

Working Paper Series

ウェーブレットによる経済分析

鎌田 康一郎*・稲田 将一**

Working Paper 03-2

日本銀行調査統計局

〒100-8630 東京中央郵便局私書箱 203 号

* e-mail:kouichirou.kamada@boj.or.jp

** e-mail:masakazu.inada@boj.or.jp

本論文の内容や意見は執筆者個人のものであり、日本銀行あるいは調査統計局の見解を示すものではありません。

ウェーブレットによる経済分析♦

鎌田 康一郎*・稲田 将一**

日本銀行 調査統計局

2003年3月

♦ 本稿の作成過程で、日本銀行調査統計局の多くのスタッフから有益なコメントを頂戴した。この場を借りて、深く感謝の意を表したい。もちろん、あり得べき誤りは筆者に属する。なお、本論文の内容や意見は筆者個人に属するものであり、日本銀行および調査統計局の公式見解を示すものではない。

* kouichirou.kamada@boj.or.jp

** masakazu.inada@boj.or.jp

【要旨】

本稿は、近年、応用科学の分野で注目を浴びつつあるウェーブレット解析のエコノミスト向け入門書である。ここでは、ウェーブレット変換を一種の線形フィルタリングと解釈し、その基礎概念と活用法を解説する。加えて、消費者物価と家計消費に関する実証例を紹介する。消費者物価については、短期的なインフレ率の変動は輸入物価、中期的な変動は需給ギャップによって説明されるという具合に、変動周期によってインフレを規定する要因が異なることが分かった。また、家計消費については、所得の増加が持続する期間が長いほど、消費の所得弾力性が上昇するという恒常所得仮説を強く支持する結果が得られた。

1 . はじめに

(1) ウェーブレットの歴史

本稿は、近年、ファイナンスや経済学分野でも、注目を浴びつつあるウェーブレット (wavelet) の入門書である。ウェーブレットの歴史は浅く、1982 年頃、フランス人石油探査技師モルレー (J. Morlet) が、不規則な信号を効率よく処理する手段として実用化を試みたのが始まりである¹。その後、数学、物理学、工学などの分野で理論化が進められる一方、画像処理、音声処理をはじめ、信号処理一般に有効な手法であることが認識され、応用範囲を急速に拡大しつつある²。しかし、経済学やファイナンスへの応用は始まったばかりで、一部の海外中央銀行がウェーブレットに関連する論文を発表し始めているが、ほとんど未開拓のフィールドといつてよい³。

我々が直接観察できる経済データは、短期的な変動から長期的な変動まで、いくつかの成分が積み重なった結果であり、その動きは非常に複雑である。こうした複雑な信号を単純な時系列の和として表現する手法の一つに「フーリエ解析」がある。フーリエ解析では、任意のデータ系列を周波数の異なる複数の波 (三角関数) の和として表現する。フーリエ変換して得られる「スペクトル密度」を観察すれば、データの動きを支配している周波数を特定化することができる。しかし、フーリエ変換を行うと、時間に関する情報が失われてしまうため、時間の経過と共にデータの周波数特性が変化する場合、そうした変化を把握することができない (図表 1(1))。

周波数特性の時間的変化を把握できないというフーリエ変換の欠陥を補う方法の一つに「窓フーリエ変換」がある⁴。ガボール (D. Gabor) は、小さな窓を

¹ ウェーブレットの歴史は、新井(2000)、榊原(1995)などの入門書で触れられている。

² ウェーブレット解析は、様々な場所で実用化されている。例えば、米国連邦捜査局 (FBI) は、ウェーブレットを用いて、2500 万もの指紋を管理している。

³ 海外中央銀行による研究論文に、ニュージーランド準備銀行の Conway and Frame (2000) やカナダ銀行の Schleicher (2002) がある。

⁴ 窓フーリエ変換は、「短時間フーリエ変換」とか、発案者の名を冠して、「ガボール変

作って、そこから見える時系列データをフーリエ変換し、その窓を時間軸に沿ってスライドさせるという「時間周波数解析」を提案した。これによって、周波数特性の時間的な変化を捉えることが可能になった（図表 1(2)）。ところで、窓の大きさ（時間枠）を小さくすれば、いくらでも詳細な情報が得られるのであろうか？答えはノーであることが、「不確定性原理」(uncertainty principle)と同じロジックで証明されている⁵。すなわち、ある時系列データから時間と周波数の情報を抜き出すとき、時間的な詳細さと周波数的な詳細さの間にはトレードオフの関係があり、両者を同時に追求することができない。そこで、このトレードオフを所与として、窓フーリエ変換は効率的かという点が、次の問題となる。実は、周波数によらず、一定の時間枠を用いる窓フーリエ変換は、必ずしも効率的ではないことが分かっている。

こうしたフーリエ解析の限界を補うものが、ウェーブレット解析である。窓フーリエ変換が非効率なのは、周波数に関係なく同じ大きさの窓を使ったことが原因であった。したがって、周波数に応じて窓の大きさを変えてやれば、効率的な分解が可能になる。周期の短い高周波に対しては、窓の枠を大きくとる必要はないが、周期の長い低周波に対しては、窓の枠を大きくとる必要がある。本稿で説明されるウェーブレット変換は、まさにそうした柔軟な対応を可能とする分析手法なのである（図表 1(3)）。なお、ウェーブレット解析では、周期の代わりに、「スケール」という言葉が用いられる。スケールが大きいということは、周期が長く、低周波であることを意味する。

（ 2 ）フーリエ解析 vs. ウェーブレット解析

ウェーブレットは、wave（波）と let（小さい）の合成語であり、「さざなみ」と訳される。ウェーブレットは、時間的な流れの中で、生まれては消えてゆく一時的な波であり、ウェーブレット変換は、任意の時系列データをウェーブレットの和として表現する手法である（図表 2(2)）。一方、フーリエ変換は、任意の時系列データを、無限に続く恒久的な波（wave）の和として表現するものである（図表 2(1)）。フーリエ変換とウェーブレット変換は、どちらか一方が他方

換」と呼ばれることもある。

⁵ 量子論で言う不確定性原理とは、「粒子の位置と運動量に関する情報は、同時に詳しく知ることができない」ということ。

に勝っているという訳ではない。例えば、時系列特性が時間を通じて不変で、規則的な変動を繰り返すデータ（定常データ）に対しては、時間的な情報を無視して、詳細な周波数分析を行うフーリエ変換が効率的である。しかし、フーリエ変換は、不規則に発生するショック（非定常データ、トレンド系列を含む）を扱うのが苦手である。一方、ウェーブレット変換は、そうした不規則変動を示すデータに対して、威力を発揮する。逆に、規則的なデータに、わざわざ、ウェーブレット解析を適用する必要はない。

ウェーブレット変換が、不規則データの取扱いに強い点を、具体例を用いて解説しておこう。いま、図表 3 上段のように、山と谷が不規則な間隔で並んでいるデータを考える。これをフーリエ変換すると、図表 3(1)のような「スペクトル密度関数」が得られる。これは、あるデータに、周期の異なる複数の波が、どの程度含まれているかを示したものである。これを見ると、たった 4 つの起伏しか持たないデータでも、フーリエ変換を使うと、無数の波から合成される必要があることが分かる。一方、図表 3(2)は、同じデータをウェーブレット変換した結果である。これを見ると、原系列が、2、4、8 期という周期（スケール）を持った小さな波から合成されていることが分かる。しかも、それぞれの波がどの時点で生じたかが示されている。おそらく、多くの人にとって、フーリエ変換の結果よりも、ウェーブレット変換の結果の方が、自然に映るであろう。こうした自然な解釈が可能になったのは、ウェーブレット解析が、時間軸を新たに導入したからに他ならない。

ウェーブレット変換が、不規則データに強いことを示す第 2 の例として、ノイズ除去の問題を考えてみよう。いま、図表 4(1)のようなステップ状の信号があるとする。しかし、実際に観測されたデータには、図表 4(2)のように、ノイズが混入しているとする。ここからノイズを除去して、真の信号を抽出したい。フーリエ解析を使ったところ、図表 4(3)のように、緩やかな山が抽出されてしまった。一方、ウェーブレット解析を使ったところ、図表 4(4)のように、かなり正確に、真の信号を抽出することに成功した。こうしたステップ状のデータは、現実の世界でも珍しくない。図表 5(1)は、近年の原油価格（北海ブレント、スポット価格、月中平均）の動きをプロットしたものである。ウェーブレット変換を使って、ノイズ除去を行うと、図表 5(2)のように、細かいノイズが消えて、特徴的な動きを強調することができる。

経済データのほとんどは、不規則にジャンプしたり、変動幅が時間の経過と共に減衰と拡大を繰り返す。何よりも、経済データの多くは非定常である。したがって、経済分析の領域において、定常性を前提とするフーリエ解析は、応用範囲が限られており、ウェーブレット解析の方が、応用範囲が広いことは、想像に難くない。本稿は、こうした魅力を備えたウェーブレット解析の基礎をエコノミストに馴染みやすい形で解説するものである。なお、経済データは離散時間でしか存在しないので、本稿でも、離散時間データの離散ウェーブレット変換 (discrete wavelet transform: DWT) のみを取り上げ、連続時間データや連続ウェーブレット変換 (continuous wavelet transform: CWT) の説明は割愛する。

本稿の構成は、以下のとおりである。第 2 節では、数学的な厳密性に囚われないで、実践的な観点から、ウェーブレット解析の基礎概念と活用法を解説する⁶。また、ウェーブレット解析の経済分析への応用例として、第 3 節で消費者物価、第 4 節で家計消費を取り上げる。第 5 節は、ウェーブレット変換の拡張として、maximal overlap discrete wavelet transform (MODWT) を解説する。第 6 節は結びである。

2 . ウェーブレット入門

ここでは、ウェーブレット解析で用いられる基礎概念と実践的な活用法を解説する。最初に、ウェーブレット変換に欠かせない「ウェーブレット・フィルター」の内、代表的なものを選んで紹介する。次に、それらのフィルターを用いて、「ウェーブレット変換」が、どのように実行されるのかを解説する。後に詳述するが、変換によって得られた結果は、「ウェーブレット係数」と呼ばれる。続いて、この係数を原系列に戻す作業である「ウェーブレット逆変換」を解説する。

ウェーブレット係数に様々な加工を施し、それを逆変換することによって、原系列の持つ特徴点を明らかにすることができる。本節では、特に重要な応用事例である「多重解像度解析」を取り上げる。最後に、「エネルギー分析 (分散分析)」や「ノイズ除去」の基本についても簡単に触れる。ここで紹介されるウ

⁶ ウェーブレットの数理を厳密に解説した入門書に、チューイ(1993)がある。

ウェーブレット解析の基本的な分析手法を組み合わせることによって、従来、別々にしか取り扱うことのできなかった周波数ベースの分析と時系列ベースの分析を自然な形で融合し、様々な経済問題に新たな光を投ずることができる。

(1) ウェーブレット・フィルター

ウェーブレット変換は、一種の線形フィルターと解釈できる⁷。このため、変換に用いられるウェーブレットは「ウェーブレット・フィルター」と呼ばれる。ウェーブレット・フィルター h は、次の3条件を満たす必要がある。

$$\sum_{k=1}^L h_k = 0. \quad (1-1)$$

$$\sum_{k=1}^L h_k^2 = 1. \quad (1-2)$$

$$\sum_{k=1}^L h_k h_{k+2n} = 0. \quad (n \text{ はゼロ以外の整数}) \quad (1-3)$$

ここで、 L はフィルターの長さである（「サポート」と呼ぶ）⁸。(1-1)式は、フィルター要素を全て加えるとゼロになるという意味で、フィルタリングによって、原系列に「何も足さないし、何も引かない」ことを意味している。(1-2)式では、フィルターのエネルギーを1と標準化している⁹。最後に、(1-3)式は、偶数倍シフトさせたフィルターと元のフィルターが、直交することを意味している¹⁰。(1-2)式は、シフトしなかった場合の内積が1であることを示しており、(1-3)式と合わせて、正規直交性 (orthonormality) の条件という。

ウェーブレット変換を実行するには、ウェーブレット・フィルターと対をなすスケールリング・フィルター g が必要である。両者は、quadrature mirror relationship

⁷ ウェーブレット解析を線形フィルタリングの観点から捉えるというアプローチは Percival and Walden (2000) や Gençay, *et al.* (2002) でも採用されている。

⁸ (1-3)式で、 $k+2n > L$ となると、積を作れなくなる。その場合はゼロと考える。より厳密には、ゼロ要素を付加した $(\dots, 0, 0, h_1, \dots, h_L, 0, 0, \dots)$ という無限フィルターを想定すればよい。実は、「サポート」という用語は、このようにフィルターを定義した場合に、フィルターのゼロでない部分の長さを指す言葉である。

⁹ ある時系列が与えられたとき、その2乗和をその系列の「エネルギー」と呼ぶ。

¹⁰ 本稿では、(1-3)式を満たすウェーブレット・フィルターに話を限定する。この場合のウェーブレット変換は、特に、直交変換と呼ばれる。もっとも、ウェーブレット変換には直交変換でないものもある。

と呼ばれる次の関係式で結ばれている。

$$g_i = (-1)^i h_{L-i+1} \Leftrightarrow h_i = (-1)^{i-1} g_{L-i+1}. \quad (1-4)$$

ここから、スケーリング・フィルタは、次の関係を満たすことが確認できる¹¹。

$$\sum_{k=1}^L g_k = \sqrt{2}. \quad (1-5)$$

$$\sum_{k=1}^L g_k^2 = 1. \quad (1-6)$$

$$\sum_{k=1}^L g_k g_{k+2n} = 0. \quad (n \text{ はゼロ以外の整数}) \quad (1-7)$$

さらに、ウェーブレット・フィルタとスケーリング・フィルタの間に、次の関係が成立していることが重要である。

$$\sum_{k=1}^L g_k h_{k+2n} = 0. \quad (n \text{ は整数}) \quad (1-8)$$

すなわち、2つの対を成すフィルタは、偶数倍のシフト(シフトしない場合を含む)に対して、互いに直交関係にある。

<ハール・ウェーブレット (Haar wavelet) >

ウェーブレット・フィルタの中で最も単純なものはハール・ウェーブレットである。このフィルタは、サポートを2として、先の(1-1)式と(1-2)式を連立方程式として解けば得られる。(サポートが2なので、(1-3)式は当然に満たされる。また、(1-5)式で符号を決定した。) ウェーブレット・フィルタとスケーリング・フィルタを対にして書くと、次のようになる。

$$h = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right), \quad g = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right). \quad (1-9)$$

図表 6-1(1)は、ハール・ウェーブレットを図示したものである。一般的に、スケーリング・フィルタが一つのなだらかな山を描くのに対して、ウェーブレッ

¹¹ (1-5)式の代わりに、 $\sum g_k = -\sqrt{2}$ もあり得るが、ここでは(1-5)式に統一する。

ト・フィルターは、切り立った山と谷がセットになっている。こうした特性によって、スケーリング・フィルターが周期の長い低周波を通す (low-pass filter) のに対し、ウェーブレット・フィルターは周期の短い高周波を通すようになる (high-pass filter)。図表 6-1 の右列にウェーブレット・フィルターをフーリエ変換して得られたスペクトル密度関数を示しておいた。右上がりの曲線は、ウェーブレット・フィルターが high-pass filter であることを示している。こうした2つのフィルター特性の違いが、ウェーブレット解析の基礎となっているのである。

<ドビッシー・ウェーブレット (Daubechies wavelet) >

ハール・ウェーブレットと並んで頻繁に用いられるウェーブレット・フィルターに、ドビッシー・ウェーブレットがある。本稿では、サポート L (L は偶数) のドビッシー・ウェーブレットを $D(L)$ と表記する。 $D(L)$ は、(1-1) ~ (1-3) 式に加えて、次の $L/2 - 1$ 個の方程式を同時に満たすように決められる¹²。

$$\sum_{k=1}^L (k-1)^i h_k = 0. \quad (i=1, \dots, L/2-1) \quad (1-10)$$

これらは、原系列のうち、 $L/2 - 1$ 次以下の多項式トレンドは、ウェーブレット・フィルターを通過しないという条件である。裏返して言うと、トレンド部分は、スケーリング・フィルターを通過する。

例えば、サポート 4 のドビッシー・ウェーブレット $D(4)$ は、(1-10) 式で $i=1$ とした場合の方程式を満たす。つまり、時系列データのうち、線形トレンドで表される部分は、ウェーブレット・フィルターを通過しないという条件が付け加わる。 $D(4)$ をスケーリング・フィルターとセットで表すと、次のようになる。

$$h = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \frac{-3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \frac{-1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \right),$$

$$g = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \right). \quad (1-11)$$

$D(4)$ を図示すると、図表 6-1(2) のようになっている。ハール・ウェーブレット

¹² 形式上、ハール・ウェーブレットを $D(2)$ と呼ぶことも可能である。

に比べ、複雑な形状をしているが、スケーリング・フィルタが一つのなだらかな山、ウェーブレット・フィルタが山と谷のセットという基本的な性質は変わらない。サポートをさらに 12 にまで増やした結果が図表 6-1(3)の $D(12)$ である。サポートの数が増えるにつれて、右列の周波数特性のグラフが $\frac{1}{4}$ のところで、垂直に近付いている。これは、ウェーブレット・フィルタが理想的な high-pass filter (高周波を全て通過させ、低周波を全く通過させないフィルタ) に近付いていることを示している。

この他にも、様々なウェーブレット・フィルタが存在している。中でも、ドビッシェー・ウェーブレットを対称形に近付けた least asymmetric wavelet ($LA(L)$ と表記、図表 6-1(4))、ドビッシェー・ウェーブレットよりも小さなサポートでより高い解像能力を発揮する minimum bandwidth wavelet ($MB(L)$ と表記、図表 6-1(5)) が代表的である。ここで紹介されたフィルタの具体的な数値については、図表 6-2 を参照されたい。

(2) ウェーブレット変換

ウェーブレット・フィルタには様々な形があるが、フィルタを一旦決めてしまうと、ウェーブレット変換は、統一的な方法で実行される。ここでは、マラー (S. Mallat) によって考案された実践的なウェーブレット解析の実行法である「ピラミッド・アルゴリズム」を紹介する。行列表示によるスマートな表現もあるが、ピラミッド・アルゴリズムは高速で、しかも、ウェーブレット解析を一種の線形フィルタリングとみなす立場からは、直感的に理解しやすいというメリットがある。

