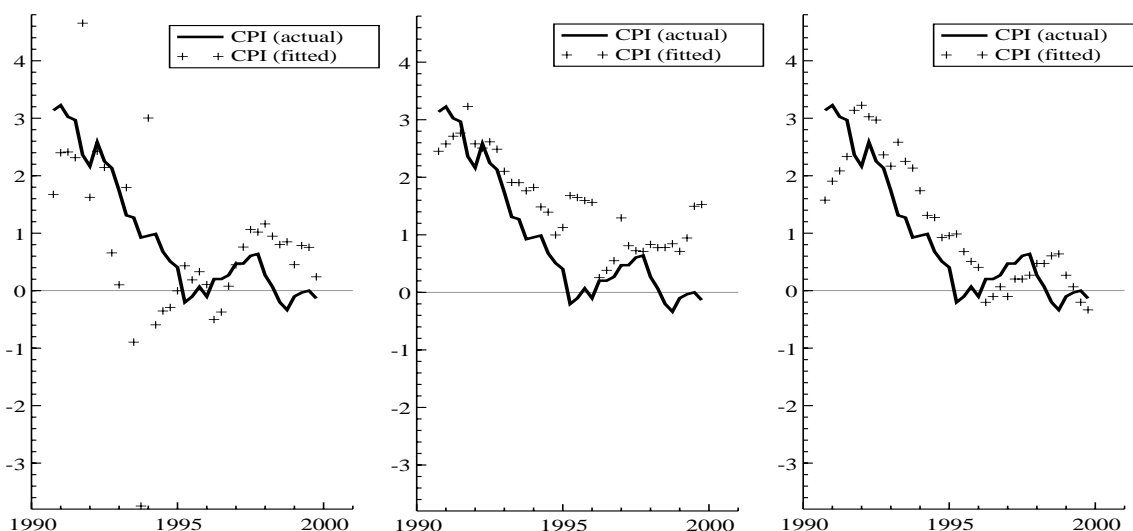


図 1: (左)MULMAR による予測, (中)MULMAR4 による予測, (右) ランダムウォークモデルによる予測

3.2.2 4 変数総当たりによる 4 期先予測

変数候補を広めにとった場合の分析結果では、比較的多くの変数(ラグ)が採用されている。回帰の誤差分散は小さいものの 4 期先予測は非常に悪く、修正 AIC を用いたにもかかわらず過剰適合が避けられていないという印象がある。

従って、モデルをフィットした段階での誤差分散(理論値)や CAIC のみから判断するのではなく、アウトサンプルでの予測誤差分散(経験値)を当該予測区間で小さくするような変数の組み合わせを、ごく少数(ここでは 4 変数)に絞って、総当たりで探索した。

CPI 伸び率自身の自己回帰項は必ず候補に含めることとして、残り 3 変数を上限に全探索を行った。当該予測区間で平均二乗誤差(MSE, Mean Squared Error)が小さかった順に上位 20 組を示したのが表 3 である。表の中で階差と括弧書きしてある変数は、1 階階差を示す。表 3 の見方について注意しておく、例えば最も MSE が小さかったモデルは、CPI, 有効求人倍率, TOPIX, 住宅着工の 1 階差分、の 4 変数からなるものであった。これらの変数は単に候補であって、モデル自体は MULMAR4 の自動選択により毎回変わる可能性がある。その意味では、4 変数からなるモデルというより、4 変数のラグ付き変数から生成されるモデル群、と言ったほうが正確である。従って、各時点でこれらの変数の全てが使われるわけではないことに注意されたい。なお、各予測時点でどの変数のどのラグが選択されたかについては、ここでは報告していない。

表 3 より明らかなように、説明変数として有効求人倍率と TOPIX が高頻度で選ばれている。上位 20 組を構成する変数は、有効求人倍率, TOPIX, 住宅着工件数, 鉱工業生産指数, 完全失業率, 公共工事請負額, 消費, 小売販売額, GDP の 9 変数(階差のヴァリエーションも考慮すれば 11 変数)である。

近年のインフレ予測研究では、失業率と物価の関係(フィリップス曲線)を利用することによる精度向上(の当否)が論点として再び脚光を浴びている。(例えば Stock and Watson (1999) など。) MULMAR4 による我々の分析結果でも、有効求人倍率(トレンド残差, 階差とも)と完全失業率(階差)が予測性の高い変数

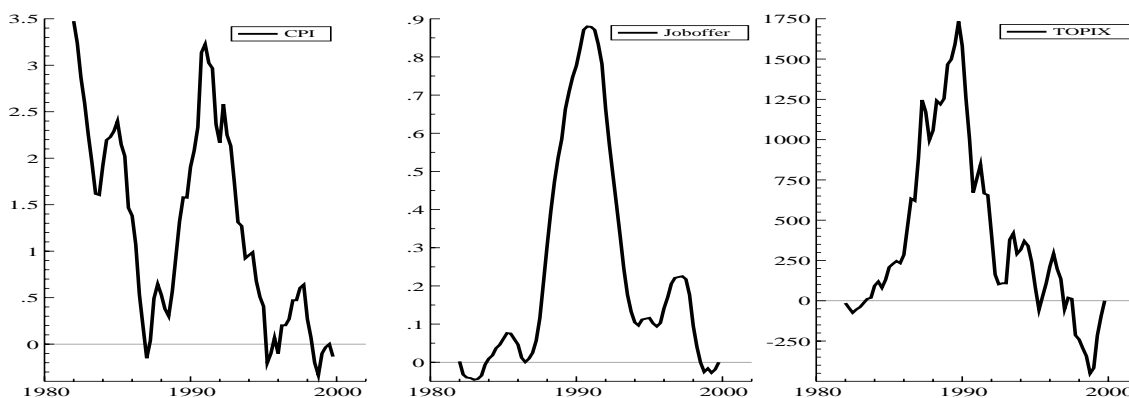


図 2: (左)CPI 前年同期比, (中)トレンド補正後の有効求人倍率, (右)トレンド補正後の TOPIX

表 3: MULMAR4 アウトサンプル予測結果

順位	説明変数			MSE	RMSE
1	求人	TOPIX	住宅着工 (階差)	0.1960	0.4427
2	求人	TOPIX	TOPIX(階差)	0.2004	0.4477
3	IIP	TOPIX	求人 (階差)	0.2059	0.4538
4	求人	TOPIX	失業率 (階差)	0.2092	0.4574
5	求人	TOPIX	公共工事 (階差)	0.2107	0.4590
5	求人	TOPIX	消費 (階差)	0.2107	0.4590
7	求人	失業率 (階差)	小売販売 (階差)	0.2131	0.4616
7	求人	失業率 (階差)	消費 (階差)	0.2131	0.4616
7	求人	GDP(階差)	失業率 (階差)	0.2131	0.4616
10	求人	失業率 (階差)	住宅着工 (階差)	0.2137	0.4623
10	求人	失業率 (階差)	TOPIX(階差)	0.2137	0.4623
12	求人	TOPIX	GDP(階差)	0.2154	0.4641
13	TOPIX	求人 (階差)	失業率 (階差)	0.2178	0.4667
13	TOPIX	求人 (階差)	GDP(階差)	0.2178	0.4667
13	TOPIX	求人 (階差)	公共工事 (階差)	0.2178	0.4667
16	TOPIX	求人 (階差)	住宅着工 (階差)	0.2220	0.4712
17	求人	求人 (階差)	失業率 (階差)	0.2221	0.4713
18	求人	求人 (階差)	TOPIX(階差)	0.2233	0.4725
18	求人	TOPIX	求人 (階差)	0.2238	0.4731
20	求人	GDP(階差)	小売販売 (階差)	0.2242	0.4735

として頻繁に選ばれている。

TOPIX(トレンド残差, 階差とも)については, グラフから判断すれば, 少なくとも当該予測期間に限っては, TOPIXの動きはCPI伸び率に対して先行性を持っているとの印象を与える。(図2を参照。)このことは, 株価は将来の景気動向を織り込んで決まっている, と素直に解釈してよいだろう。

ベストモデルのアウトサンプル予測結果を図3左にプロットしてある。このベストモデルの予測バイアス(実現値から予測値を差し引いたものの平均)は -0.25116 であるが, 上位にランクされたモデル10組のうち9組まで, バイアスは -0.21 から -0.26 の範囲に集中している。これは, 扱っている予測期間ではインフレ率は総じて下降傾向にあるため, 長期予測がインフレ率を過大に推計している傾向が生じていると考えるのが自然であろう。その中で, 唯一平均バイアスの小さかった(0.02184)のが, 第3位にランクされた, IIP・TOPIX・有効求人倍率(階差)による予測である。これだけは若干予測値の動きが別である。(図3右のパネルを参照。)ちなみに, 予測期間を過去にもう3期伸ばせば, このモデルが経験的RMSEを最小にする。従って, どの組み合わせがベストというよりは, 上位7位程度までは同程度の予測能力を持っていると考えた方がよいだろう。

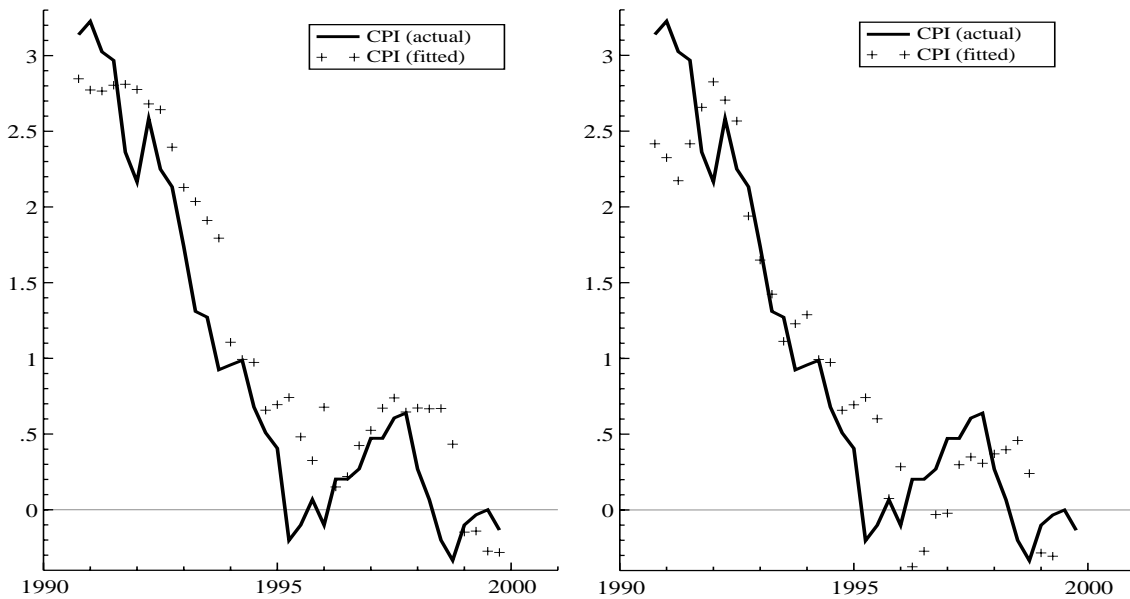


図3: MULMAR4によるアウトサンプル予測, (左)CPI・求人倍率・TOPIX・住宅着工(階差)による予測, (右)CPI・IIP・TOPIX・求人倍率(階差)による予測

第1位にランクされたモデルを例に, 推定された係数の時間推移を描いたのが図4である。既に述べたように, どの変数も毎回使用されるとは限らない。ここでは便宜上, 選択されなかった時点の係数はゼロとにおいて, CPIの1次ラグ項, 求人倍率の1次ラグと2次ラグ項, TOPIXの1次ラグ項について推定値をプロットしてある。TOPIXに対する係数だけは1000倍した上で表示している。CPIの1次ラグ項は予測期間を通じて必要であるのに加えて, 前半ではTOPIXの貢献が大きく, 後半では有効求人倍率のラグ付き変数が予測に有効な変数になっていることがわかる。

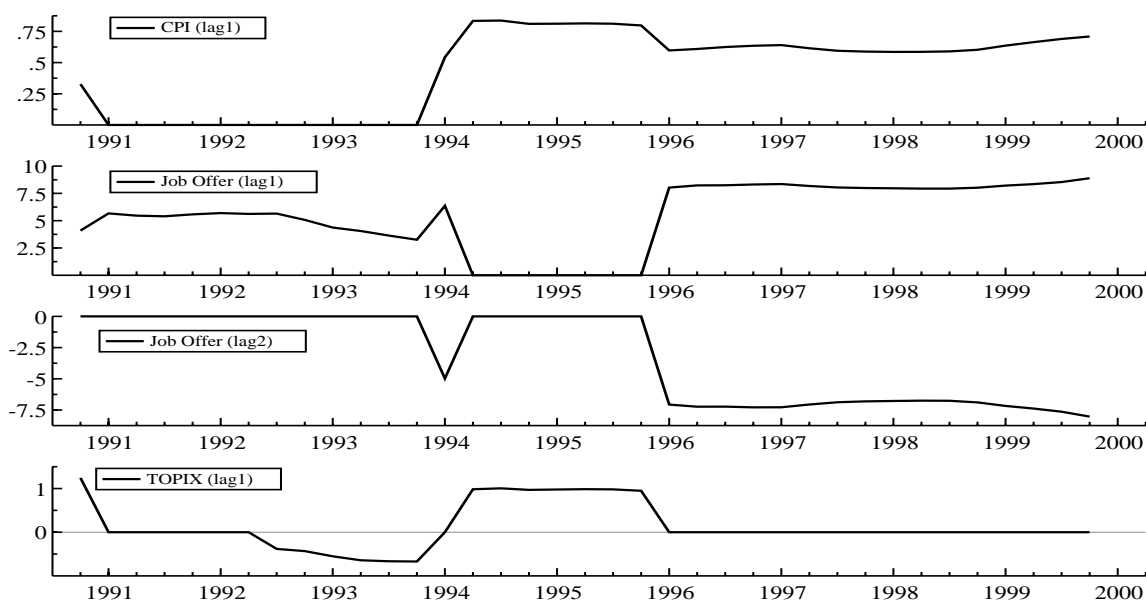


図 4: CPI・求人倍率・TOPIX・住宅着工 (階差) による MULMAR4 の係数, 上から順に CPI の 1 次ラグ項, 求人倍率の 1 次ラグと 2 次ラグ項, TOPIX の 1 次ラグ項

図 3 の 2 つのモデルによる予測誤差に関して, ヒストグラム, その平滑化, そして正規分布に対する QQ プロットを示したのが図 5 である. ヒストグラムの平滑化 (図中実線) は正規分布型カーネル平滑化法を用いた. CPI・求人倍率・TOPIX・住宅着工 (階差) によるモデルから得られる予測誤差のほうには若干分布に歪みが見られるが, 裾の厚い分布を仮定する必要はなさそうである. これらの QQ プロットから判断する限り, 正規分布を仮定して分析を進めてよいだろう.

3.2.3 4 変数総当たりによる 8 期先予測

同様にして 8 期先 (つまり 2 年先) 予測モデルで, アウトサンプル予測の精度の良いものを調べることができる. 4 期先予測と同様, 89 年 Q4 で 91 年 Q4 を予測し, 以降 99 年 Q4 まで 33 時点の 8 期先予測を行う. この期間におけるランダムウォークモデルの MSE は 1.011, RMSE は 1.006 である.