原系列をウェーブレット係数に分解するプロセスを「ウェーブレット変換」、そして、ウェーブレット係数を原系列に再構成するプロセスを「ウェーブレット逆変換」と呼ぶ。以下、これら 2 つのプロセスを順に解説する。途中、ハール・ウェーブレットを用いた実例が紹介されるが、それらは大まかなイメージを得るためのものであり、あらゆるウェーブレット・フィルタに厳密に当てはまるものではないことに注意されたい。

A. ウェーブレット変換 (分解)

原系列を x とする。ピラミッド・アルゴリズムの第 1 段階では、原系列をウェ

ープレット・フィルタ h に通して、ウェーブレット係数 w_1 を得る。具体的には、次の数式を用いて、フィルタリングを行う。

$$w_{1,t} = \sum_{k=1}^L h_k x_{\{(2t-k) \bmod N\}+1} \quad (2-1)$$

ここで、 N は原系列の長さ、 t は1から $N/2$ までの整数である。 $A \bmod N$ は、 A から N の倍数を引いて(あるいは足して)、 $0 \sim N-1$ の数字をつくるという演算子である。同様に、原系列 x をスケーリング・フィルタ g に通すと、スケーリング係数 v_1 が得られる。具体的なフィルタリングの式は次のとおりである。

$$v_{1,t} = \sum_{k=1}^L g_k x_{\{(2t-k) \bmod N\}+1} \quad (2-2)$$

フィルタを通す際に、データが1個ずつではなく、2個ずつ進んで行くことに注意しよう。これは、「ダウン・サンプリング」と呼ばれる操作で、ウェーブレット変換の特徴の一つである。これによって、アウトプットであるウェーブレット係数とスケーリング係数の長さが、それぞれ原系列の半分(= $N/2$)になる。これを「データ圧縮」と呼ぶ。もっとも、ウェーブレット係数とスケーリング係数を合わせれば、 N 個のアウトプットが得られていることになり、全体としての情報量は失われていない。なお、技術的なことであるが、原系列をフィルタに通す際、フィルタを反転させていることに注意されたい。これは「畳込み」と呼ばれる演算で、反転せずにフィルタを掛け合わせる「内積」と異なる。

ハール・ウェーブレットを例として、ウェーブレット変換の特徴点を探ってみよう。図表7は、変換のプロセスをイメージ化したものである。ウェーブレット・フィルタはデータの一階差をとる操作、スケーリング・フィルタはデータの二期移動平均をとる操作と類似していることに注意しよう。ただし、ウェーブレット・フィルタは、一階差を取った後、 $\sqrt{2}$ で割っている点が、通常の一階差と異なる。また、スケーリング・フィルタは、平均を取った後、 $\sqrt{2}$ を掛けていることが、二期移動平均と異なる。もちろん、ダウン・サンプリングによって、データの長さが半分になることも、階差や移動平均と異なっている。

ウェーブレット・フィルタが階差と、スケーリング・フィルタが移動平均と類似しているという点は、スケーリング・フィルタは一つの山、ウェーブ

ット・フィルタは山と谷のセットという先の議論の裏返しである。すなわち、スケーリング・フィルタは、やや長い目を見たときのデータの趨勢を捉えるものであり、ウェーブレット・フィルタは、データの趨勢的な流れからの乖離を補足している。そして、これら 2 つが合わさって、原系列に含まれる情報が保存されるのである。

ピラミッド・アルゴリズムの第 2 段階に進もう。第 1 段階で得られたウェーブレット係数 w_1 は、大まかにいうと、原系列の変動のうち、周期が 2 (つまり、スケール 2) の部分を捉えたものである。一方、スケーリング係数 v_1 には、周期が 2 よりも長い原系列の全ての動きが入り交じっている。そこで、 v_1 を周期の短い動き w_2 と長い動き v_2 に再び分解することが考えられる。それには、先と同じ変換を v_1 に施せばよい。データが長い場合には、スケーリング係数をさらに分解していくことができる。

いま、 $v_0 \equiv x$ と定義すると、ウェーブレット変換は、次のような一般形で書くことができる。

< ウェーブレット変換 >

レベル $i-1$ のスケーリング係数 v_{i-1} を、ウェーブレット・フィルタ h に通して、レベル i のウェーブレット係数 w_i を得る。

$$w_{i,t} = \sum_{k=1}^L h_k v_{i-1, \{(2t-k) \bmod N/2^{i-1}\}+1} \quad (2-3)$$

レベル $i-1$ のスケーリング係数 v_{i-1} を、スケーリング・フィルタ g に通して、レベル i のスケーリング係数 v_i を得る。

$$v_{i,t} = \sum_{k=1}^L g_k v_{i-1, \{(2t-k) \bmod N/2^{i-1}\}+1} \quad (2-4)$$

先に説明したとおり、ウェーブレット変換は、データをダウン・サンプリングする。このため、レベル i の係数 w_i 、 v_i の長さは、いずれも $N/2^i$ に減少している。

ハール・ウェーブレットを使って、さらに理解を深めよう。図表 7 に戻って、ウェーブレット係数 w_2 を見ると、これは、先に計算した二期移動平均の一階差をとったものになっている。つまり、原系列の動きのうち、4 期間で完結する部分が抽出されている。これに対し、スケーリング係数 v_2 は、二期移動平均のさ

らに二期移動平均、すなわち、四期移動平均を計算したものになっている。これは、4 期間では完結しないデータの動きが、この中に押し込まれていることを意味している。もし原系列のサンプル・サイズがいまの 2 倍（8 個）なら、 v_2 をさらにウェーブレット変換できて、 w_3 が 8 期間で完結する変動を捉え、 v_3 がそれよりも長い原系列の動きを補足することとなる。

B. ウェーブレット逆変換（再構成）

先に、ウェーブレット変換を施しても、原系列が持っている情報量は失われないことを指摘しておいたが、実際、変換によって得られたウェーブレット係数とスケーリング係数から、原系列を復元することができる。この操作は、「ウェーブレット逆変換」と呼ばれる。

ウェーブレット逆変換は、文字どおり、ウェーブレット変換の逆をいく。ここでは、レベル $i+1$ のスケーリング係数 v_{i+1} とウェーブレット係数 w_{i+1} から、レベル i のスケーリング係数 v_i を再構成する方法を説明する。まず、ダウン・サンプリングにより減少したデータを水増しするために、「0」を v_{i+1} と w_{i+1} のデータの間に入り込んでいく。つまり、 $v_{i+1}^0 = (0, v_{i+1,1}, 0, v_{i+1,2}, \dots)$ と $w_{i+1}^0 = (0, w_{i+1,1}, 0, w_{i+1,2}, \dots)$ というデータを作る。これをアップ・サンプリングと呼ぶ。

< ウェーブレット逆変換 >

$i+1$ レベルのアップ・サンプリングされたウェーブレット係数 w_{i+1}^0 をウェーブレット・フィルター h に通し、レベル $i+1$ のスケーリング係数 v_{i+1}^0 をスケーリング・フィルター g に通し、2 つのアウトプットを足すと、レベル i のウェーブレット係数 v_i を得る。

$$v_{i,t} = \sum_{k=1}^L h_k w_{i+1, \{(t+k-2) \bmod N / 2^i\} + 1}^0 + \sum_{k=1}^L g_k v_{i+1, \{(t+k-2) \bmod N / 2^i\} + 1}^0 \quad (2-5)$$

技術的なことであるが、ウェーブレット逆変換ではフィルターを反転せず、単なる内積を用いる。これは「畳込み」を行うウェーブレット変換と異なるので注意されたい。

ハール・ウェーブレットによるウェーブレット逆変換は、図表 7 を下から読むことに等しい。また、サンプル・サイズが 8 の場合の数値例を図表 8 に掲載して

おいたので、興味のある読者は、頭の体操に利用してもらいたい。

(3) 多重解像度解析

これまでの説明からも分かるように、ウェーブレット変換が行っているのは、大まかに言うと、データの階差と平均を何度も繰り返すことである。ここでは、マールによって考案された「多重解像度解析」を解説しながら、こうしたプロセスが持つ実際的な意味を考えてみよう。

まず、多重解像度解析のキーとなる、「ウェーブレット・ディテール」と「ウェーブレット・スムーズ」を定義しよう。いま、原系列をウェーブレット変換した結果、多段階の v_i と w_i が求まったとする。このとき、 w_1 以外の全ての v_i と w_i をゼロと置き換え、ウェーブレット逆変換を行う。レベル1のウェーブレット・ディテールとは、こうして得られた原系列と同じサンプル・サイズの時系列であり、 d_1 と表記される。図表9にハール・ウェーブレットを用いた場合の結果が示されている。右中段の4個のデータからなる数列が d_1 である。また、 v_1 以外の全ての v_i と w_i をゼロと置き換え、ウェーブレット逆変換を行うと、レベル1のウェーブレット・スムーズが得られ、 s_1 と表記される(図表9左中段)。同様にして、 v_i に対応してレベル i のスムーズ s_i 、 w_i に対応してレベル i のディテール d_i を求めることができる。

ここで、 s_2 に d_2 を加えると s_1 と等しくなり、 s_1 に d_1 を加えると原系列 x が得られるという関係が成立していることに注意しよう。 $s_0 \equiv x$ とすると、一般的に、次の式が成立する。

$$s_{i-1} = d_i + s_i. \quad (2-6)$$

特に、 $r_i = \sum_{k=1}^i d_k$ (「ウェーブレット・ラフ (wavelet rough)」と呼ぶ) とすると、次のような関係が成り立っている。

$$x = r_i + s_i. \quad (2-7)$$

先の例に戻ると、左下段の s_2 は、4つのデータから構成されているが、値は全て等しく、最も単調なデータである。これに d_2 を加えて得られた s_1 には、2つの異なる値が含まれ、多少起伏のあるデータとなった。これにさらに d_1 を加えて

得られた s_0 は、データそのものである。このように、最も粗く単調なデータに、起伏のあるデータを少しずつ積み上げていくことによって、原系列を再現するプロセスは、「多重解像度解析」と呼ばれており、ウェーブレット解析の最も重要な活用法の一つである。

数値例を用いて、多重解像度解析のイメージをよりビジュアルに理解することとしよう。図表 10 は、図表 8 のウェーブレット係数とスケールリング係数から、ウェーブレット・ディテールとスムーズをそれぞれ計算したものである。まず、レベル 3 のウェーブレット・スムーズ (s_3) をみると、そこには水平のグラフがある。そこから、原系列がどうやら平均的にプラスであると分かるだけである。レベル 2 のウェーブレット・スムーズ (s_2) は、これに右最下段のレベル 3 のウェーブレット・ディテール (d_3) を加えて得られる。これをみると、原系列が、全体的に右上がりのトレンドを持っていることが分かる。同様にして、次々とウェーブレット・ディテールを付け加えていくと、起伏に富んだ元のデータが再現される。

(4) ノイズ除去

経済データを分析する場合、そこに含まれる不要なノイズを取り除きたいのは当然のことである。多重解像度解析を行う際にも、予め「ゴミ」を取り払って復元した方が、原系列の特徴がより鮮明に把握できることがある。これが「ノイズ除去」と呼ばれる操作である。

ノイズの除去には様々な方法があるが、操作手順は基本的に同じである。したがって、ここでは、最も基本的なノイズ除去の手法である hard thresholding (HT) を紹介しておけば十分である¹³。この手法は、ウェーブレット係数のうち、ある大きさに満たないものをゼロに置き換えるというものである(図表 11)。数式的には、次のように表現される。

$$HT(w_{i,j} | \alpha_i) = \begin{cases} w_{i,j} & \text{for } |w_{i,j}| > \alpha_i \\ 0 & \end{cases} \quad (2-8)$$

¹³ この他にも、soft thresholding や universal thresholding など、多くのノイズ除去の手法が提案されている。詳しくは、Gençay, *et al.* (2002)を参照。

ここで、 $w_{i,j}$ はレベル i のウェーブレット係数の j 番目の要素、 α_i はレベル i のウェーブレット係数に対する閾値である。

$\alpha_i = 2$ (全ての i) として、図表 7 のデータを HT でノイズ除去してみよう。まず、ウェーブレット係数を(2-8)式のルールに従って書き直すと図表 12 のようになる。ここで、 w_1 をノイズ除去した w_1^{HT} は、2 番目のデータ以外が全て 0 に変わっている。それ以外のウェーブレット係数は、ノイズ除去前と変わらない。 w_1^{HT} に対応するウェーブレット・ディテール d_1^{HT} は、先に説明した方法によって計算できる。これを s_1^{HT} ($= s_1$) に加えると、ノイズを除去した新たな系列 x^{HT} (最上段、実線) が得られる (破線は原系列)。

多重解像度解析も、周期が小さなものをカットするという意味で、一種の HT 型ノイズ除去とみなすことができる。例えば、レベル i の解像度を得る場合には、次のように考えている訳である。

$$\alpha_k = \begin{cases} \infty & \text{for } k \leq i \\ 0 & \text{for } k \geq i+1 \end{cases} \quad (2-9)$$

ノイズ除去でポイントとなるのは、閾値 α_i の選択である。先の例では、分解の程度にかかわらず、2 という一律の閾値を適用したが、恣意性を排除するためにも、ある程度の指針を作っておくことが望ましい。一つの方法は、ウェーブレット係数の標準偏差を閾値とする方法である。

$$\alpha_i = \sigma(w_i). \quad (2-10)$$

実は、第 1 節で例に挙げた原油価格のノイズ除去 (図表 5) は、この方法で作られたものである。

(5) エネルギー分析 (分散分析)

先に、ウェーブレット解析とは、原系列の持つ情報を失うことなく、データを趨勢とそこからの乖離という 2 系列に分解する手法の一種であることを指摘した。実際、ウェーブレット変換は、「エネルギー保存の法則」を満たすことが

知られている¹⁴。この点を、ハール・ウェーブレットを用いて、確認しておこう。レベル*i*のウェーブレット係数とスケーリング係数のエネルギーの和は、次のように定義される。

$$\sum_j w_{i,j}^2 + \sum_j v_{i,j}^2 = \sum_j (w_{i,j}^2 + v_{i,j}^2). \quad (2-11)$$

右辺の括弧中は、ハール・ウェーブレットの場合、次のように計算できる。

$$w_{i,j}^2 + v_{i,j}^2 = \left(\frac{v_{i-1,2j} - v_{i-1,2j-1}}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{v_{i-1,2j} + v_{i-1,2j-1}}{\sqrt{2}} \right)^2 = v_{i-1,2j}^2 + v_{i-1,2j-1}^2. \quad (2-12)$$

(2-12)式を(2-11)式に代入すると、ウェーブレット係数とスケーリング係数のエネルギーは、次の関係を満たすことが分かる。

$$\sum_j w_{i,j}^2 + \sum_j v_{i,j}^2 = \sum_j v_{i-1,j}^2. \quad (2-13)$$

すなわち、レベル*i*のウェーブレット係数とスケーリング係数のエネルギーの合計は、レベル*i-1*のスケーリング係数のエネルギーに等しい。特に、 $v_0 \equiv x$ であることを想起すると、 $i=1$ として、次の式が成立することが分かる。

$$\sum_j w_{1,j}^2 + \sum_j v_{1,j}^2 = \sum_j x_j^2. \quad (2-14)$$

このように、原系列をウェーブレット分解しても、エネルギーは保存される。

さらに、ウェーブレット係数のエネルギーとウェーブレット・ディテールのエネルギーが等しいこと、スケーリング係数とウェーブレット・スムースのエネルギーが等しいことを示すこともできる。いま、レベル*i*の*j*番目のウェーブレット係数 $w_{i,j}$ を取り出す。これに対応するウェーブレット・ディテール $d_{i,j}$ を計算すると、次の 2^i 個の数列であることが分かる。

$$d_{i,j} = \left(\overbrace{\frac{-w_{i,j}}{2^{i/2}}, \dots, -w_{i,j}}^{2^{i-1} \text{個}}, \overbrace{\frac{w_{i,j}}{2^{i/2}}, \dots, \frac{w_{i,j}}{2^{i/2}}}^{2^{i-1} \text{個}} \right). \quad (2-15)$$

¹⁴ エネルギー分析についてさらに詳しい解説を得たい読者は Walker (1999)を参照。

ここから、 $d_{i,j}$ のエネルギーは $w_{i,j}^2$ であることは明らかである。この関係を全てのウェーブレット係数に適用すると、ウェーブレット係数のエネルギーは、ディテールのエネルギーに等しいことが分かる。

同様に、レベル i の j 番目のスケーリング係数 $v_{i,j}$ に対応するウェーブレット・スムーズ $s_{i,j}$ は、次の 2^i 個の数値で表される。

$$s_{i,j} = \overbrace{\left(\frac{v_{i,j}}{2^{i/2}}, \dots, \frac{v_{i,j}}{2^{i/2}} \right)}^{2^i \text{個}}. \quad (2-16)$$

明らかに、 $s_{i,j}$ のエネルギーは $v_{i,j}^2$ であり、スケーリング係数のエネルギーは、スムーズのエネルギーに等しい。

エネルギーは、いわゆる「分散」とは異なる概念である。ある系列のエネルギーはデータの2乗和によって計測されるので、データの変動幅に比べ、絶対的な水準が大きければ、スムーズ部分の持つエネルギーが、ディテール部分のエネルギーに対して、相対的に大きくなる傾向がある。経済分析では、データの変動こそが重要であり、絶対水準は二次的な意味しか持たないことが多い。そこで、通常の分散分析と同じく、原系列を平均周り $(x - \bar{x})$ で表すことが考えられる。このデータ変換によって、各ディテール部分が持つエネルギーは不変であるが、スムーズ部分が持つエネルギーは小さくなる。換言すると、ディテール同士の相対的なエネルギー量は不変であるが、ディテールに対するスムーズの相対的なエネルギー量は減少する。

図表13は、原油価格を平均周りでエネルギー分析した結果である。ウェーブレット・ディテールのエネルギー分布を見ると、最も細かいレベル1からレベル4へと、周期が長くなるほどエネルギーが大きくなっていることが分かる。さらに、レベル4までのウェーブレット・ディテールが持つエネルギーの合計は、総エネルギーの3分の1程度に過ぎず、残りはレベル4のウェーブレット・スムーズ(16ヶ月以上持続する変動)によって説明される。このように、原油価格の動きは、少なくとも1年以上継続する比較的大きな波によって支配されている。

(6) 分析上の注意点

最後に、ウェーブレット解析を実行する際の注意点をいくつか挙げて、入門

編を締め括ることにしよう。まず、ウェーブレット変換するためには、原系列のサンプル・サイズが偶数である必要がある。一般に、サンプル・サイズが $2^i \times j$ と書けるならば、 i 回までウェーブレット変換を繰り返すことができる¹⁵。別の言い方をすると、 i 回までウェーブレット変換したいのならば、サンプル・サイズが 2^i の倍数である必要がある。これは、実際に経済データを扱う際に厄介な問題を提起する。特に、もともと利用可能なサンプル・サイズが小さい場合には、深刻な制約となり得る。偶数サンプルの制約を外すには、第5節で説明する maximal overlap discrete wavelet transform を用いなければならない。

一般に、ウェーブレット・フィルターのサポートが2よりも大きい場合には、直近部分のウェーブレット変換が難しくなる。これは、リアルタイムな経済分析を必要とする場合には重大な問題となる。解決策として、データの前後に架空のデータを付け足すことが、しばしば行われる。データを付け足す方法に、何ら定説がある訳ではない。最も頻繁に行われる方法は、単に元のデータを一から継ぎ足すというものである。しかし、この方法だと、データがトレンドを持っている場合には、データの直近部分で段差が生じてしまい、これがウェーブレット変換の結果を著しく歪めてしまう。そこで、本稿では、原系列そのものではなく、原系列のミラー・イメージを作って、原系列に付け足すという方法を採用している。これによって、直近部分に段差ができなくなるので、変換結果の歪みを緩和できる。もっとも、架空のデータを付け加えている点に変わりはなく、サポートが2よりも大きいウェーブレット・フィルターを使用する際には、直近部分の変換結果をある程度の幅を持って評価するのが妥当である。

3 . ウェーブレットを通して見た消費者物価

本節では、ウェーブレット解析を利用して、わが国の消費者物価の変動を分析する。消費者物価ベースのインフレ率をみると、数年周期の比較的長い波と数ヶ月周期の短い波が折り重なるようにして変動していることが分かる。それぞれの波は、それぞれ異なる要因によって生成されたと考えられる。取り分け、

¹⁵ サンプル・サイズが 2^i という形で書けるのに、 i 回まで分解を行わない場合、または、サンプル・サイズは偶数だが、 2^i という形では書けない場合を指して、「部分ウェーブレット変換」と呼ぶことがある。

何がインフレ率の中長期的な流れを支配しているのかという点は、物価の安定をゴールとする金融政策にとっても、非常に興味深い論点である。

本節では、次のような手順を踏んで、わが国の消費者物価の変遷と変動要因を分析する。第 1 に、消費者物価の変動率をウェーブレット変換し、90 年代以降における物価の変動基調について考える。第 2 に、需給ギャップや輸入物価など、何が消費者物価の変動要因なのかをスケール毎に検討する。加えて、ウェーブレット変換しなかった場合とのパフォーマンスを比較する。

(1) 消費者物価の多重解像度解析

本節では、消費者物価総合（除く生鮮食品）の前月比（年率、%、季調済み、消費税調整済み）を用いる。サンプルは、1983 年 11 月～2002 年 6 月の 224 個である。224 = 2⁵ × 7 なので、最大 5 回の分解が可能である¹⁶。

最初に、ハール・ウェーブレットを用いて、消費者物価インフレ率をウェーブレット解析してみよう。図表 14 は、ウェーブレット係数（レベル 1～5）とスケールリング係数（レベル 5）を時間軸に沿って示したものである。90 年代後半に注目すると、4 ヶ月程度の循環を捉えたレベル 2 のウェーブレット係数が、2000 年中に大きく現われている。これは、パソコン価格や被服価格の下落を反映したものと考えられる。また、8 ヶ月程度の循環を捉えたレベル 3 のウェーブレット係数は、1995 年に大きなショックがあったことを示しており、当時の円の乱高下を反映していると考えられる。

レベル 4 のウェーブレット係数は、16 ヶ月程度の循環を捉えたものである。これをみると、資産バブルが弾けた 1990 年を境に、プラスからマイナスへと符号が逆転している。また、三洋証券、北海道拓殖銀行の経営破綻、山一証券の自主廃業など、金融システム不安が顕在化した 1997 年頃には、再びマイナス方向へのショックが発生している。このように、レベル 4 のウェーブレット係数は、全体として、景気循環に沿った動きを示している。同じ傾向は、32 ヶ月程

¹⁶ 実際には、 $D(4)$ や $D(12)$ を扱うために、原系列のミラー・イメージを原系列に継ぎ足しているため、合計 448 個のデータを取り扱っている。この場合は、理屈の上では 6 回の変換が可能であるように思われるかもしれない。しかし、実際に意味のあるデータは 224 であることに変わりはなく、したがって、6 回以上の変換は意味がない。

度の循環を捉えたレベル5のウェーブレット係数にも当てはまる¹⁷。

いまの場合、レベル5のスケーリング係数をさらに分解することはできない。ここには、32ヶ月を超える全ての循環とトレンドが混在しているが、ここまで分解が進むと、ほとんどはインフレ率のトレンドとみなしてよい。実際に変換結果を見ると、1990年頃をピークに鈍化したわが国経済の成長過程を映し出しているように見える。

ウェーブレット係数とスケーリング係数に対応するウェーブレット・ディテールとスムーズが図表15に描かれている。これらの情報を利用すれば、「多重解像度解析」を行うことができる(図表16)。ここでは、レベル3のウェーブレット・スムーズに対応する解像度3の消費者物価から掲載してある¹⁸。階段状であるが、インフレ率の趨勢をぴったりと追跡している。解像度を2にまで上げても、2000年の物価の急激な下落が反映される程度であり、解像度を1に上げると、ほぼ原系列に一致する。こうして見てくると、消費者物価の趨勢を捉えるには、解像度3(8ヶ月以上の循環)を見ていればよさそうである。

図表17は、解像度1の消費者物価をウェーブレット・スムーズとディテールの積み上げグラフで表したものである。一番薄い部分がウェーブレット・スムーズで、濃くなるほど周期の短いウェーブレット・ディテールに対応する。90年代前半は、周期の長い動きが消費者物価の動きを特徴づけていたが、後半に入ると、ウェーブレット・スムーズの寄与度は小さくなる。これが、2000年以降は、ウェーブレット・スムーズがマイナス方向に出て、レベル2のウェーブレット・ディテールが、攪乱要因として働くという構図になっている。

(2) スケール別消費者物価関数の推計

ここでは、インフレ率が、周期毎(スケール毎)に、いかなる要因で変動しているのかを、回帰分析によって明らかにする。インフレを説明する要因として、需給ギャップと輸入物価の変動率に注目する。これは、従来のフィリップ

¹⁷ 景気基準日付でも、第10循環(1983年2月の谷)から第12循環(1999年1月の谷)まで、拡張期間・後退期間が平均32ヶ月(全循環64ヶ月)なので、ここでの結果は、こうしたデータとも整合的である。

¹⁸ レベル3のスムーズとは、レベル5のスムーズにレベル5と4のディテールを加えたもの。

ス曲線による分析とよく似ているが、インフレ率を一旦ウェーブレット変換し、周期毎に回帰分析を行う点が新しい。これによって、より木目細かな消費者物価の分析が可能となる。

本節では、次の消費者物価関数を推計する。

$$\pi_{i,t} = \beta_{0,i} + \beta_{1,i} \cdot gap(p)_{i,t} + \beta_{2,i} \cdot m(q)_{i,t} + \varepsilon_{i,t} \quad (3-1)$$

ここで、 $\pi_{i,t}$ は消費者物価前月比（年率、%、季節調整済み、消費税調整済み）のレベル i のウェーブレット・ディテールおよびスームスである。また、 $gap(p)_{i,t}$ は、需給ギャップ（%）について、最初に p 期ラグをとった後、ウェーブレット変換を施し、それを基に、レベル i のウェーブレット・ディテールおよびスームスを計算したものである¹⁹。これは、最初にウェーブレット変換を施し、ウェーブレット・ディテールとスームスを求め、その p 期ラグをとって得られる $y_{i,t-p}$ とは異なるので注意しよう。 $m(q)_{i,t}$ は、輸入物価前月比（年率、%）について、需給ギャップと同様の処理を施したものである。

なお、通常のフィリップス曲線の分析では、「期待インフレ」を補足するためにインフレ率のラグ変数やリード変数を説明変数に加えるのが普通である。しかし、こうした取扱いは、インフレ率の変動に何らかの時系列特性を事前に強いるものであり、ここでの分析意図になじまない。そこで、本稿では、インフレ率のラグやリードを説明変数としない形で回帰分析を行う。もちろん、一つの説明変数について複数のラグを採用するなど、さらに拡張の余地はあるが、ここではできる限り説明変数を節約している。

ハール・ウェーブレットを用いた回帰分析の結果は、図表 18(1)のとおりである²⁰。消費者物価変動率のレベル 1 と 2 のディテールは、需給ギャップや輸入物

¹⁹ 需給ギャップ（月次）は、労働時間ベースの失業率と資本の稼働率を 1 から差し引いたもの（資本の遊休率）とを加重平均したものである。基本的には、鎌田・増田(2001)による四半期ベースの「非製造業資本稼働率修正型 GDP ギャップ」を月次化したものである。非製造業資本稼働率修正型 GDP ギャップの基礎データとなる資本ストックや非製造業資本稼働率には、月次計数が存在しないので、Goldstein and Khan (1985)の手法を用いて、四半期データを月次に分割した。

²⁰ ハール・ウェーブレットを用いた場合、ウェーブレット・ディテール同士で回帰分析を行うと、定数項はゼロになる。しかし、ウェーブレット・スームス同士の回帰分析では、一般に、定数項はゼロにならない。また、サポートが 2 よりも大きいその他のウェーブ

価でほとんど説明できなかつた。すなわち、4ヶ月以内に収束するような消費者物価の動きは、需給ギャップや輸入物価では説明できない。

輸入物価の有意性を見てみよう。レベル3のディテールについて、回帰分析の結果を見ると、当月の輸入物価が有意な説明変数となっている。つまり、8ヶ月程度の長さを持った輸入物価の変動は、インフレ率に影響を与える。レベル4のディテールについては21ヶ月ラグの輸入物価、レベル5のディテールだと、24ヶ月ラグの輸入物価が有意な変数となった。しかし、レベル5のスムーズだと、輸入物価はもはや有意な説明変数ではない。このように、16~32ヶ月程度の輸入物価の動きは、2年程度のラグを伴って消費者物価に影響を与えていると考えることができる。

需給ギャップの有意性に目を転じよう。まず、レベル1~3までのディテールについては、需給ギャップは有意な変数とならず、1~8ヶ月程度の短期的なインフレ率の振れは、需給ギャップで説明されない。一方、レベル4のディテールでは当期、レベル5のディテールでは1ヶ月ラグの需給ギャップが、有意な説明変数であった。さらに、レベル5のスムーズでは、需給ギャップが消費者物価の唯一の説明変数となった。これらのことは、需給ギャップが、消費者物価の16ヶ月を超えるような長いサイクルを説明する有力な因子であることを示唆している。しかも、そのラグは比較的短い。

得られたスケール別消費者物価関数のパフォーマンスを従来型の物価関数と比較することも可能である。(3-1)式をウェーブレット変換を施していない原系列に当てはめた結果が、図表18(3)に掲載されている。決定係数を見ると0.330程度である²¹。これに対し、スケール別消費者物価関数を全て積上げた場合の決定係数は、0.438にまで上昇した。また、関数推計値と実績値を並べてみても、周波数別関数の方が従来型関数よりも自然なフィットを実現している(図表19(1)、(3))。

レット・フィルターを用いた場合には、ウェーブレット・ディテール同士の回帰分析であっても、定数項は必ずしもゼロとはならない。

²¹ フィリップス曲線の推計では、0.7を超える決定係数が報告されることも多いことを考えると、ここでの結果はかなり小さいという印象を持たれる方もおられよう。しかし、こうした高い決定係数は、説明変数として自己ラグが加えられているからであり、それによって当てはまりが2倍になっている訳である。

ハール・ウェーブレット以外にも、第2節で紹介された様々なウェーブレット・フィルターを用いて、同じ分析を行うことができる。分析者は、分析の目的とデータの性質に応じて、適切なウェーブレット・フィルターを選択することを求められる。こうした選択は、機械的に行えるものではなく、何度も試行錯誤を繰り返すのが普通である。ここでは、比較のために、ドビッシー・ウェーブレット $D(12)$ を試した。回帰分析の結果（図表 18(2)）を見ると、ハール・ウェーブレットの場合と概ね同じであるが、今回は、レベル2のウェーブレット・ディテールが、需給ギャップと輸入物価で説明できることになった。また、レベル5のウェーブレット・スムースの説明要因として輸入物価が加わった。このように、 $D(12)$ を用いると、かえって解釈が難しくなった。しかし、全体の決定係数は0.440 となり、ハール・ウェーブレットを用いたときよりも、フィットが良くなっている（図表 19(2)）。

4 . ウェーブレットを通して見た家計消費

本節では、ウェーブレットによる経済分析の2つ目の例として、家計の消費と可処分所得の関係を取り上げる。恒常所得仮説によると、家計は、一時的に所得が増加しても、消費水準を引き上げることはしないが、恒久的な所得の増加に対しては、消費水準を引き上げるはずである。ウェーブレットを用いれば、この仮説を木目細かに実証することができる。具体的には、消費と所得を様々な周期変動に分解し、両者の中の傾きと周期の長さを関連付ければよい。結果を先取りすると、所得が増加する期間が長くなるほど、消費の所得弾力性が増すことが分かった。これは、恒常所得仮説をよりエレガントな方法で実証するものであり、ウェーブレット解析を用いることによって初めて可能となった²²。

以下の分析では、消費と所得を関連付ける前に、これら2つの時系列データに含まれているトレンド要素をいかにして取り除くかという問題を議論する。これは、一般に、トレンド・データを扱う場合に、「見せかけの相関」を防止する重要なステップであり、ここでの分析に限らず、広範な問題に適用可能である。今後、ウェーブレット解析を利用して、経済分析を行う際に参考にされる

²² 同様の分析を行っているものとして、Ramsey and Lampart (1998)がある。

ことを薦める。

(1) 家計消費と可処分所得のトレンド除去

最初に、70年代以降の家計消費と所得の推移を『家計調査』を用いて確認しておこう。図表20は、家計の消費支出と可処分所得(名目、自然対数値)をプロットしたものである。両者とも、80年代末にかけて、緩やかな上昇トレンドを辿った後、90年代以降は、ほぼ横這いで推移している。ここで問題となるのは、消費と所得を直接比較すると、トレンドが「見せかけの相関」を生み出してしまうことである。この問題に対し、従来の時系列分析は誤差修正モデル(error correction model)という形で対処してきた。本稿では、代替的なアプローチとして、ウェーブレットを用いてトレンドを除去する新たな対処法を提案する。

ウェーブレットを用いて、時系列データからトレンドを除去する際、どのウェーブレット・フィルターが相応しいかという問題がある。論点が2つある。トレンドと一口に言っても、線形トレンド、2次関数トレンドなど、様々な形が存在する。原系列のどのような動きをトレンドとみなせば良いのか。トレンドの種類を決めたとして、どのウェーブレット・フィルターが最も効率よく、対象とするトレンドを抽出できるのか。フィルターの選択を誤ると、トレンド除去が不完全になってしまい、消費水準と所得水準の間にある見せかけの相関を完全に排除できない。

の最適フィルターの問題を先に議論しよう。第2節で、サポートが4のドビッシー・ウェーブレット $D(4)$ を使うと、線形トレンドがウェーブレット・フィルターを通過できないことを指摘しておいた。この点を具体的に説明しておこう。 $D(4)$ は、(1-1)式に加え、(1-10)式を $i=1$ で満たす。

$$h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = 0. \quad (4-1)$$

$$0 \cdot h_1 + 1 \cdot h_2 + 2 \cdot h_3 + 3 \cdot h_4 = 0. \quad (4-2)$$

例えば、ある時系列の一部を取り出したところ、(3,5,7,9)という一次トレンドであったとしよう。これをウェーブレット・フィルターに通すと、ウェーブレット係数はゼロになる。

$$9 \cdot h_1 + 7 \cdot h_2 + 5 \cdot h_3 + 3 \cdot h_4$$

$$\begin{aligned}
&= (-2 \times 0 + 9)h_1 + (-2 \times 1 + 9)h_2 + (-2 \times 2 + 9)h_3 + (-2 \times 3 + 9)h_4 \\
&= -2 \times (0 \cdot h_1 + 1 \cdot h_2 + 2 \cdot h_3 + 3 \cdot h_4) + 9 \times (h_1 + h_2 + h_3 + h_4) = 0.
\end{aligned}$$

同様に、サポートが 12 のドビッシー・ウェーブレット $D(12)$ は、(1-1)式に加え、(1-10)式を $i=1, \dots, 5$ で満たす。これは、データ変動のうち、5 次関数で表現できる部分をトレンドとして抽出できることを意味している。一方、ハール・ウェーブレットは、(1-10)式を $i=1$ で満たしている訳ではなく、したがって、線形トレンドの一部は、ウェーブレット・フィルターを通過してしまう。

次に、何をトレンドと考えるべきかという問題を考えてみよう。図表 20 を見れば、70~80 年代にかけて、消費と所得が線形トレンドを辿っていたことに反論するものはいないであろう。ハール・ウェーブレットは、既に説明したとおり、線形トレンドを除去することが出来ない。このため、トレンド除去手段としては不適格である。この点、ドビッシー・ウェーブレット $D(4)$ は、線形トレンドを除去するように設計されており、トレンド除去手段として合格ラインに達している。