結果は表 4 にまとめられている. 4 期先予測では頻りに選ばれていた有効求人倍率がほとんど選ばれなくなり, 稼働率, 建築受注といった変数の階差系列の重要性が増している. 特に稼働率の 1 階差分は, 上位 7 位までのモデル群全てに含まれている. 数字だけを眺めると, 2 年先の予測の割には精度がよいような印象を持つ. しかし, 予測精度は当該期間で一様でないことが, 図 6 から見て取れる. 予測期間の前半は比較的精度はよいものの, 後半は概して高めの予測値になっている. TOPIX が頻りに選ばれていることと, 図 2 から判断して, 4 期先予測のとき同様に 8 期先予測においても TOPIX の変動の先行性が前半の予測のよさに貢献していると考えられる. しかし後半においては, 4 期先予測での求人倍率ほどには予測の共変量として有効なものが発見できない.

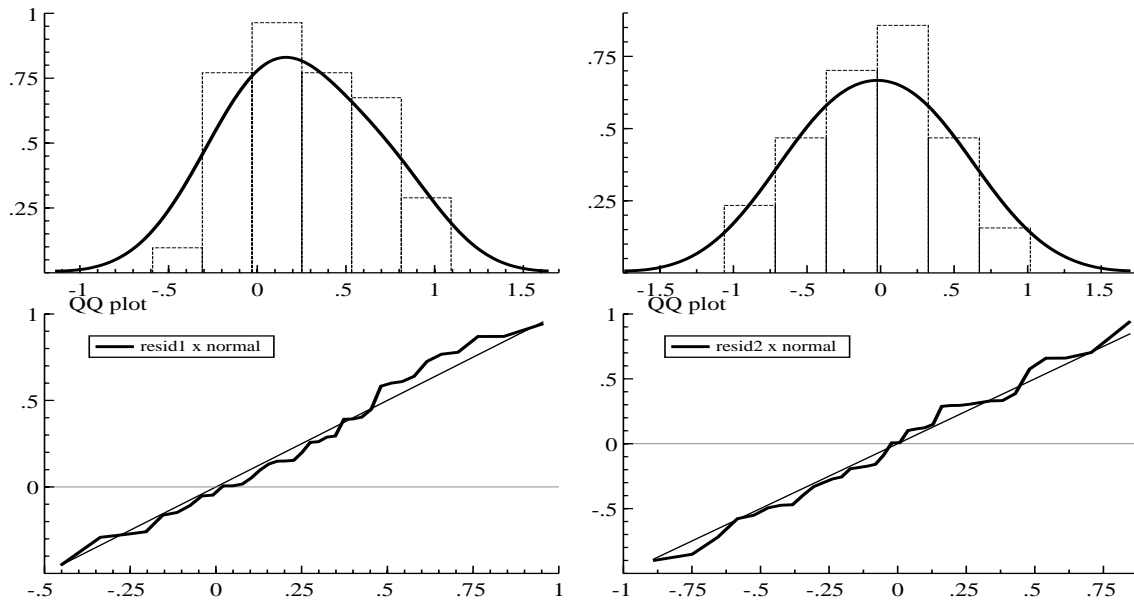


図 5: (左上) CPI・求人倍率・TOPIX・住宅着工(階差)による予測誤差のヒストグラムとその平滑化, ならびに QQ プロット(左下)。(右上) CPI・IIP・TOPIX・求人倍率(階差)による予測誤差のヒストグラムとその平滑化, ならびに QQ プロット(右下)



図 6: MULMAR8 によるアウトサンプル予測, CPI・TOPIX・稼働率(階差)・消費(階差)による予測

表 4: MULMAR8 アウトサンプル予測結果

順位	説明変数		MSE	RMSE	
1	TOPIX	稼働率 (階差)	消費 (階差)	0.5742	0.7578
2	TOPIX	IIP(階差)	稼働率 (階差)	0.5827	0.7633
3	TOPIX	稼働率 (階差)	公共工事 (階差)	0.5835	0.7639
4	TOPIX	稼働率 (階差)	建築受注 (階差)	0.5942	0.7708
5	TOPIX	失業率 (階差)	稼働率 (階差)	0.6046	0.7776
6	TOPIX	稼働率 (階差)	小売 (階差)	0.6094	0.7806
7	TOPIX	GDP(階差)	稼働率 (階差)	0.6196	0.7871
8	稼働率	TOPIX	IIP(階差)	0.6319	0.7949
9	TOPIX	GDP(階差)	失業率 (階差)	0.6499	0.8062
10	TOPIX	失業率 (階差)	消費 (階差)	0.6594	0.8120
11	稼働率	TOPIX	稼働率 (階差)	0.6597	0.8122
12	TOPIX	失業率 (階差)	建築受注 (階差)	0.6648	0.8154
13	TOPIX	IIP(階差)	建築受注 (階差)	0.6676	0.8171
14	TOPIX	GDP(階差)	IIP(階差)	0.6693	0.8181
15	TOPIX	IIP(階差)	公共工事 (階差)	0.6739	0.8209
16	TOPIX	失業率 (階差)	公共工事 (階差)	0.6780	0.8234
17	TOPIX	IIP(階差)	消費 (階差)	0.6790	0.8240
18	TOPIX	IIP(階差)	小売 (階差)	0.6873	0.8290
19	TOPIX	失業率 (階差)	IIP(階差)	0.6897	0.8305
20	稼働率	TOPIX	求人 (階差)	0.7002	0.8368

4 多変量状態空間モデルによる予測

本節では1変量時系列の季節調整を目的に実装されたプログラム `Decomp` を拡張した多変量時系列を個別トレンドと共通 AR 成分に分解するモデルを提案し、そのモデルに基づく4期先予測の結果を報告する。`Decomp` 自体は、統計数理研究所のプログラムライブラリ `TIMSAC84` (Akaike et al. (1985)) に収められた、季節調整を念頭に作成されたプログラムソースコードの名前であるが、その枠組みは季節調整に限らず広範な応用可能性を持つものである (Kitagawa (1981))。ある観測値 (時系列) を複数の構成要素に分解したいとすると、各時点における各構成要素がパラメータとなり、通常は観測値の数倍のパラメータを想定することになる。このとき各構成要素の時間変化にモデルを与えることは、オリジナルな意味でのパラメータに対し事前分布を与えることに等しく、その事前分布の拘束の強さをデータから事後的に最尤法で決める。このとき尤度計算に用いられる逐次公式がカルマンフィルタであり、その前提となるモデルの表現形式が状態空間モデルである。

本節で扱うモデルは、状態空間モデルの枠内ではやや特化したモデルで、時に観測不能要素モデル (un-observed component model) であるとか潜在変数モデル (latent variable model) と言及されることがある。インフレ予測の観点からこの種のモデルが注目される理由はいくつかある。インフレ予測モデルの多くは、物価自体の自己回帰効果プラス何らかの景気循環変動を表す変数、という定式化である。方程式の右辺の超過需要 (産出ギャップ) として失業率の自然失業率からの乖離を考えれば、フィリップス曲線に従った定式化ということになるのだが、これまでのところ米国同様日本においても失業率が産出ギャップの適切な指標であるとは結論できないようである。なによりギャップを定義するための基準線を引くのは容易ではなく、速報性と安定性を確保するのも極めて困難なようである。(福田・慶田 (2001) に簡潔に議論がまとめられている。)

一方、観測不能要素モデルは、トレンドと定常変動というように、経済時系列を安定的な成長経路とその周りでの循環変動に分解するのに適した枠組みである。例えば GDP (一変量時系列) に `Decomp` をあてはめて得られる定常成分の山谷は、機械的な操作の産物であるにも関わらず、非常にリーズナブルな推定を与える。

ここでの目的は、多変量 AR モデルとは枠組みこそ異なるものの、インフレ予測に役立つ需給ギャップの推定値が観測不能要素モデルの枠内で探し出せるか、そのときの予測の精度はどの程度かを探索的に調べることにある。

4.1 MTCAR モデル

状態空間モデルにもとづく季節調整法の、ひとつの実装として `Decomp` が提案されている (北川 (1986))。この方法では、時系列 y_n をトレンド成分、季節成分、曜日効果項、観測ノイズの4項に分解できるが、本稿では、特殊な場合として

$$y_n = t_n + p_n + w_n \quad (22)$$

というモデルを考えることにする。ここで、 t_n はトレンド、 p_n は自己回帰モデルに従う定常変動成分、 w_n は不規則成分で白色雑音と仮定する。

以下では2変数の非定常時系列 y_{n1}, y_{n2} に対して、それらが以下のように、個別のトレンドと共通の AR

成分を持つと仮定した MTCAR(Multiple Trends Common AR, 個別トレンド共通 AR) モデルを想定する .