再び図表 20 に帰ると、消費と所得のトレンドは、90 年代の初頭に屈折しているように見える。 $D(4)$ は、線形部分だけをトレンドとして把握し、こうした非線形な動きを「トレンド」とみなさない。この部分をトレンドとして抽出したいなら、 $D(12)$ のように、データの非線形な動きを追うことのできるウェーブレットが必要となる。ただし、5 次関数はかなり微妙な動きを近似できるので、 $D(12)$ を使うと、トレンド除去が行き過ぎる危険性がある。そこで、以下では、 $D(4)$ と $D(12)$ で得られた結果を平等に見ていく。いくつかの屈折点を除けば、消費と所得は線形トレンドを辿っており、そうした屈折点に注意を払いさえすれば、 $D(4)$ も十分利用価値があるからである。

実際のデータを用いて、これらの抽象的な議論を具体的に確認しておこう。今回のサンプルは、1970 年 12 月 ~ 2002 年 11 月の 384 個である。 $384 = 2^7 \times 3$ なので、最大 7 回の分解が可能であるが、6 回目のウェーブレット係数は 6 個、7 回目は 3 個しかなく、後に回帰分析をする際に自由度が少な過ぎるので、5 回の分解に止めた。消費支出の原系列からレベル 5 のウェーブレット・ラフ (= レベル 1~5 のディテールの積上げ、すなわち、レベル 5 のウェーブレット・スムースをトレンドとして原系列から除去したもの) を図表 21 に、可処分所得について同様の結果を図表 22 に示した。ハール・ウェーブレットを用いた結果をみる

と(図表 21(1))、90年代の初頭まで、32ヶ月毎に、上昇しては急落するというパターンを繰り返し、逆に、90年代末頃から、程度は小さいが、下落しては急激に上昇するというパターンがみられる。これらは、それぞれ、80年代にかけての上昇トレンドと90年代末頃からの緩やかな下降トレンドが、ウェーブレット・ディテールに混入した結果である。同様のパターンは、可処分所得をハール・ウェーブレットでトレンド除去した結果にも表れており(図表 22(1))、これらの結果を用いると、消費と所得の見せかけの相関を排除できなくなる。

ドビッシー・ウェーブレットを用いてトレンド除去した結果を見てみよう(図表 21(2)と(3))。D(4)とD(12)のいずれを用いても、ハール・ウェーブレットの場合に見られた規則的なパターンが消滅している。D(4)とD(12)を比較すると、1991年頃に線形トレンドが屈折している部分では、D(4)では比較的大き目のこぶが見られるが、D(12)を用いると、多少小さくなる。しかし、全体として両者に大きな違いはみられない。

同様の分析結果は、エネルギー分析(分散分析)によって、さらに明確になる。図表 23は、消費と所得をエネルギー分析(平均周り)した結果である。ハール・ウェーブレットを用いた結果を見ると(図表 23(1))、レベル4と5のディテールに溜まったエネルギーが、レベル1~3のディテールに比べてかなり大きい。これは、レベル4と5のディテールの中に、トレンドの一部が混入した結果である。D(4)を用いると(図表 23(2))、レベル4のディテールに溜まったエネルギーはほぼ取り除かれるが、レベル5のディテールに溜まったエネルギーは、減少したとはいえ、相対的には大きい。D(12)を使えば、レベル5のディテールのエネルギーもかなり低下する。もっとも、レベル5のウェーブレット・ディテールのエネルギーを低下させることが本当に必要なのか、先験的には判断できない。何をトレンドと考えるかは、究極的には恣意的な問題なのである。

(2) スケール別家計消費関数の推計

ここでは、周期(スケール)毎に家計消費を可処分所得に回帰し、両者がいかなる関係にあるかを分析する。具体的には、次のような関係を想定する。

$$c_{i,t} = \theta_{0,i} + \theta_{1,i} \cdot y(p)_{i,t} + \eta_{i,t} \quad (4-1)$$

ここで、 $c_{i,t}$ は消費水準（季節調整済み、自然対数値）のレベル*i*のウェーブレット・ディテールおよびスームスである。 $y^{(p)}_{i,t}$ は、可処分所得（季節調整済み、自然対数値）の*p*期ラグにウェーブレット変換を施し、それを基に、レベル*i*のウェーブレット・ディテールおよびスームスを作成したものである。

ハール・ウェーブレット、 $D(4)$ 、 $D(12)$ を使った回帰分析の結果が、図表 24 に掲載されている。まず、決定係数を見て、見せかけの相関の可能性を見ておこう。ハール・ウェーブレットを利用した回帰分析の結果を見ると、レベル 4 以上のウェーブレット・ディテールに関する回帰分析の決定係数がほとんど 1 になっている。これまでの分析と併せて考えると、ハール・ウェーブレットを使った場合の回帰分析の結果には、見せかけの相関が発生している可能性が濃厚である。 $D(4)$ や $D(12)$ の場合には、理論上、線形トレンドが取り除かれており、見せかけの相関の可能性を心配する必要はほとんどない。なお、 $D(4)$ と $D(12)$ のいずれを使った場合にも、周期が長くなるほど、決定係数が上昇している。特に、レベル 3 のディテールからレベル 4 のディテールに移行する際に、決定係数が飛躍的に上昇する。すなわち、周期が短いと、消費と所得の相関は不明瞭だが、周期を長く取ると、両者は極めて密接に対応していることが分かる。

本節の冒頭で述べたとおり、ここでの回帰分析は、消費に関する恒常所得仮説の正否を確認する上で、重要なインプリケーションを持つ。 $\theta_{i,t}$ は、消費の所得弾力性と呼ばれる。ここで、*i*の値が大きくなるほど、所得の増加あるいは減少が持続する期間が長くなる。恒常所得仮説が真ならば、所得増加の持続期間が長いほど、消費の増加幅が大きくなる、すなわち、 $\theta_{i,t}$ は*i*の増加関数となるはずである。こうした観点から回帰分析の結果を眺めると、いずれのウェーブレット・フィルターを用いても、分解レベルが高まるにつれて、消費の所得弾力性が上昇していることが観察され、恒常所得仮説が支持されることが分かった。

スケール別の消費の所得弾力性は、景気見通しや経済政策を立案する際に有益な情報となり得る。 $D(4)$ と $D(12)$ の結果を見ると、レベル 1 のディテールにかかるパラメータは無視し得るほど小さい。レベル 2 と 3 のディテールにかかるパラメータはほぼ 0.5 であり、これは、4~8 ヶ月程度のスパンで、1%の所得増が発生すると、消費が 0.5%程度増加することを意味している。次に、レベル 4 のディテールにかかるパラメータは 0.7~0.8、レベル 5 のディテールだと、パラメータは 0.9 と、ほぼ 1 になる。つまり、1 年以上のスパンで所得が増加する

と、ほぼ比例的に消費が上昇するのである。

5 . Maximal Overlap Discrete Wavelet Transform

ここまで説明したウェーブレット解析は、サンプル・サイズが偶数でないと適用できない。このため、奇数のサンプルは切り捨てられなければならない、貴重な情報をみすみす取りこぼしてしまう可能性があった。本節で説明する maximal overlap discrete wavelet (MODWT) は、こうした弱点を補う手法であり、偶数サンプルに限らず、あらゆるサンプル・サイズの系列に適用することができる。もっとも、MODWT は、分散分析が多少面倒になるなど、デメリットもあり、あくまで通常のウェーブレット変換を補完するものと位置付けておくのが無難であろう。

(1) MODWT ウェーブレット・フィルターとウェーブレット変換

MODWT のウェーブレット・フィルターは、通常のウェーブレット・フィルターを使って定義することができる。

$$\tilde{h} = h/\sqrt{2}, \quad \tilde{g} = g/\sqrt{2}. \quad (4-1)$$

これらのフィルターを用いた MODWT の変換・逆変換は、次のピラミッド・アルゴリズムで実行することができる。なお、 $\tilde{v}_0 \equiv x$ である。

< MODWT ウェーブレット変換 >

レベル $i-1$ のスケーリング係数 \tilde{v}_{i-1} を、ウェーブレット・フィルター \tilde{h} に通して、レベル i のウェーブレット係数 \tilde{w}_i を得る。

$$\tilde{w}_{i,t} = \sum_{k=1}^L \tilde{h}_k \tilde{v}_{i-1, \{t-2^{i-1}(k-1)-1 \bmod N\}+1}. \quad (4-2)$$

レベル $i-1$ のスケーリング係数 \tilde{v}_{i-1} を、スケーリング・フィルター \tilde{g} に通して、レベル i のスケーリング係数 \tilde{v}_i を得る。

$$\tilde{v}_{i,t} = \sum_{k=1}^L \tilde{g}_k \tilde{v}_{i-1, \{t-2^{i-1}(k-1)-1 \bmod N\}+1} \quad (4-3)$$

< MODWT ウェーブレット逆変換 >

レベル $i+1$ のウェーブレット係数 \tilde{w}_{i+1} をウェーブレット・フィルター \tilde{h} に通し、レベル $i+1$ のスケーリング係数 \tilde{v}_{i+1} をスケーリング・フィルター \tilde{g} に通し、2つのアウトプットを足すと、レベル i のウェーブレット係数 \tilde{v}_i を得る。

$$\tilde{v}_{i,t} = \sum_{k=1}^L \tilde{h}_k \tilde{w}_{i+1, \{t+2^i(k-1)-1 \bmod N\}+1} + \sum_{k=1}^L \tilde{g}_k \tilde{v}_{i+1, \{t+2^i(k-1)-1 \bmod N\}+1} \quad (4-4)$$

ここで、MODWT は、変換時にダウン・サンプリングしないことに注意しよう。したがって、逆変換するとき、アップ・サンプリングもしない。通常のウェーブレット変換は、原系列に含まれている必要十分な情報量を維持していることを想起すると、MODWT によって得られるウェーブレット係数は、余分な情報を含んでおり、非効率な変換法である²³。

(2) MODWT による消費者物価の分析

MODWT を用いて、第 3 節で展開された消費者物価の分析を行うことができる。図表 25 は、消費者物価をウェーブレット係数に分解したものである。MODWT は、ダウン・サンプリングを行わないので、分解の程度によらず、ウェーブレット係数やスケーリング係数の数は、常に原系列のサンプル・サイズに等しい。図表 26 は、これをウェーブレット・ディテールとスムーズへと逆変換したものである。通常のウェーブレット変換に比べ、全体的に滑らかになっている。図表 27 は、これらを積み上げて、消費者物価の変動を寄与度分解したものである。グラフでは、レベル 1 のディテールを取り除いているが、それでも、消費者物価の細かい動きをかなり正確に追っている。

次に、スケール別の消費者物価関数を推計してみた。推計結果は、図表 28 のとおりである。これによると、MODWT を使った回帰分析は、通常のウェーブレットを用いた場合よりも、全体的に推計パフォーマンスが低下している。まず、レベル 1、2 のみならず、レベル 3 のウェーブレット・ディテールでも、消

²³ 前章までに説明したウェーブレット変換は直交変換であったが、MODWT はもはや直交変換ではない。

費者物価を説明する有意な変数はなかった。輸入物価が説明できるのは、レベル3のディテールのみ、需給ギャップが説明できるのは、レベル5のディテールとスムーズだけであった。したがって、全体としての決定係数も0.384に止まり、ウェーブレット変換を行わない場合(0.330)よりは高いが、通常のウェーブレット変換の場合(0.440)よりは低い。このことは、MODWTを使うよりも、サンプル・サイズの制約を受けながらも、通常のウェーブレットを使う方が、精緻な消費者物価関数を推計できる可能性があることを示唆している。

6 . むすび

本稿では、近年、応用科学の分野で注目を集めつつあるウェーブレット解析について、実践的な解説を行い、あわせて、経済学における応用可能性を探った。不規則な変動を示す経済データを時間周波数分析することを可能にするウェーブレット解析は、経済学の分野でも広く応用できる潜在性を有している。

本稿では、実際に、消費者物価の分析にウェーブレット解析を利用し、その有用性を実証した。分析の結果、次のようなことが分かった。

- ・ 消費者物価の変動は、8ヶ月以上の波を捉えたウェーブレット・スムーズを観察することによって、趨勢を把握することができる。
- ・ 消費者物価変動のうち、1~4ヶ月程度の超短期の波は、需給ギャップや輸入物価では説明できない。
- ・ 輸入物価は、消費者物価の短期(8~32ヶ月程度)の変動要因である。
- ・ 需給ギャップは、消費者物価の中期(16ヶ月~)の変動要因である。
- ・ ウェーブレットによって、消費者物価関数のフィットは改善する。
- ・ MODWTは、全てのサンプル・サイズの時系列に適用できるが、消費者物価関数の推計パフォーマンスは、通常のウェーブレットに劣ることがある。

また、本稿では、家計の消費と所得の関係をウェーブレット解析によって検証することを試みた。分析の結果、次のようなことが分かった。

- ・ 所得の増加が持続する期間が長いほど、消費を所得に回帰した場合の決定係数が上昇する。つまり、両者の関係は、周期が短いと(~8ヶ月程度)は

っきりしないが、周期が長くなると（16ヶ月～）鮮明化する。

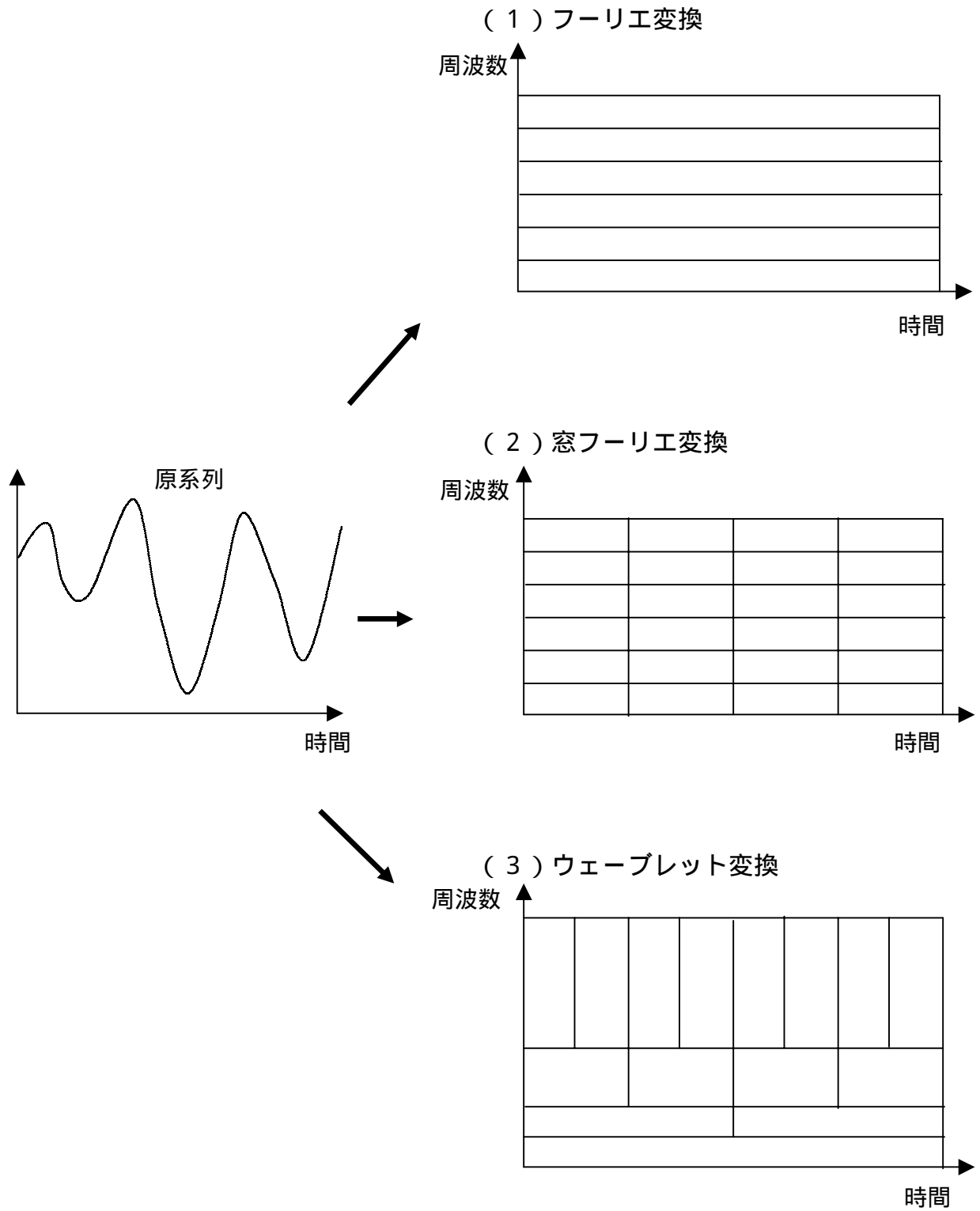
- ・所得の増加が持続する期間が長いほど、消費の所得弾力性が上昇する。これは、家計消費は、一時的な所得増加に対しては反応しないが、恒久的な増加に対しては反応するという恒常所得仮説を支持するものである。

ウェーブレット解析の応用可能性は、本稿で紹介した分析に止まらない。例えば、賃金変動と物価変動のスケール毎の相関をチェックするのも興味深い。とはいえ、ウェーブレット解析の経済学への応用は緒に就いたばかりであり、その潜在性を見極めるためにも、多くの実証研究が蓄積されることが望まれる。

【参考文献】

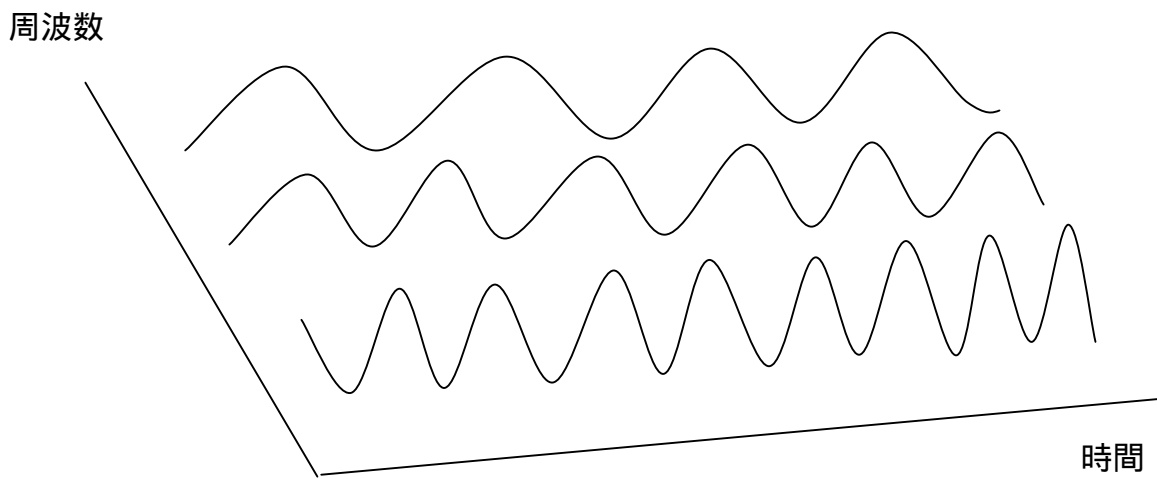
- 新井 康平 (2000) 「ウェーブレット解析の基礎理論」、森北出版株式会社
- 鎌田 康一郎・増田 宗人 (2001) 「統計の計測誤差がわが国の GDP ギャップに与える影響」『金融研究』第 20 巻第 2 号、日本銀行金融研究所
- 榊原 進 (1995) 「ウェーブレット ビギナーズガイド」、東京電機大学出版局
- Chui, C. K. (1992), *Introduction to Wavelets*, Academic Press, New York. チューイ (1993) 「ウェーブレット入門」、桜井明・新井勉 訳、東京電機大学出版局
- Conway, P., and D. Frame (2000), “A Spectral Analysis of New Zealand Output Gaps Using Fourier and Wavelet Techniques,” Reserve Bank of New Zealand Discussion Paper Series, DP2000/06.
- Gençay, R., F. Selçuk, and B. Whitcher (2002), *An Introduction to Wavelets and Other Filtering Methods in Finance and Economics*, Academic Press, San Diego.
- Goldstein, M., and M. S. Khan (1985), “Income and Price Effects in Foreign Trade,” in *Handbook of International Economics* (ed., R. W. Jones and P. B. Kenen), Vol. II, pp.200-25.
- Percival, D. B., and A. T. Walden (2000), *Wavelet Methods for Time Series Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Ramsey, J. B., and C. Lampart (1998), “The Decomposition of Economic Relationships by Time Scale Using Wavelets: Expenditure and Income,” *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*, Vol. 3, Iss. 1, pp. 23-42.
- Schleicher, C. (2002), “An Introduction to Wavelets for Economists,” Bank of Canada Working Paper, 2002-3.
- Walker, J. S. (1999), *A Primer on Wavelets and their Scientific Application*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton.

ウェーブレット解析とフーリエ解析 (その1)

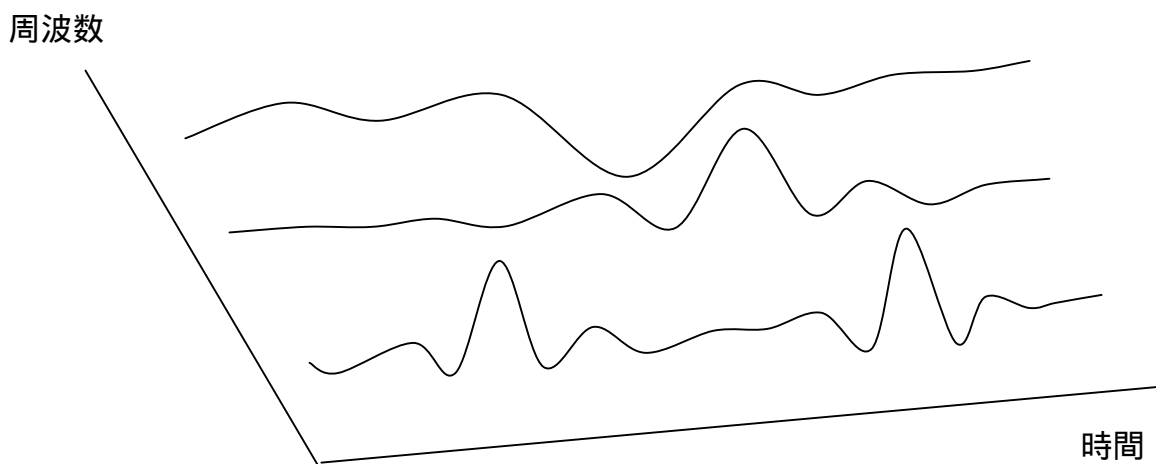


ウェーブレット解析とフーリエ解析 (その 2)