$$\begin{aligned} y_{n1} &= t_{n1} + c_1 p_n + w_{n1} \\ y_{n2} &= t_{n2} + c_2 p_n + w_{n2} \end{aligned} \quad (23)$$

ただし, t_{n1}, t_{n2} は個別のトレンドで, k 次のランダムウォーク (確率差分方程式モデル)

$$\Delta^k t_{nj} = u_{nj}, \quad u_{nj} \sim N(0, \tau_j^2), \quad (j = 1, 2) \quad (24)$$

に従うものと仮定する . 一方, p_n は二つの変数に共通の定常変動成分で, m 次の自己回帰モデル

$$p_n = \sum_{i=1}^m a_i p_{n-i} + u_{n0}, \quad u_{n0} \sim N(0, \tau_0^2) \quad (25)$$

に従うものと仮定する .

以下では, 状態空間モデルを利用して未知パラメータの推定, 推定されたモデルにもとづく各成分への分解や予測の方法を示す . モデル (23), (24), (25) は状態ベクトル \mathbf{x}_n , システムノイズベクトル \mathbf{v}_n および行列 $\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}$ を適当に定義することによって, 状態空間表現

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_n &= \mathbf{F} \mathbf{x}_{n-1} + \mathbf{G} \mathbf{v}_n \\ \mathbf{y}_n &= \mathbf{H} \mathbf{x}_n + \mathbf{w}_n \end{aligned} \quad (26)$$

が得られる . 簡単な場合として, テンドの次数 k が 1, 自己回帰の次数 m が 2 の場合に具体的に示すと

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} t_{n1} \\ t_{n2} \\ p_n \\ p_{n-1} \end{bmatrix} \\ \mathbf{H} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 1 & c_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_n = \begin{bmatrix} u_{n1} \\ u_{n2} \\ u_{n0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_n = \begin{bmatrix} w_{n1} \\ w_{n2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (27)$$

となる . 更にここで $\text{var}(\mathbf{v}_n) = \mathbf{Q}$, $\text{var}(\mathbf{w}_n) = \mathbf{R}$ と記すことにしよう .

4.2 パラメータ推定, 成分分解, 予測

状態空間モデルを利用すると, MTCAR モデルに含まれる未知パラメータの最尤推定値を求めることができる . まず, 観測値 $\mathbf{Y}_j \equiv \{y_1, \dots, y_j\}$ が与えられたときの状態 \mathbf{x}_n の推定値, すなわち平均 $\mathbf{x}_{n|j}$ および分散共分散行列 $\mathbf{V}_{n|j}$ がカルマンフィルタ

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{n|n-1} &= \mathbf{F} \mathbf{x}_{n-1|n-1} \\ \mathbf{V}_{n|n-1} &= \mathbf{F} \mathbf{V}_{n-1|n-1} \mathbf{F}^T + \mathbf{G} \mathbf{Q} \mathbf{G}^T \end{aligned} \quad (28)$$

この表現において上記の H の代わりに

$$\mathbf{H}^* = \left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & c_2 \end{array} \right] \quad (33)$$

を用いると $y_{n+3|n-1} = \mathbf{H}^* \mathbf{x}_{n|n-1}$ によって時系列 y_n の 4 期先予測値が得られる。

さらに、この表現を利用すると

$$\begin{aligned} y_{n1} &= t_{n1} + c_1 p_n + w_{n1} \\ y_{n2} &= t_{n2} + c_2 p_{n-\ell} + w_{n2} \end{aligned} \quad (34)$$

のように一方の成分に対して AR 成分が先行するモデルを表現することができる。ただし、 ℓ が 4 以上の場合には状態の次元をさらに上げておく必要がある。この長期予測モデルの 4 期先予測尤度は、

$$\begin{aligned} p(\mathbf{y}_n | \mathbf{Y}_{n-4}) &\sim N(\mathbf{y}_{n|n-4}, \mathbf{r}_{n|n-4}) \\ \mathbf{y}_{n|n-4} &= \mathbf{H}^* \mathbf{x}_{n-3|n-4} \\ \mathbf{r}_{n|n-4} &= \mathbf{H}^* \mathbf{V}_{n-3|n-4} \mathbf{H}^{*T} + \mathbf{R} \end{aligned} \quad (35)$$

によって

$$\sum_{n=4}^N \log p(\mathbf{y}_n | \mathbf{Y}_{n-4}) \quad (36)$$

と定義される。

4.4 予測結果

4.4.1 1 期先予測と長期予測

通常の 1 期先予測尤度に基づく 4 期先予測の結果が表 5 に、4 期先予測尤度を構成して 4 期先予測を行った結果が表 6 にまとめられている。いずれも想定したトレンドの次数は 1 次である。表中の σ^2 は、毎期の推定で得られた誤差分散を予測期間にわたって平均したものである。

表 5 には、一見してランダムウォークの精度 (RMSE=0.72) を上回るモデルは見あたらないが、長期予測モデルを利用した場合 (表 6) は、少なくともランダムウォークと同程度と見なせる変数が幾つかある。予測のバイアスが一貫してマイナスに (つまり予測値自体は高めに) 出ているが、これは当該予測期間では概して下り坂というデータ自身の傾向と、前期の値をそのまま予測値とする 1 階差分モデルの特徴を考え合わせれば自然な結果である。

これを 2 階差分にした場合の結果が表 7 である。2 階の差分モデルを採用すれば局所的には直線あてはめが行われる。従って、追従すべき変数の動きが安定的であるときには誤差は少ないが、その代償として転換点で大きな予測誤差を生じてしまうため、結果的には RMSE の値は悪化している。

表 5 から表 7 に報告された RMSE の値は、ランダムウォークと同程度の精度を達成するのがやっとであるが、これは共通の循環変動が同時に 2 変数に作用すると仮定している (つまり (34) 式において $\ell = 0$ としている) ことを考えれば、さほど不思議ではない。この枠組みで我々が期待することは、GDP や失業率など共変量とみなせる時系列のトレンド周りの循環成分として取り出された系列が、何期か遅れて 物価の変動を説明することだからである。

表 5: 1 期先予測尤度で推定したモデルによる 4 期先予測結果

変数	MSE	RMSE	σ^2	偏差
GDP	0.59	0.77	0.20	-0.36
求人倍率	0.72	0.85	0.24	-0.28
失業率	0.56	0.75	0.21	-0.25
IIP	0.57	0.75	0.24	-0.22
稼働率	0.74	0.86	0.23	-0.22
住宅着工	0.64	0.80	0.16	-0.23
小売販売	0.58	0.76	0.20	-0.33
建築受注	0.65	0.81	0.26	-0.19
公共工事	0.52	0.72	0.23	-0.22
消費支出	0.55	0.74	0.21	-0.29
マネー	0.60	0.78	0.19	-0.37
TOPIX	0.53	0.73	0.25	-0.19
金利	0.59	0.77	0.23	-0.28
為替	0.56	0.75	0.24	-0.29

表 6: 4 期先予測尤度によって推定したモデルによる 4 期先予測結果

変数	MSE	RMSE	σ^2	偏差
GDP	0.55	0.74	0.60	-0.26
求人倍率	0.71	0.84	0.69	-0.32
失業率	0.53	0.73	0.63	-0.23
IIP	0.58	0.76	0.66	-0.20
稼働率	1.00	1.00	0.69	-0.31
住宅着工	0.63	0.79	0.69	-0.23
小売販売	0.54	0.73	0.62	-0.25
建築受注	0.63	0.79	0.70	-0.26
公共工事	0.51	0.71	0.61	-0.24
消費支出	0.53	0.73	0.62	-0.24
マネー	0.56	0.75	0.60	-0.28
TOPIX	0.62	0.79	0.68	-0.22
金利	0.76	0.87	0.58	-0.41
為替	0.52	0.72	0.61	-0.30