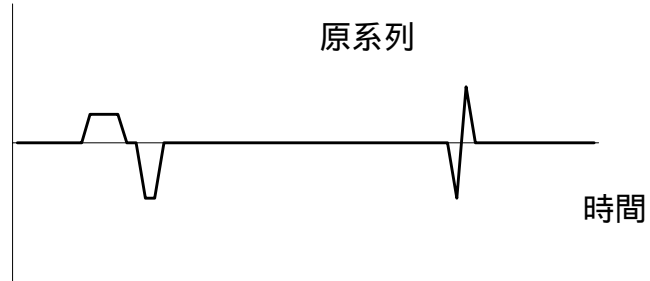
(1) フーリエ解析



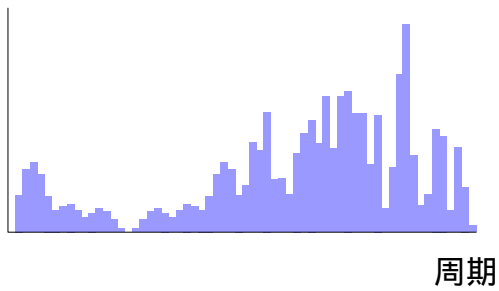
(2) ウェーブレット解析



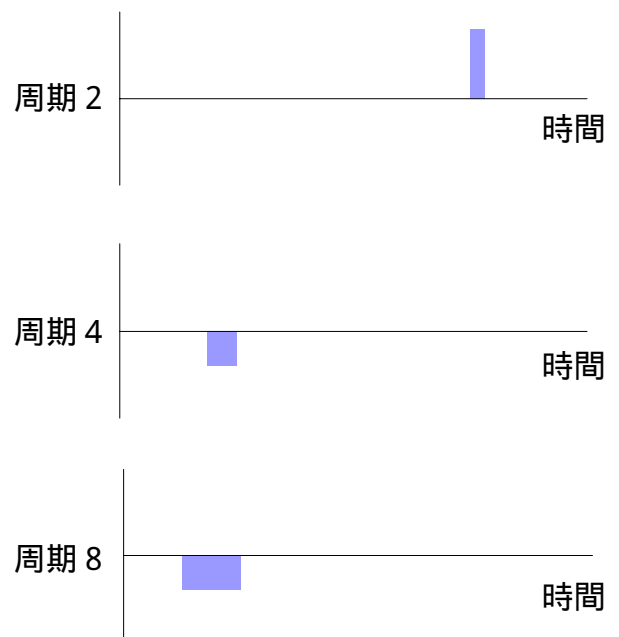
非定常データの解析例



(1) フーリエ変換



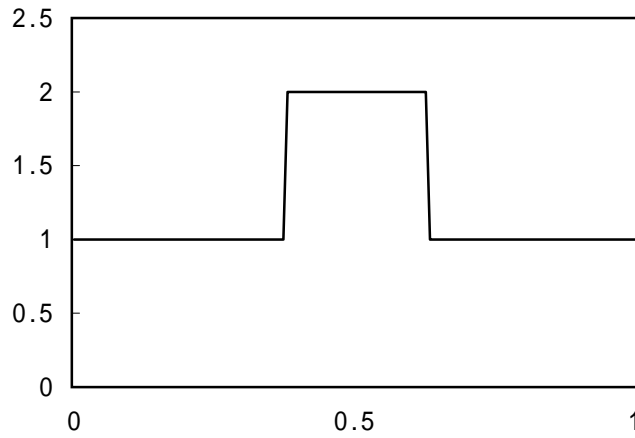
(2) ウェーブレット変換



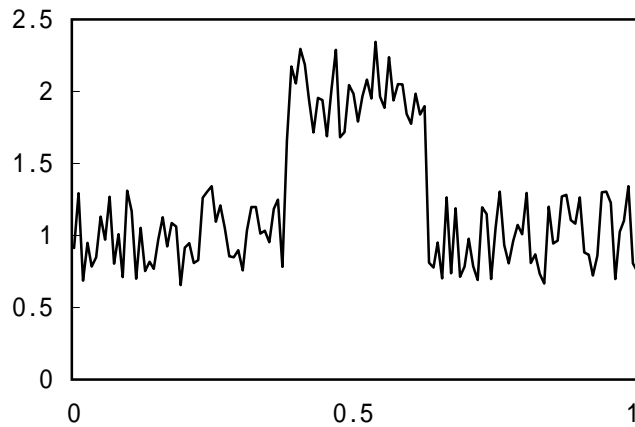
(注) ハール・ウェーブレットを使用。

ステップ関数のノイズ除去

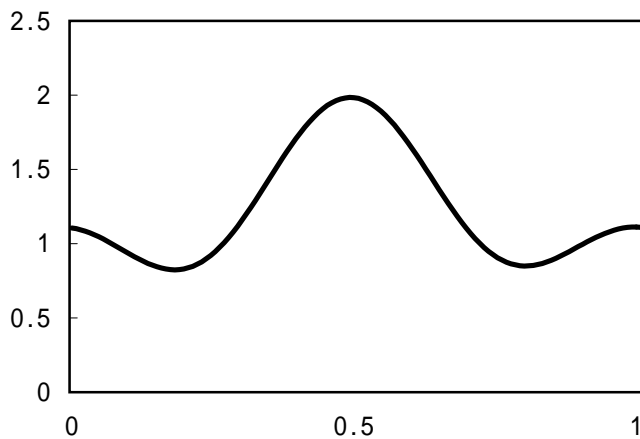
(1) 真のデータ



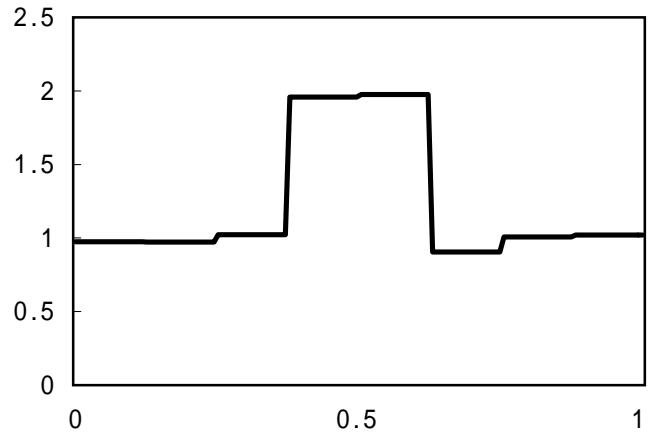
(2) ノイズを含むデータ



(3) フーリエ解析によるノイズ除去



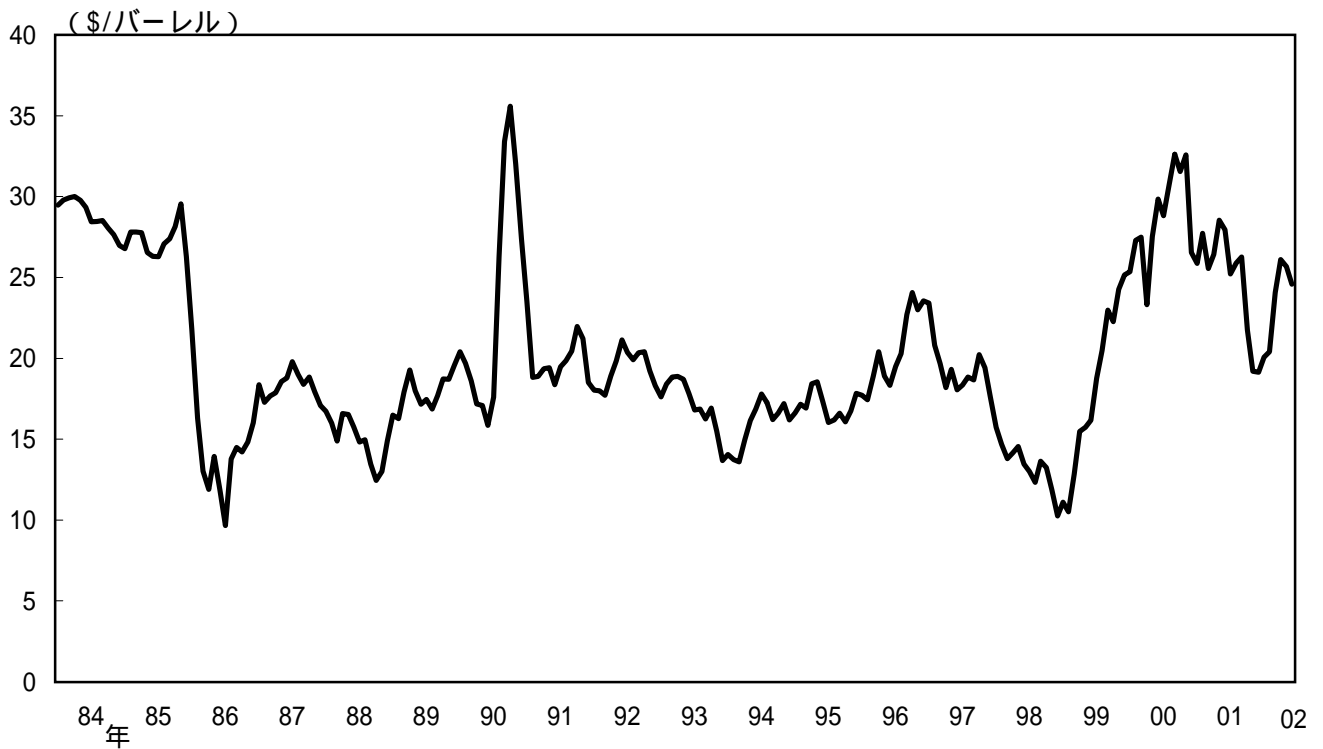
(4) ウェーブレット解析によるノイズ除去



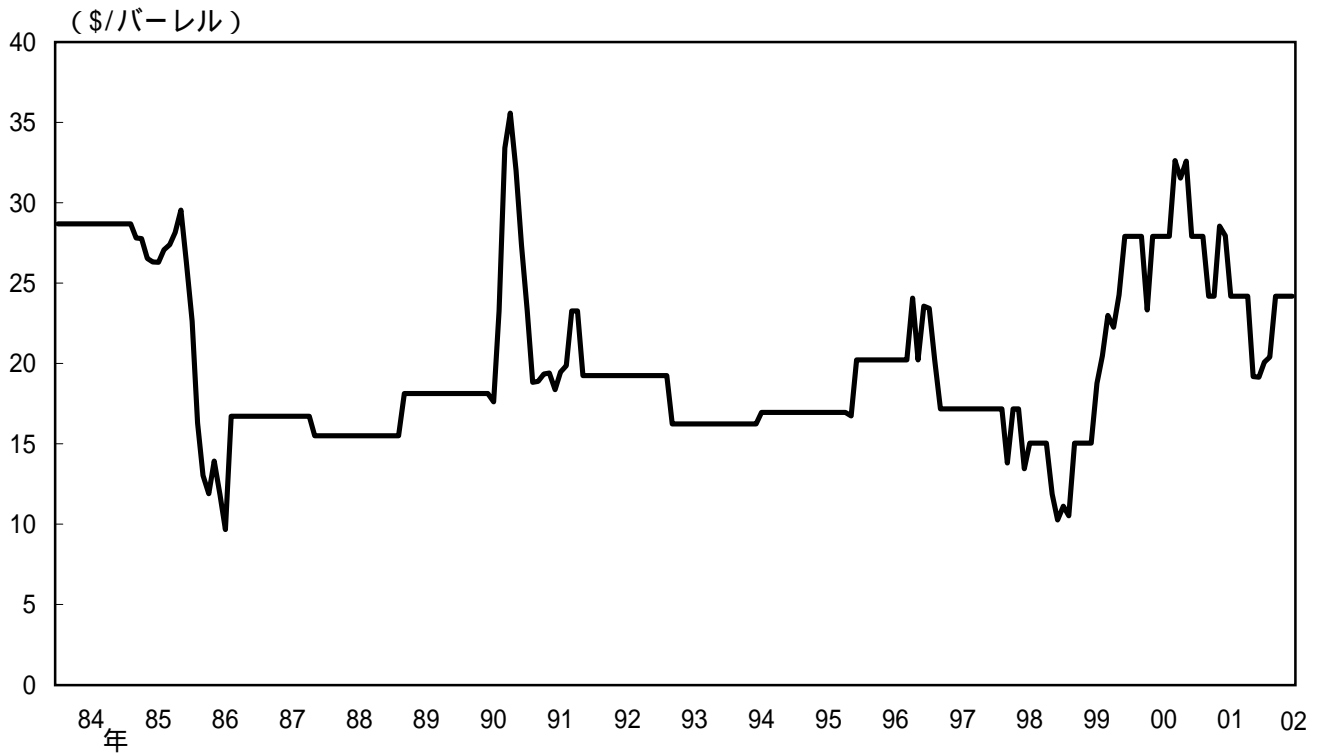
(注) 1. ハール・ウェーブレットを使用。
2. 解像度4。

原油価格データのノイズ除去

(1) 北海ブレント・スポット価格・月中平均

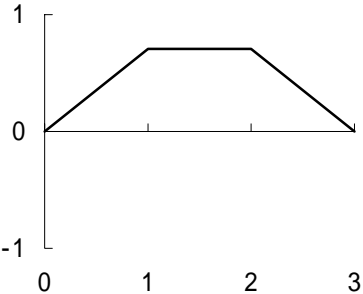
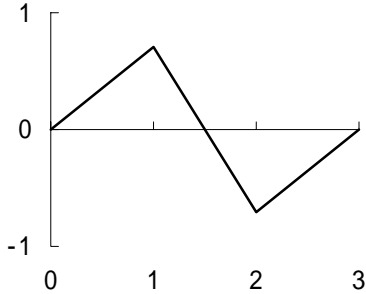
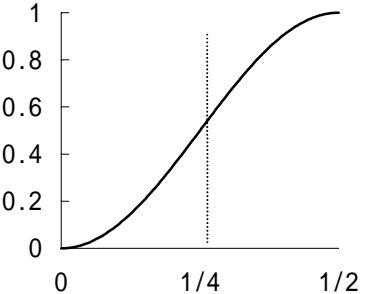
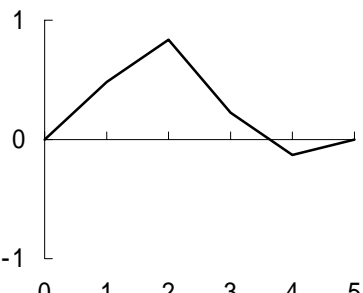
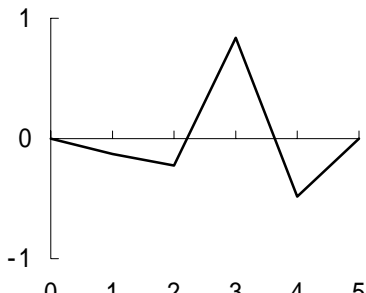
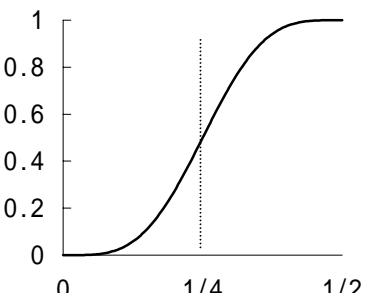
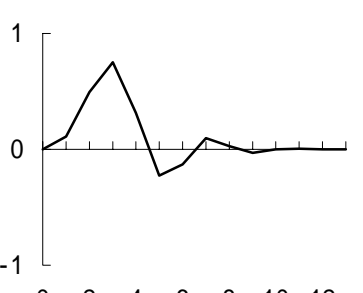
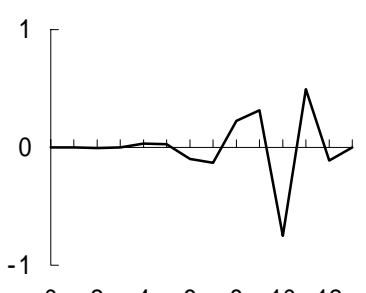
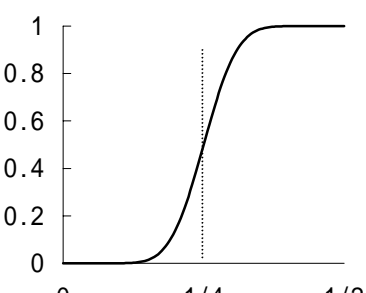
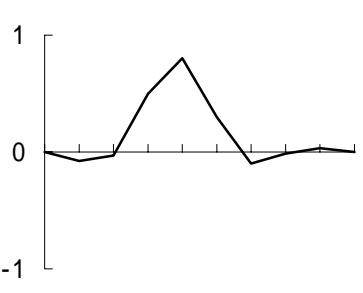
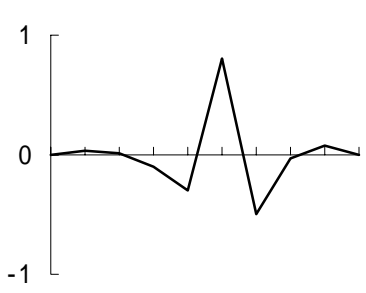
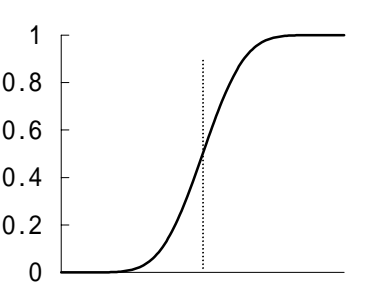
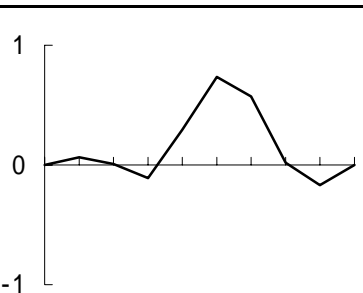
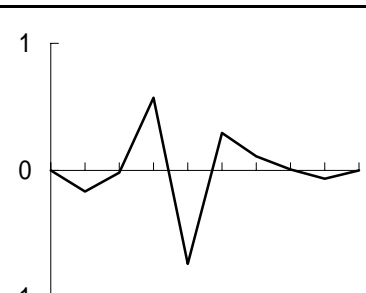
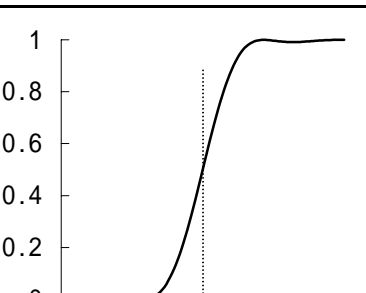


(2) ノイズ除去後



(注) 1. ハール・ウェーブレットを使用。
2. 標準偏差1単位分を閾値とするハード・スレシヨールディング。

ウェーブレット・フィルターとその周波数特性

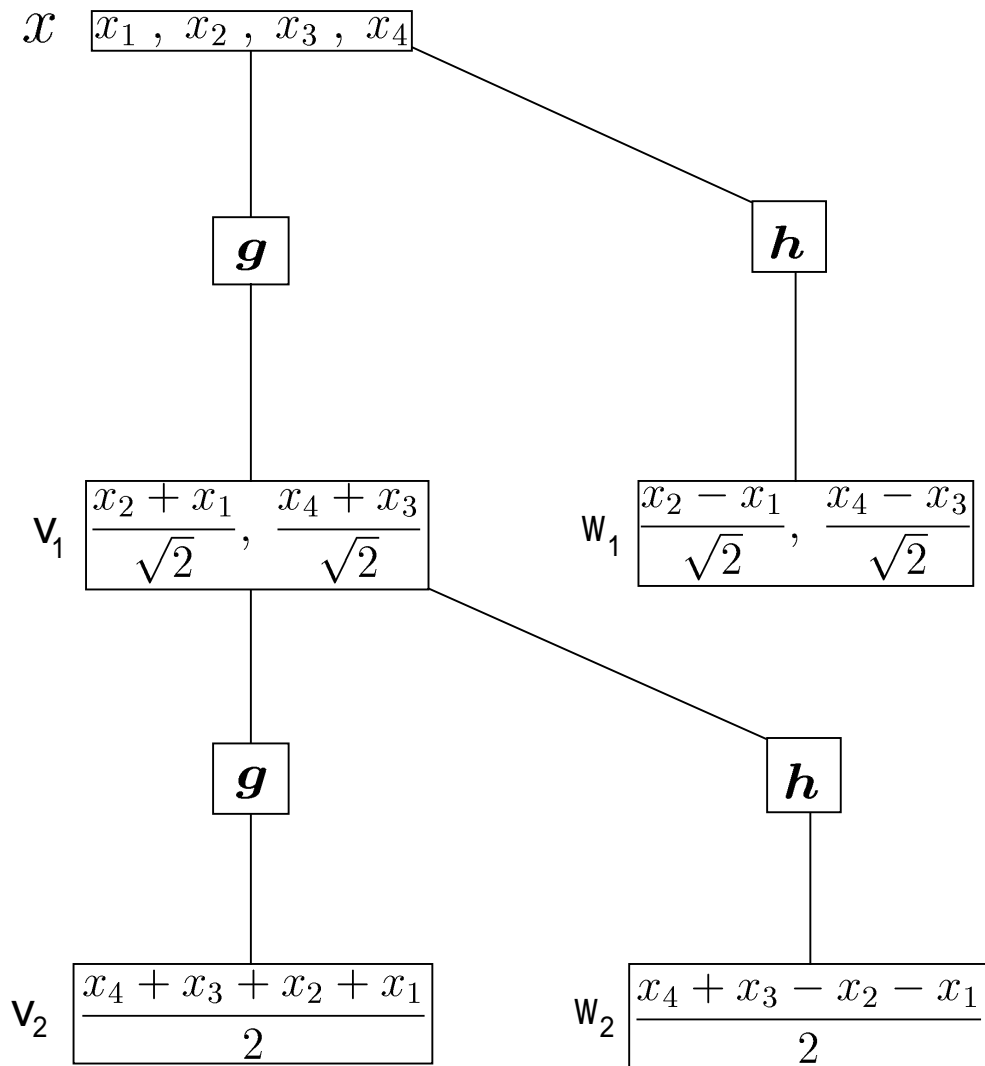
	スケーリング・フィルター	ウェーブレット・フィルター	ウェーブレット・フィルターのスペクトル密度
(1) ハール			
(2) D(4)			
(3) D(12)			
(4) LA(8)			
(5) MB(8)			

ウェーブレット・フィルターの具体的数値

	スケーリング・フィルター	ウェーブレット・フィルター
(1) ハール		
1	0.70710678	0.70710678
2	0.70710678	-0.70710678
(2) D(4)		
1	0.48296291	-0.12940952
2	0.83651630	-0.22414387
3	0.22414387	0.83651630
4	-0.12940952	-0.48296291
(3) D(12)		
1	0.11154074	-0.00107730
2	0.49462389	-0.00477726
3	0.75113391	0.00055384
4	0.31525035	0.03158204
5	-0.22626469	0.02752287
6	-0.12976687	-0.09750161
7	0.09750161	-0.12976687
8	0.02752287	0.22626469
9	-0.03158204	0.31525035
10	0.00055384	-0.75113391
11	0.00477726	0.49462389
12	-0.00107730	-0.11154074
(4) LA(8)		
1	-0.07576571	0.03222310
2	-0.02963553	0.01260397
3	0.49761867	-0.09921954
4	0.80373875	-0.29785780
5	0.29785780	0.80373875
6	-0.09921954	-0.49761867
7	-0.01260397	-0.02963553
8	0.03222310	0.07576571
(5) MB(8)		
1	0.06436345	-0.16736190
2	0.00710602	-0.01847751
3	-0.11086730	0.57257710
4	0.29478550	-0.73513310
5	0.73513310	0.29478550
6	0.57257710	0.11086730
7	0.01847751	0.00710602
8	-0.16736190	-0.06436345

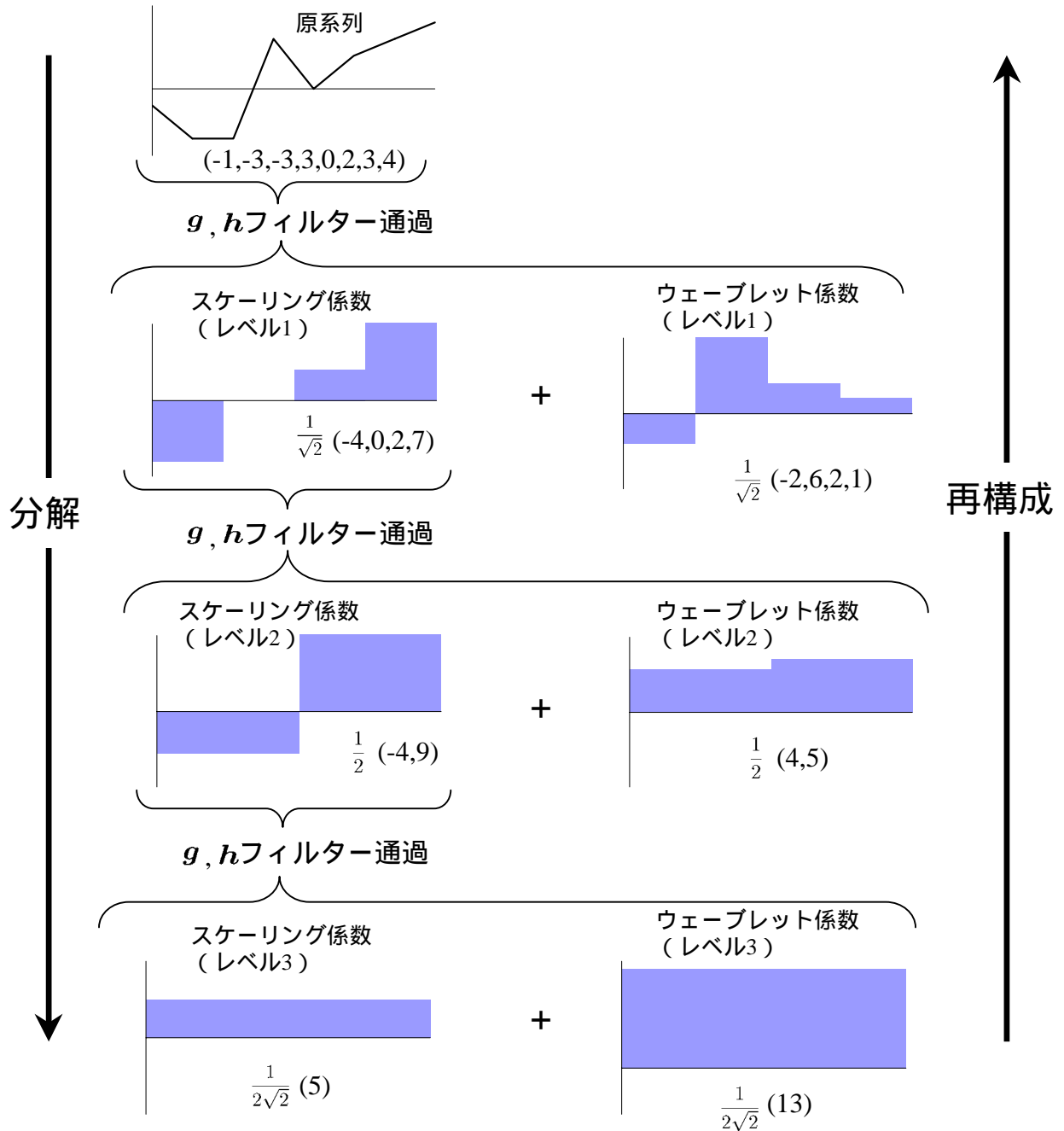
(資料) Gençay, *et al.* (2002)

ピラミッド・アルゴリズム (ハール)



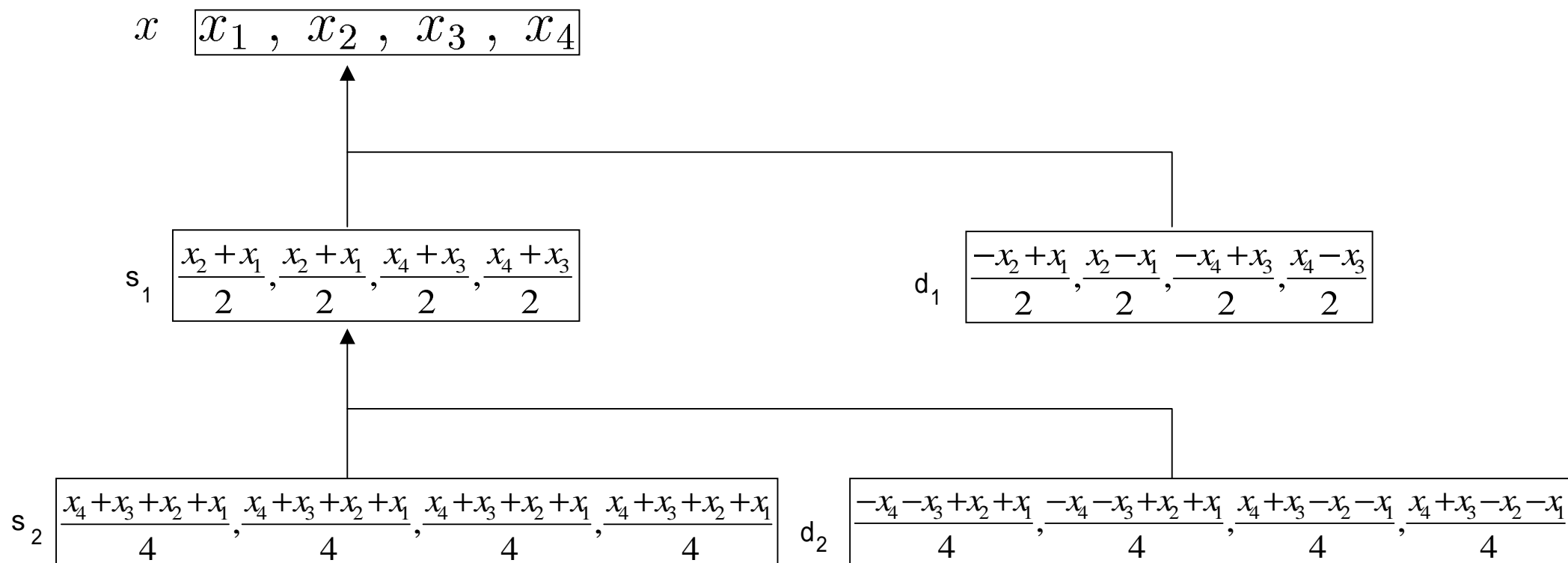
(注) ハール・ウェーブレット: $g = \frac{1}{\sqrt{2}} [1 \ 1]$, $h = \frac{1}{\sqrt{2}} [1 \ -1]$

分解・再構成の数値例 (ハール)