表 7: 2 次のトレンドモデルによる 4 期先予測結果

変数	MSE	RMSE	σ^2	偏差
GDP	0.72	0.85	0.65	0.07
求人倍率	1.63	1.28	0.80	-0.16
失業率	0.74	0.86	0.80	-0.04
IIP	1.75	1.32	0.77	-0.08
稼働率	1.73	1.32	0.84	-0.18
住宅着工	0.78	0.88	0.85	-0.12
小売販売	0.63	0.80	0.69	0.01
建築受注	1.31	1.14	0.87	-0.20
公共工事	0.64	0.80	0.69	-0.04
消費支出	0.58	0.76	0.64	0.00
マネー	0.69	0.83	0.73	-0.17
TOPIX	0.81	0.90	0.86	-0.09
金利	0.81	0.90	0.66	-0.18
為替	0.53	0.73	0.72	-0.09

4.4.2 ラグ付き共通 AR 成分による分解・予測

トレンドの次数を 1 次に戻して、共通 AR 成分がラグを伴って CPI に影響を与えるように定式化し、そのラグの位置をさまざまに変えてみた結果が表 8 である。一年遅れの近辺で、RMSE が大きく改善されているケースが散見される。例えば、有効求人倍率、稼働率、プライムレート（貸出金利）などの RMSE は、MULMAR4 で達成された水準からすると見劣りはするが、少なくともランダムウォークよりよい精度になっている。一方、GDP、失業率、住宅着工、公共工事、消費支出、マネーサプライなど、ラグを変えても RMSE にあまり変化の見られない系列は、MTCAR の枠組みで共通 AR がうまく抽出できていない可能性がある。

RMSE で改善のあった例を中心に、個別トレンドの推定値と産出ギャップの推定値がどのように得られているかを図示しておこう。モデルのハイパーパラメータの推定値は表 9 に掲げておいた。いずれも第 1 変数は CPI であり、表には第 2 変数名のみが記されている。

図 7 は、CPI と有効求人倍率の組み合わせで、共通 AR 成分が CPI に作用する時のラグを 5 期と指定して推定した MTCAR モデルから得られる結果を描画したものである。左側はそれぞれ CPI と求人倍率の実測値（太線）に個別トレンドのフィルタ平均（細点線）を重ねたもの、右側は同様にして平滑化平均を実測値に重ねたものである。一番下の 2 枚のパネルの左が、共通 AR 成分のフィルタ平均、右が平滑化平均である。

図 8 は、CPI とプライムレート（貸出金利）の組み合わせで、同様にラグ 5 で推定した結果のプロットである。多少の違いはあるが、有効求人倍率で得られた共通 AR 成分とフィルタ・平滑化ともに類似性が認められる。