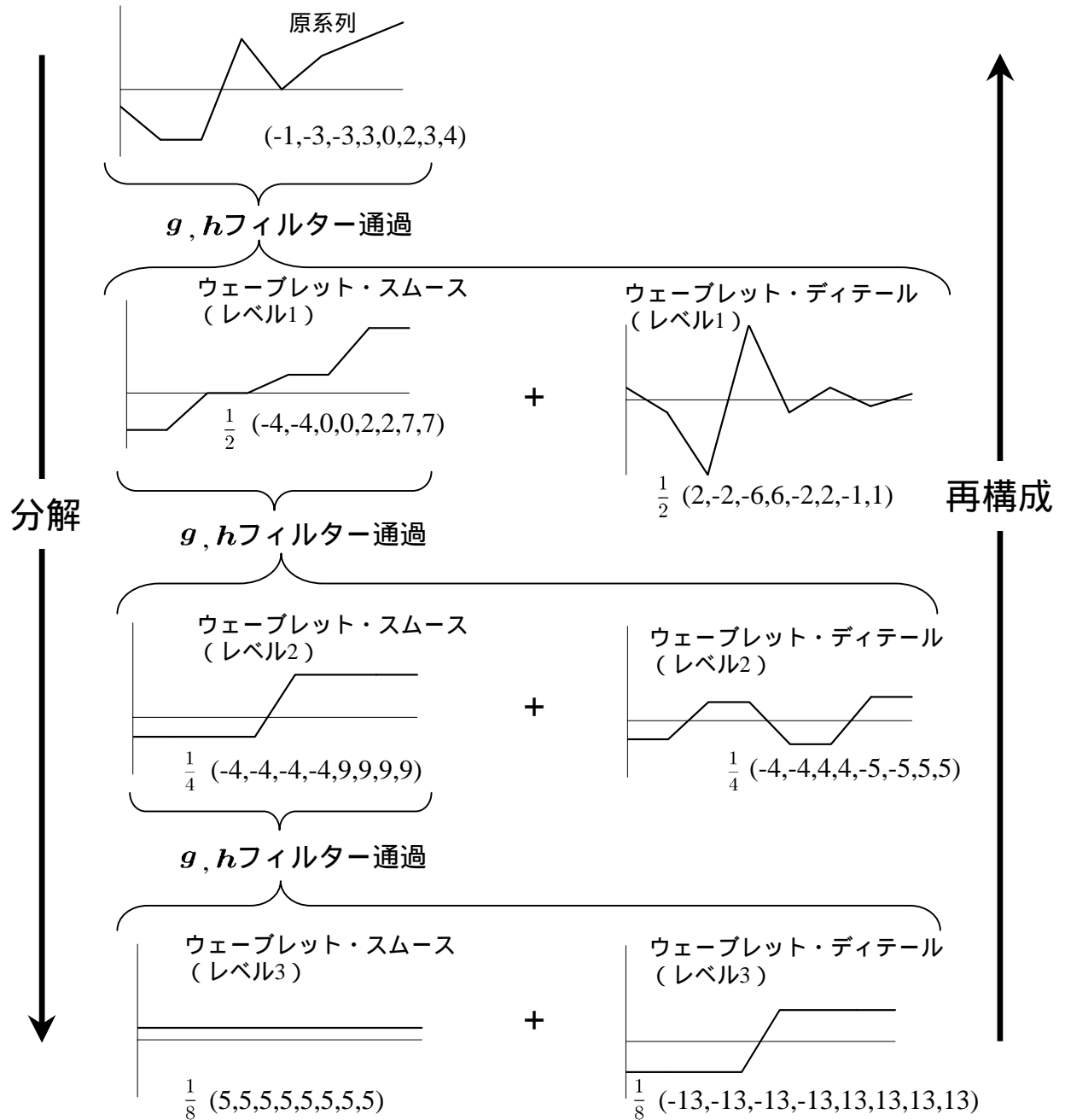
(注) ハール・ウェーブレット: $g = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$, $h = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$

多重解像度解析 (ウェーブレット・ディテールとスムーズ)



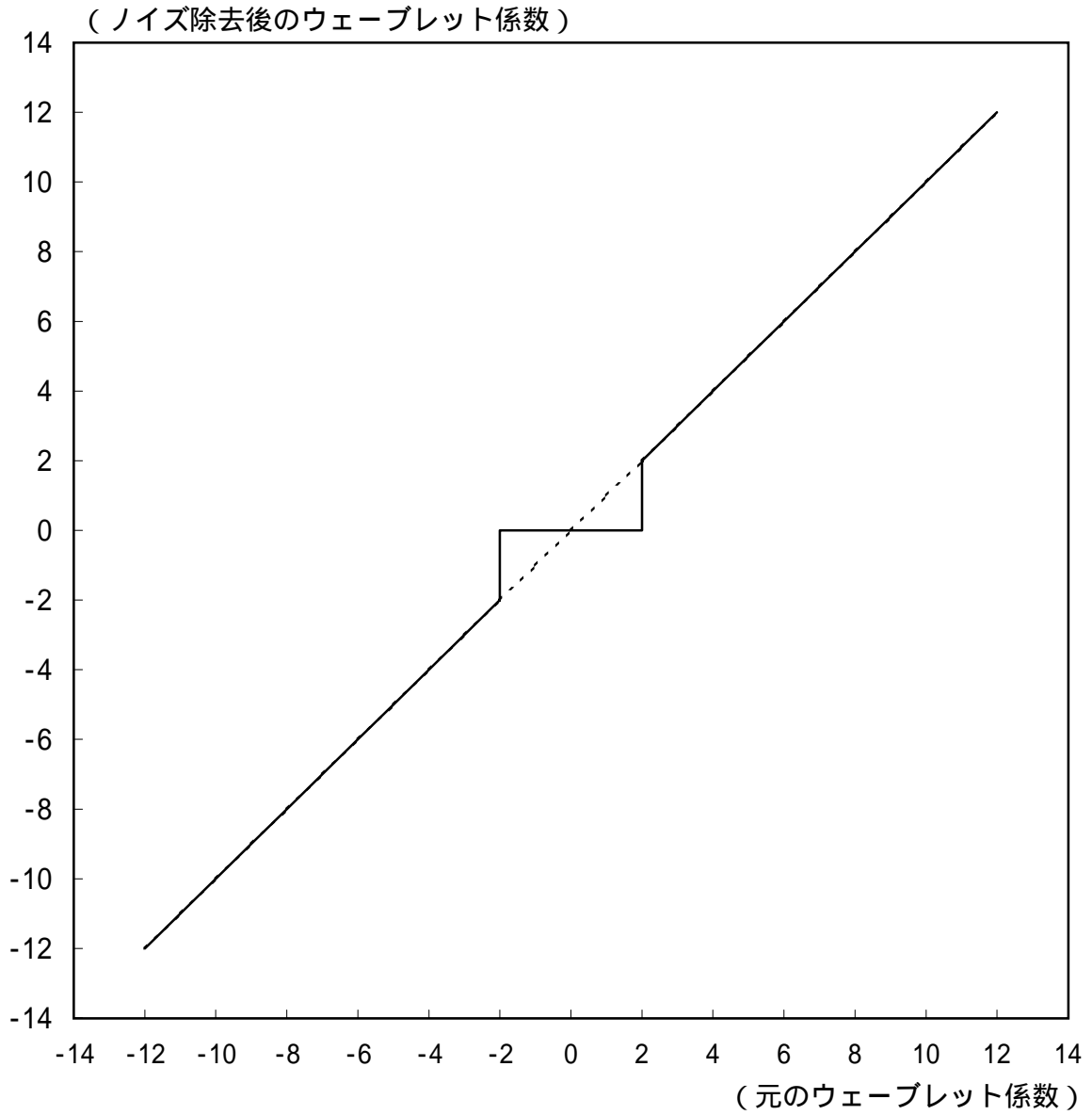
(注) ハール・ウェーブレット : $g = \frac{1}{\sqrt{2}} [1 \ 1]$, $h = \frac{1}{\sqrt{2}} [1 \ -1]$

多重解像度解析の数値例 (ハール)

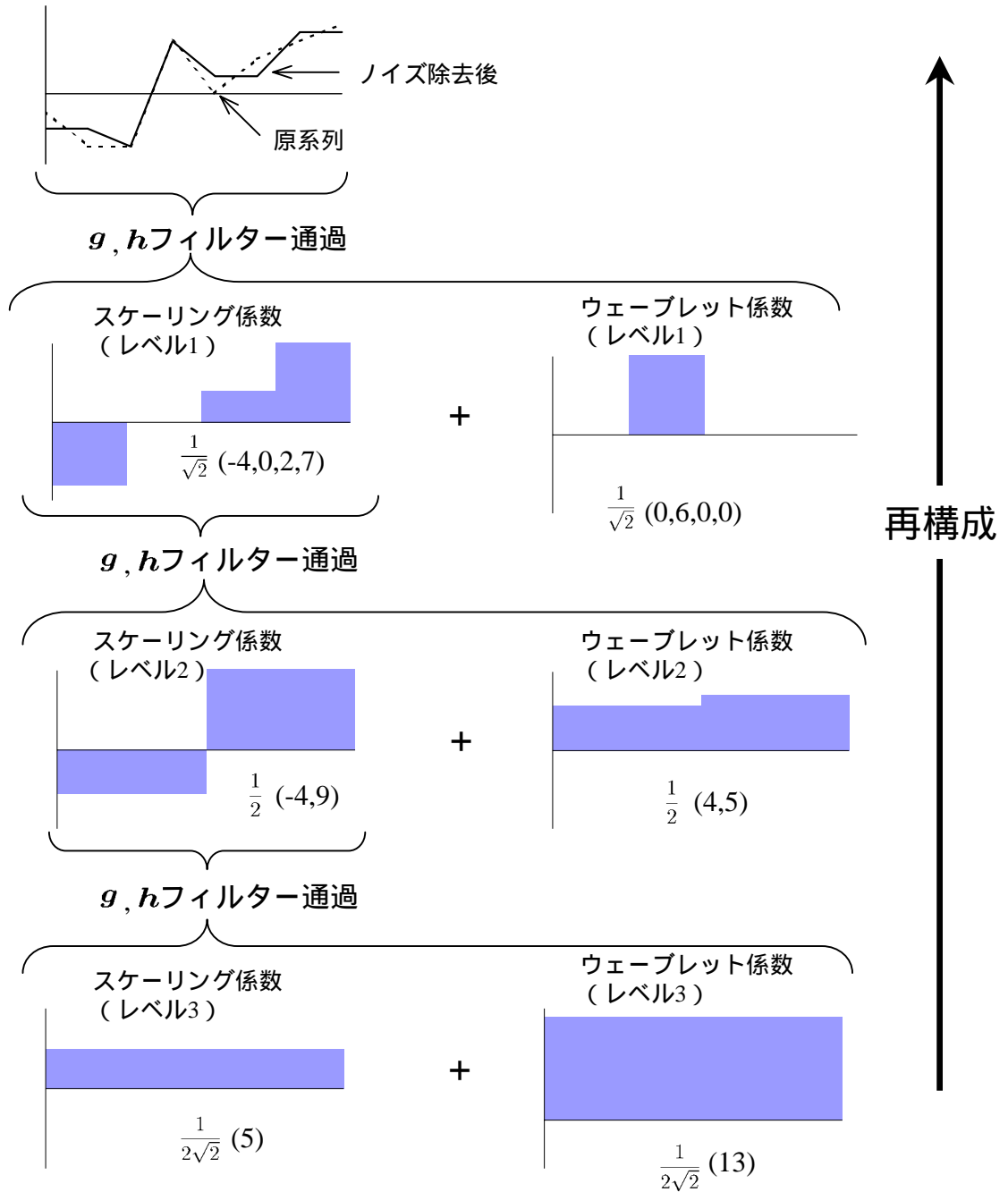


(注) ハール・ウェーブレット: $g = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$, $h = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$

ノイズ除去のルール (Hard Thresholding)

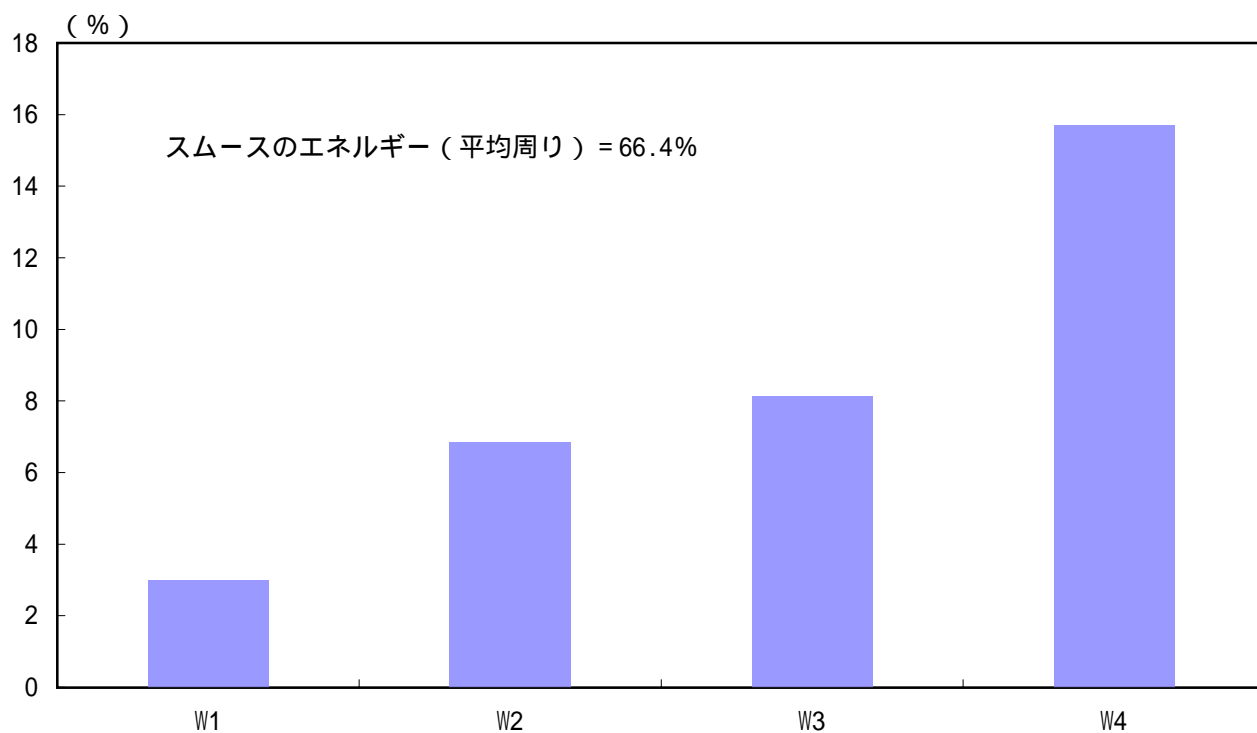


ノイズ除去の数値例 (ハール)



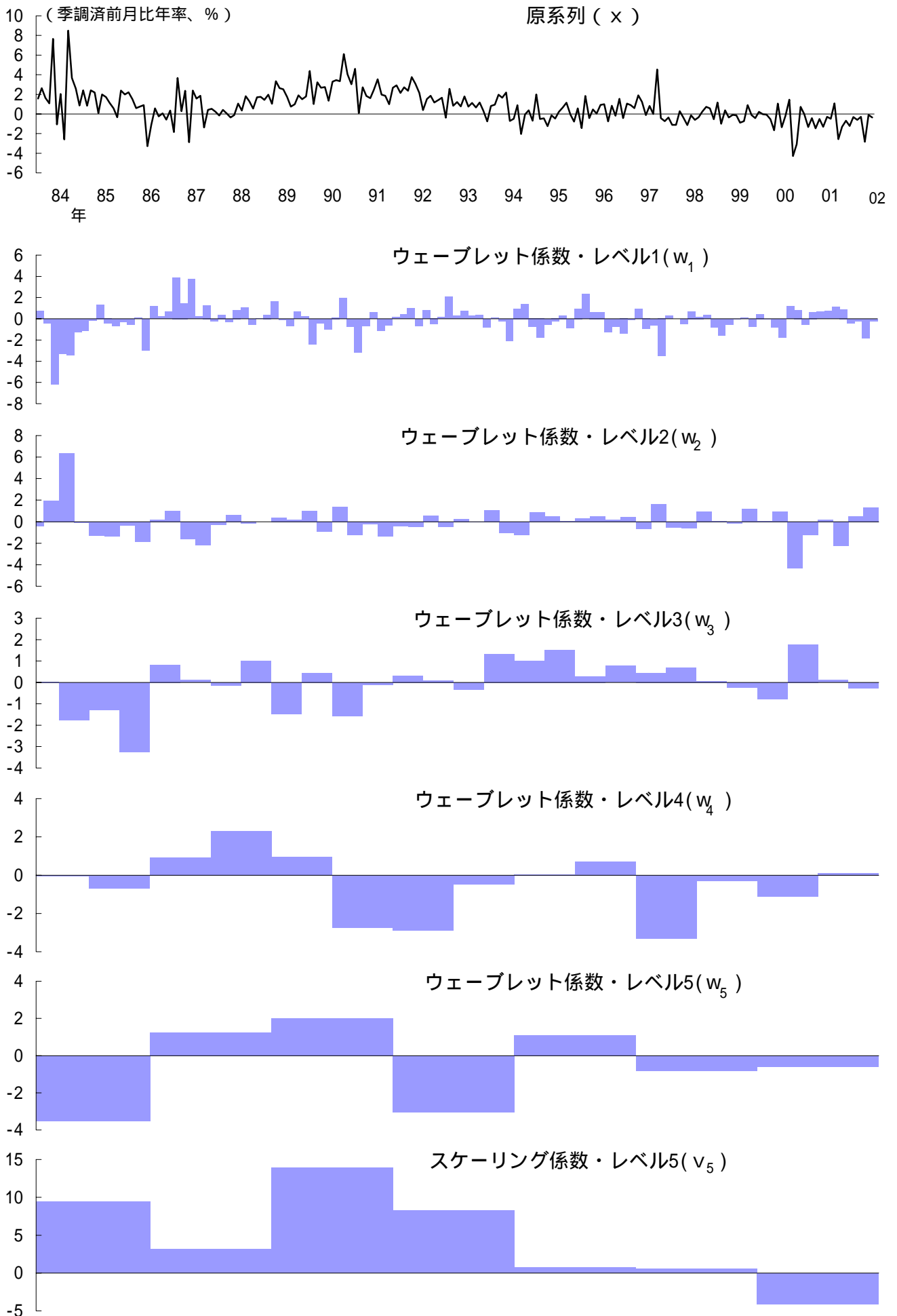
(注) ハール・ウェーブレット: $g = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$, $h = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$