図 9 は、CPI と稼働率の組み合わせで、同様にラグ 5 で推定した結果のプロットである。RMSE の値が

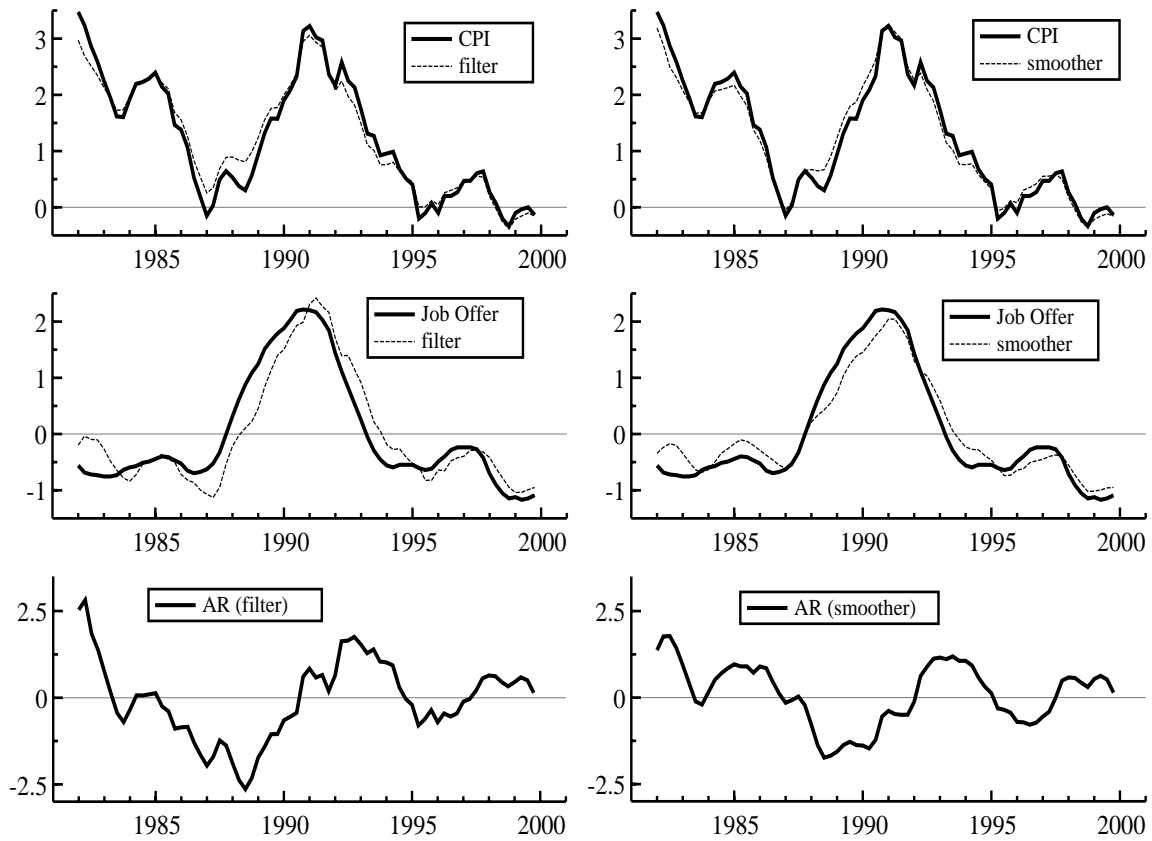


図 7: CPI と有効求人倍率による MTCAR モデル, ラグは 5 期

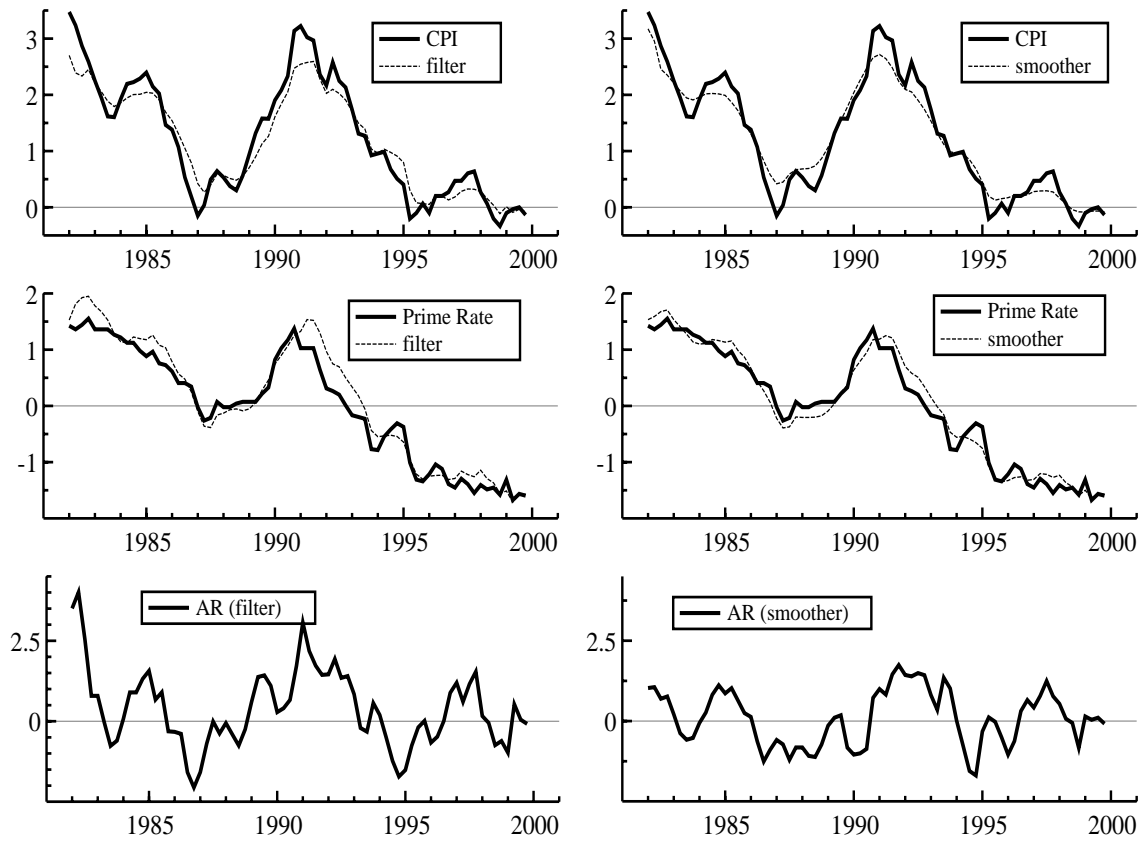


図 8: CPI と貸出金利による MTCAR モデル, ラグは 5 期

表 8: 遅れ時間を変化させたときの RMSE

変数	0期	1期	2期	3期	4期	5期	6期
GDP	0.74	0.74	0.74	0.75	0.74	0.75	0.76
求人倍率	0.84	0.86	0.82	0.76	0.66	0.63	0.78
失業率	0.73	0.73	0.73	0.73	0.73	0.73	0.73
IIP	0.76	0.83	0.85	0.83	0.79	0.98	0.80
稼働率	1.00	0.99	0.97	0.90	0.72	0.65	0.77
住宅着工	0.79	0.80	0.79	0.81	0.77	0.77	0.80
小売販売	0.73	0.73	0.73	0.73	0.76	0.74	0.74
建築受注	0.79	0.79	0.78	0.80	0.70	0.70	0.78
公共工事	0.71	0.71	0.67	0.71	0.71	0.70	0.70
消費支出	0.73	0.72	0.73	0.72	0.73	0.72	0.73
マネー	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.76
TOPIX	0.79	0.78	0.73	0.79	0.71	0.79	0.78
金利	0.87	0.87	0.91	0.88	0.66	0.60	0.68
為替	0.72	0.69	0.73	0.87	0.86	0.80	0.79

らは予測精度は比較的良く、産出ギャップの推定値の動きも図7、図8と似通っている。しかし、稼働率の個別トレンドとして推定された値は、フィルタにせよ平滑化にせよ不自然であり、無理に共通 AR 成分を抽出したしわ寄せを被っているという印象を与える。単純に予測の善し悪しを表す指標に注目しただけでは、状態の推定まで合理的にできているかどうかの判断がつきにくいところが、MTCAR モデルによるアプローチの難点かもしれない。とはいえ、周辺化された尤度で推論を行う以上は、観測されない変数に望ましさの基準を与えるのは難しいであろう。

図10は、第2変数に GDP を取ったときの結果である。CPI の個別トレンドとしては、データ追従型ではなく直線に近いものが推定されており、共通 AR 成分は単にそこからの乖離にすぎないことがわかる。しかも、GDP のフィルタ平均・平滑化平均は実測値と殆ど重なっており、共通 AR 成分にかかる係数は極めてゼロに近い(表9を参照)。すなわち、CPI と GDP の組み合わせでは共通 AR 成分の抽出は失敗しており、事実上 CPI に対して一変量の Decomp をあてはめて予測しているのに等しい。

図11は、同じく第2変数に GDP を取って個別トレンドに対するモデルを2階の差分にしたときの状態変数をプロットしたものである。(共通 AR 成分にラグは持たせていない。)このモデルの予測能力は、既に表7に示したように高くはないが、平滑化の観点からはやや見るべきものがある。1階の差分モデルはデータに対する追従性が高いので、図10では GDP のフィルタ平均も平滑化平均も観測値に殆ど重なり合っている。一方図11では、より強い平滑化制約の効果で潜在 GDP とその周りでの GDP ギャップという解釈を施しやすい結果となっている。

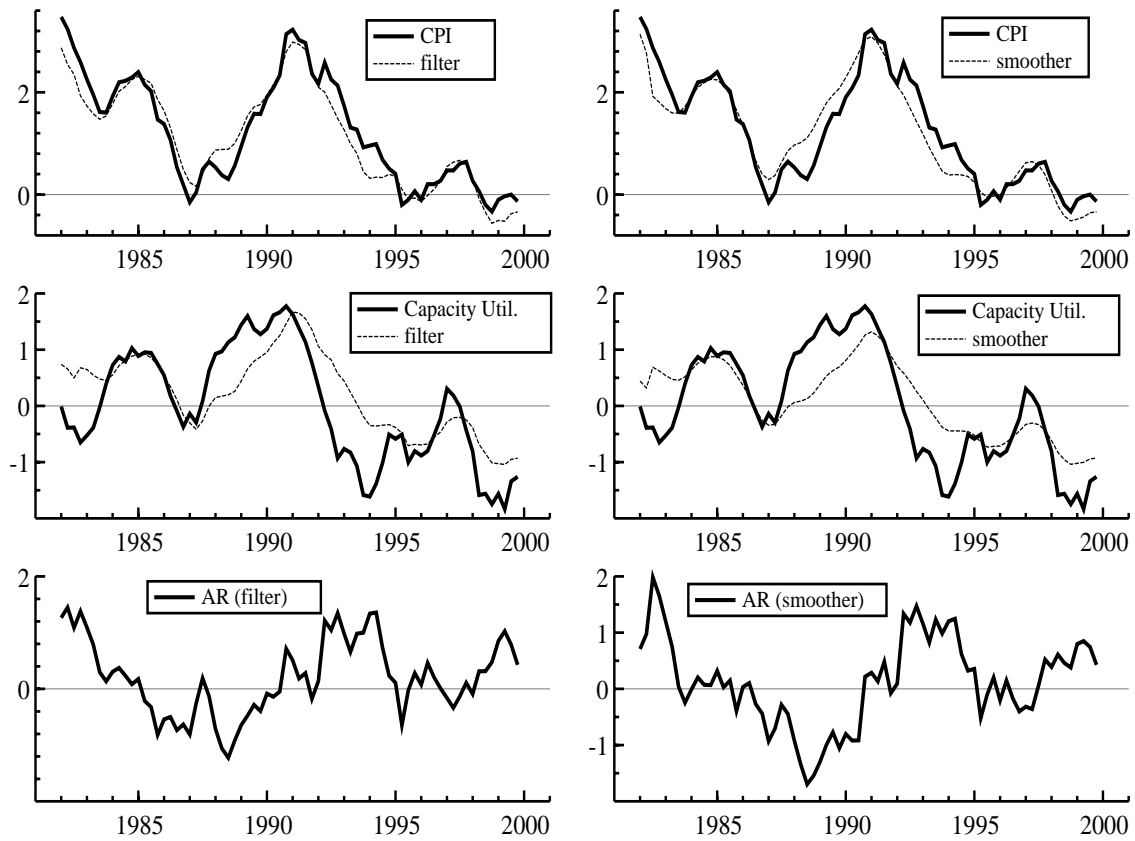


図 9: CPI と稼働率による MTCAR モデル, ラグは 5 期

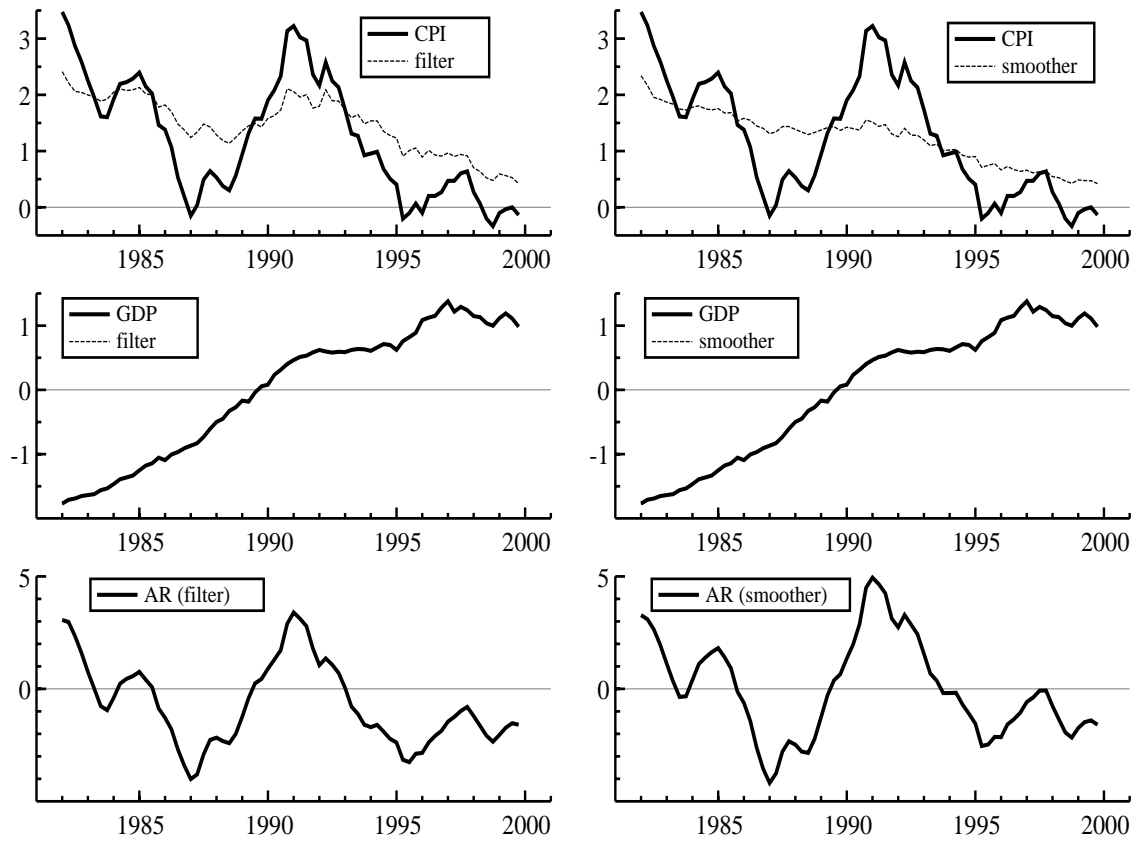


図 10: CPI と GDP による MTCAR モデル, ラグは 4 期

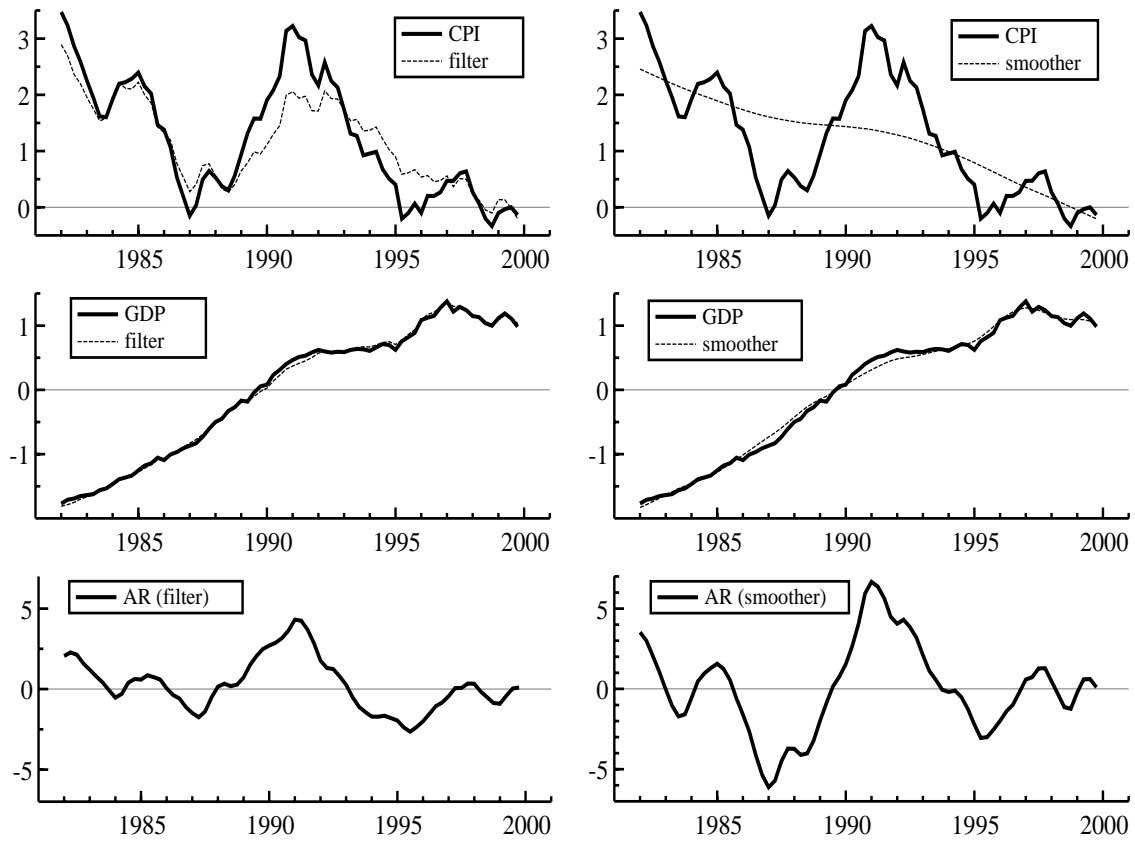


図 11: 階差モデルを 2 階にした CPI と GDP による MTCAR モデル, ラグはなし

表 9: 推定されたハイパーパラメータ

	求人倍率	貸出金利	稼働率	GDP	GDP(2 階差)
τ_1^2	0.58×10^{-1}	0.15×10^{-1}	0.40×10^{-2}	0.55×10^{-1}	0.98×10^{-2}
τ_2^2	0.58×10^{-1}	0.15×10^{-1}	0.40×10^{-2}	0.55×10^{-1}	0.98×10^{-2}
σ_1^2	0.11×10^{-1}	0.35×10^{-1}	0.21×10^{-5}	0.91×10^{-2}	0.12×10^{-4}
σ_2^2	0.88×10^{-5}	0.21×10^{-8}	0.17×10^{-1}	0.10×10^{-7}	0.20×10^{-8}
AR(1)	1.638	1.689	1.562	1.470	1.803
AR(2)	-0.913	-0.949	-0.896	-0.548	-0.918
c_1	0.190	0.206	0.477	0.344	0.025
c_2	-0.393	-0.259	-0.996	-0.007	-0.015
対数尤度	-129.51	-102.21	-145.99	-74.15	-69.22
AIC	275.01	220.41	307.98	164.31	154.44

4.4.3 枠組みの拡張可能性

本稿で試みた範囲では、多変量 AR モデルから探索的に得られるモデルのほうがよりよい予測精度を達成したわけだが、本節で提示した多変量状態空間モデルによるアプローチはその潜在的な可能性からすれば、部分的な実装にすぎない。本節を閉じるにあたってモデルの拡張可能性を議論しておくことで、今後この分野におけるモデリングや実証研究の展開に資するところがあればと期待する次第である。

まず最初に指摘しておくべき論点は、共通 AR 過程の次数が十分かどうかということと、観測方程式で AR 成分からの影響を考慮する際にもっと多くのラグ変数 — 例えば 5 期前のみに限るのではなく 1 期前から 5 期前まですべて — からのフィードバックを認めるべきかどうか、の 2 点であろう。これらの観点からすれば、本稿で用いられた枠組みは非常に限られたものである。このようなシンプルなモデリングの背景には、観測不能な変数と、観測方程式におけるその係数とを同時推定しなければならないため、未知パラメータが非線形に絡み合っているという事実がある。このような場合にモデルの自由度を高く取ると、数値的最適化は不安定になりがちである。この点に鑑みれば、状態空間モデルの枠組みでの拡張性を追求することも大切であるが、まず何らかの方法で産出ギャップ系列の推定値を得てからモデリングを行うような二段階法から得られる知見も積極的に援用してゆく必要がある。

もうひとつ別の論点は、今回の予測ターゲットである CPI 前年同期比伸び率のグラフを眺めていれば自然に考えつくことである。CPI 伸び率は、転換点さえわかれば、途中は素直な線形モデルと仮定して問題ない構造になっている。このような場合は、スイッチングモデルの適用が考えられる。すなわち、データが上昇局面にあるのか下降局面にあるのかでモデルを切り替えるのである。このような研究としては Kim and Nelson (1998, 1999) が挙げられる。

しかし、景気の転換点についての議論は、事後的に利用可能なあらゆる情報を使って転換点の精密な推定を試みるという、いわば平滑化の立場からの分析が主であり、スイッチング型のモデルを予測に用いることは、現在のところ積極的には試みられてはいない。予測が成功するかどうかの鍵は、スイッチングモデルを使うか否かというよりは、有効な先行指標を発見できるか否かにかかるところが大きいからである。スイッチングモデルの枠組みで分析を押し進めるのなら、好況・不況を表す潜在変数の系列に対し先行的な

情報を持つ状態変数の構築を目指すことになり、必然的にモデルに使われる系列や状態変数の数は大きくなるだろう。

一方、転換点以外の構造が単純なことを最大限利用するのであれば、一変量モデルであっても、転換点周辺での損失を最小限に食い止めるような経験則を自己発見しながら予測分布を修正していくモデルを構築することは可能である。ただし、このようなモデルは、仮に経験的 RMSE の意味で他のモデルを凌駕したとしても、多変量 AR モデル以上に解釈を付与しにくいものであることは間違いないだろう。

5 まとめ

多変量 AR モデルと、個別トレンド共通 AR モデルという、2種類のモデルで 1990 年代の我が国のインフレ率（消費者物価指数，対前年同期比伸び率）の長期予測を試みた。多変量 AR モデルでは、通常の 1 期先予測を複数回繰り返して長期予測を実現する方法と、直接 4 期先予測モデルを利用する方法との両方を試みた。推定すべきパラメータ数に比べてデータが少ないことから、通常の AIC 最小化法の代わりに最小 CAIC 法でモデル選択を行った。インサンプルの精度と比べると、実際のアウトサンプル予測はバイアスが大きく、誤差分散の理論値を大きく上回ってしまい、ランダムウォークよりも予測精度が悪化する。そこで、予測に用いる変数の数を 4 つに絞って、その 4 変数について部分回帰モデル流に探索的な解析を行った結果、RMSE が 0.45 近辺となるモデルがいくつか存在することがわかった。予測に有効な変数としては、有効求人倍率、TOPIX を中心に 9 変数程度が挙げられる。同様のロジックで 8 期先（2 年先）モデルを探索すると、有効求人倍率の重要性は薄れて、代わりに稼働率の階差系列が重要な位置を占める。8 期先予測モデルでの RMSE の下限は 0.76 で、同様の精度を示す対抗的なモデルは、4 期先予測の場合より少ない。

個別トレンド共通 AR モデルの枠組みでは、産出ギャップがどの程度の遅れをもってターゲットに影響しているかを特定することで、予測性のあるモデルを構築することが可能である。この枠組みでの RMSE の下限は、少なくとも我々が行った定式化の範囲では、0.6 程度であった。ただし、予測の指標値が良好なケースであっても、必ずしもリーズナブルな状態変数が得られていない場合や、推定された産出ギャップが事実上一変量時系列の分解から得られたものに過ぎない場合があるので注意が必要である。

謝辞 2000 年 9 月 21 日に日本銀行調査統計局において開催された「インフレ予測誤差に関するワークショップ」における口頭報告に対してコメントを下された方々と、初稿にコメントをお寄せ下さった匿名の査読者の方々に感謝致します。本稿の作成にあたり、粕谷宗久氏（日本銀行調査統計局）との議論から多くの有益な示唆を頂きました。また、真木和彦氏（日本銀行調査統計局）からはデータと文献の取得に関して迅速な支援を頂きました。ここに記して感謝致します。

参考文献

- [1] Akaike, H., (1968) On the Use of A Linear Model for the Identification of Feedback Systems, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **20**(3), 425–439.
- [2] 赤池弘次, 中川東一郎 (1972) *ダイナミックシステムの統計的解析と制御*, サイエンス社.

- [3] Akaike, H., G. Kitagawa, E. Arahata and F. Tada (1979) *TIMSAC78*, Computer Science Monographs, No. 11, The Institute of Statistical Mathematics, Tokyo.
- [4] Akaike, H. et al. (1985) *TIMSAC84 Part-1*, Computer Science Monographs, No. 22, The Institute of Statistical Mathematics, Tokyo.
- [5] Bernanke, B. S. (1986) Alternative Explanations of the Money-Income Correlation, *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, **25**, 49–100.
- [6] 福田慎一, 慶田昌之 (2001) インフレ予測に関する実証分析の展望 — フィリップス曲線の日本における予測力を中心に, 日本銀行調査統計局, Working Paper Series, *forthcoming*.
- [7] Hamilton, J. D. (1994) *Time Series Analysis*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- [8] Hurvich, C. M. and C. L. Tsai (1989) Regression and Time Series Model Selection in Small Samples, *Biometrika*, **76**, 297–307.
- [9] Kim, C.-J. and C. R. Nelson (1998) Business cycle turning points, a new coincident index and tests of duration dependence based on a dynamic factor model with regime switching, *Review of Economics and Statistics*, **80**, 188–201.
- [10] Kim, C.-J. and C. R. Nelson (1999) *State-space models with regime switching*, Cambridge, MA, MIT Press.
- [11] Kitagawa, G. (1981) A Nonstationary Time Series Model and Its Fitting by A Recursive Filter, *Journal of Time Series Analysis*, **2**(2), 103–116.
- [12] 北川源四郎 (1986) 時系列の分解 – プログラム DECOMP の紹介 – , *統計数理*, **34**(2), 255–271.
- [13] 北川源四郎 (1993) 時系列解析プログラミング, 岩波書店.
- [14] Kuttner, K. N. (1994) Estimating Potential Output as a Latent Variable, *Journal of Business and Economic Statistics*, **12**(3), 361–368.
- [15] Mills, T. C. (1990) *Time Series Techniques for Economists*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [16] 尾崎 統, 北川源四郎 (編著) (1998) 時系列解析の方法, 朝倉書店, 東京.
- [17] Reinsel, G. C. (1993) *Elements of Multivariate Time Series*, Springer-Verlag, New York.
- [18] 坂元慶行, 石黒真木夫, 北川源四郎 (1983) 情報量統計学, 共立出版.
- [19] Sakamoto, Y., M. Ishiguro and G. Kitagawa (1986) *Akaike Information Criterion Statistics*, Kluwer Academic Publisher.
- [20] Stock, J. H. and M. W. Watson (1999) Forecasting Inflation, *Journal of Monetary Economics*, **44**, 293–335.
- [21] Sugiura, N. (1978) Further Analysis of the Data by Akaike's Information Criterion and the Finite Correction, *Communications in Statistics – Theory and Methods*, **A7**(1), 13–26.