原油価格のエネルギー分析



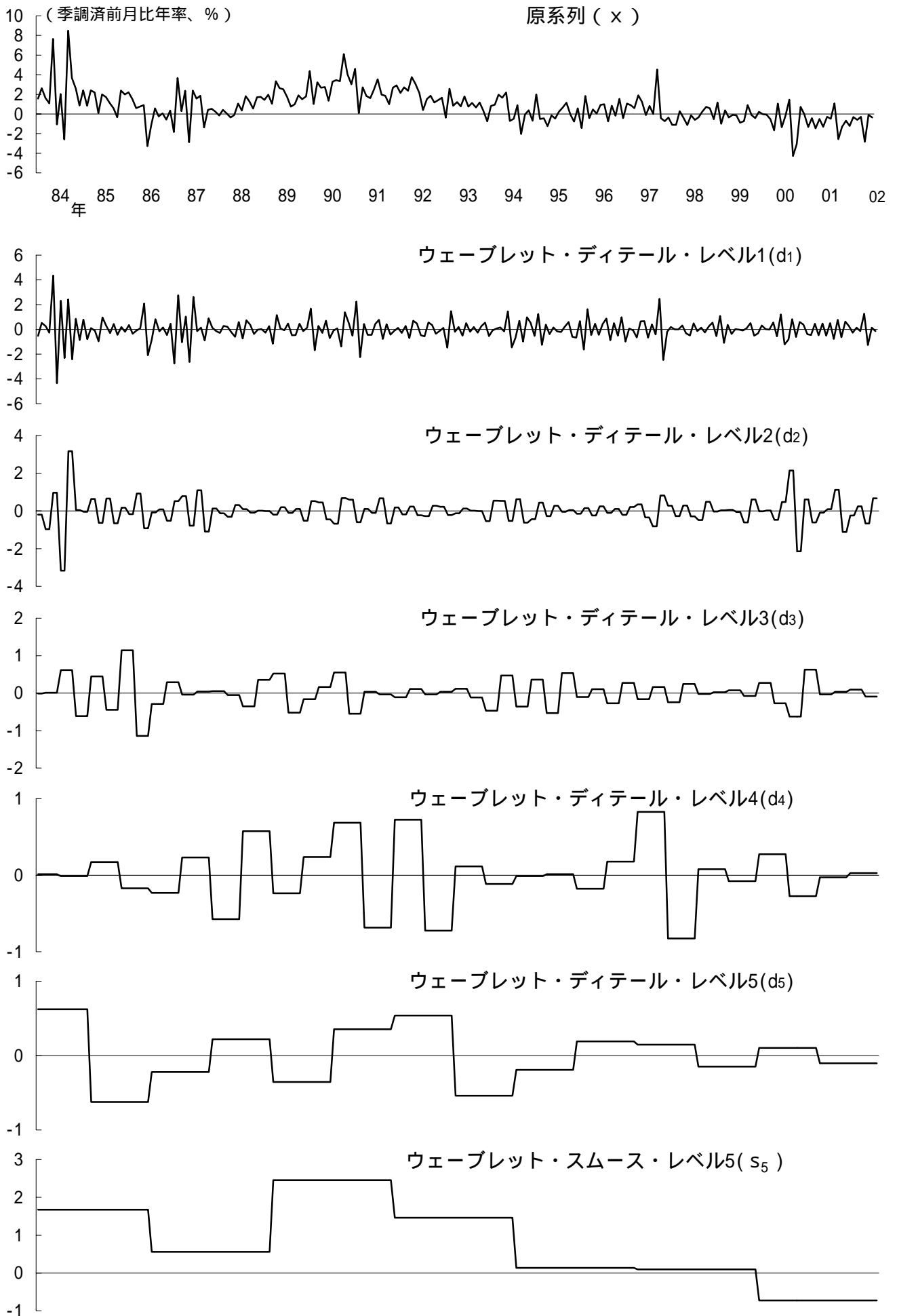
(注) 平均周りの原系列のエネルギー量が100になるように規格化。

消費者物価のウェーブレット係数・スケーリング係数(ハール)



(資料) 総務省「消費者物価指数」

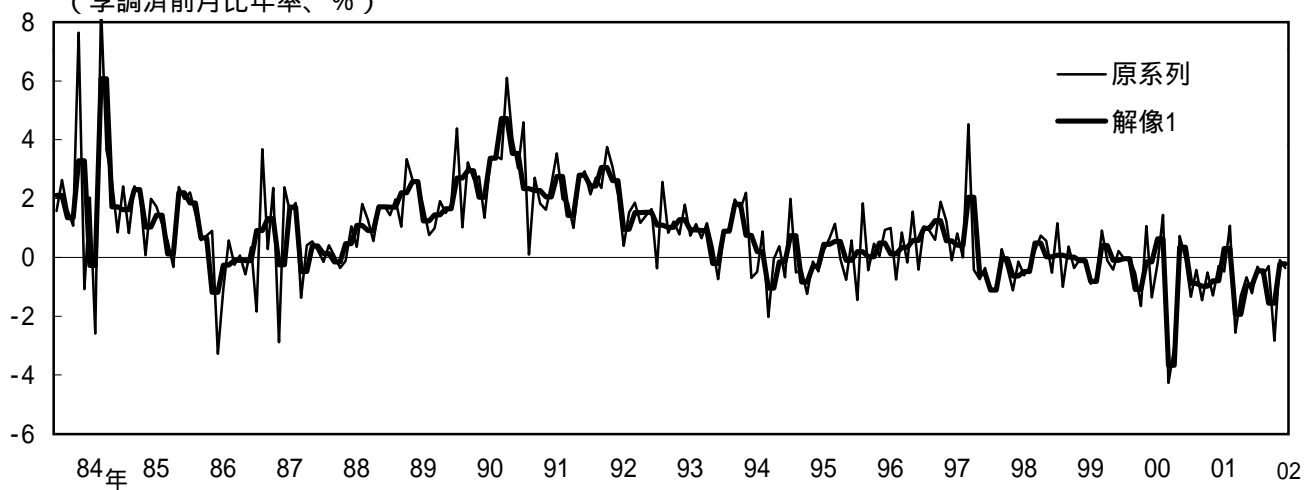
消費者物価のウェーブレット・ディテールとスムーズ(ハール)



消費者物価の多重解像度解析 (ハール)

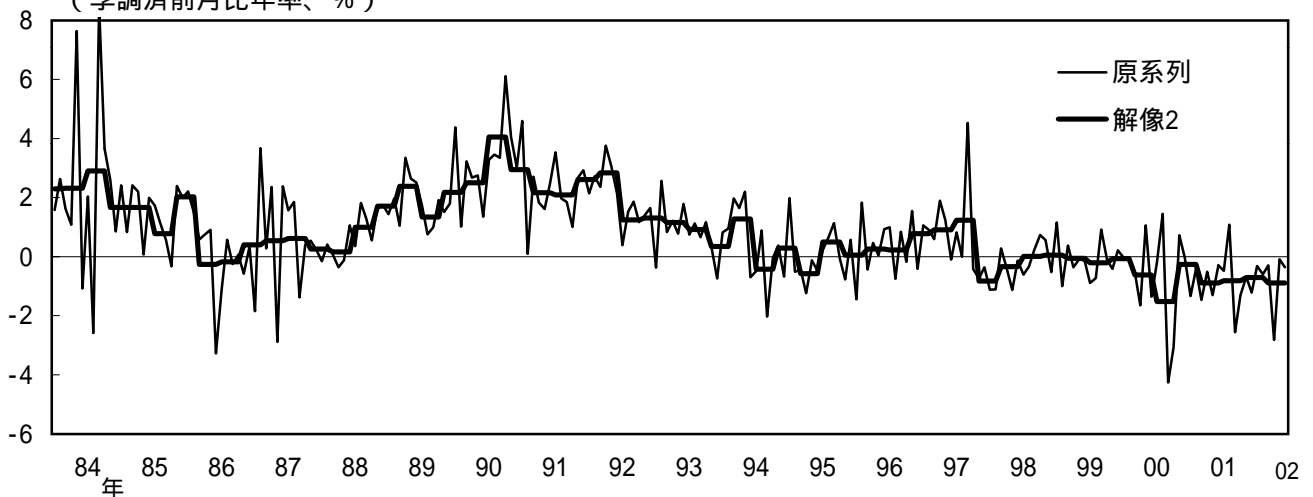
(1) 解像度 1

(季調済前月比年率、%)



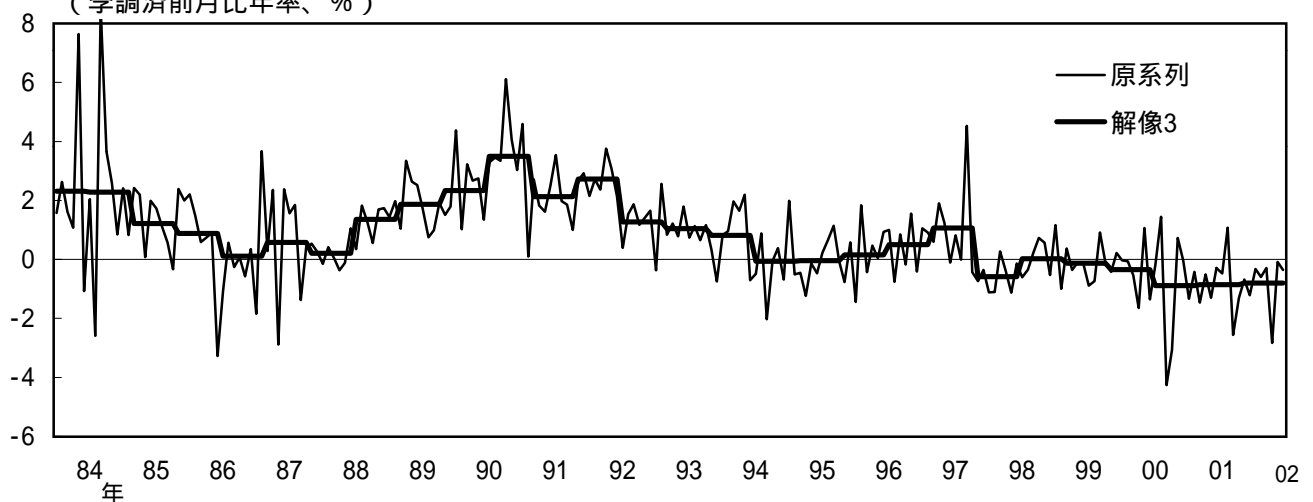
(2) 解像度 2

(季調済前月比年率、%)



(3) 解像度 3

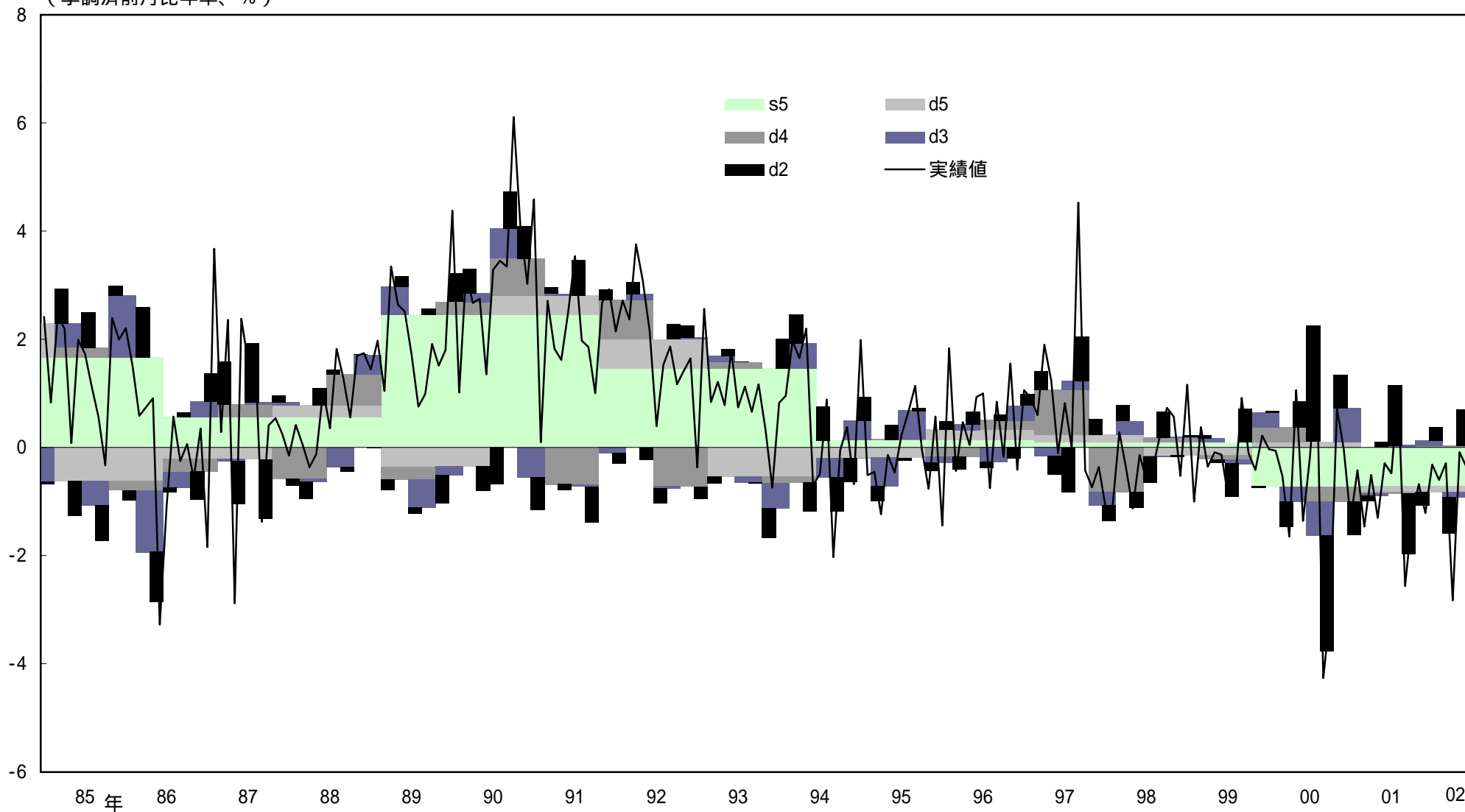
(季調済前月比年率、%)



(資料) 総務省「消費者物価指数」

消費者物価の寄与度分解(ハール)

(季調済前月比年率、%)



(資料) 総務省「消費者物価指数」

スケール別消費者物価関数

	定数項 (t値)	需給ギャップ 係数	<ラグ> (t値)	輸入物価 係数	<ラグ> (t値)	R ²
(1) ハール						
ディテール・レベル1(d ₁)	- (-)	-	<-> (-)	-	<-> (-)	0.1未満
レベル2(d ₂)	- (-)	-	<-> (-)	-	<-> (-)	0.1未満
レベル3(d ₃)	0 (0)	-	<-> (-)	0.023	<0> (11.8)	0.387
レベル4(d ₄)	0 (0)	0.536	<0> (18.1)	0.013	<21> (9.7)	0.716
レベル5(d ₅)	0 (0)	0.273	<1> (19.8)	0.031	<24> (13.5)	0.728
スムーズ・レベル5(s ₅)	4.229 (86.8)	0.572	<7> (73.1)	-	<-> (-)	0.960
(2) D(12)						
ディテール・レベル1(d ₁)	- (-)	-	<-> (-)	-	<-> (-)	0.1未満
レベル2(d ₂)	-0.002 (-0.0)	0.221	<0> (1.9)	0.017	<14> (5.3)	0.117
レベル3(d ₃)	0.000 (0.0)	0.374	<5> (3.4)	0.012	<0> (7.4)	0.238
レベル4(d ₄)	0.003 (0.1)	-	<-> (-)	0.019	<4> (8.2)	0.234
レベル5(d ₅)	-0.020 (-0.3)	0.156	<0> (16.2)	0.015	<20> (10.0)	0.645
スムーズ・レベル5(s ₅)	3.909 (59.8)	0.507	<3> (49.3)	0.027	<22> (9.8)	0.928
(3) 分解なし						
	3.250 (13.6)	0.413	<7> (11.5)	0.008	<1> (2.2)	0.330

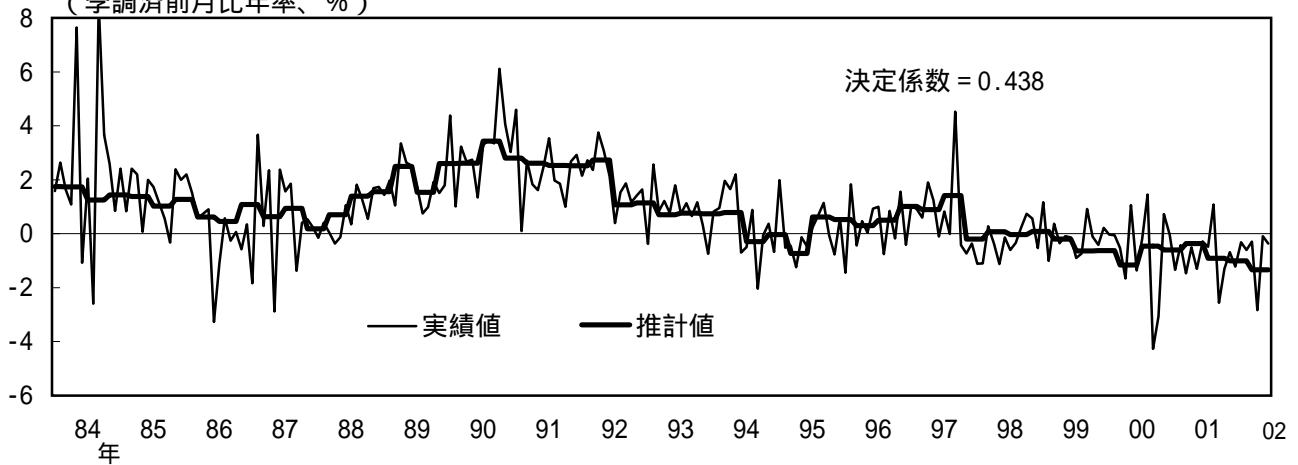
(注) 推計期間は1983年11月～2002年6月。

(資料) 総務省「消費者物価指数」等

消費者物価関数の当てはまり

(1) ハール・ウェーブレット

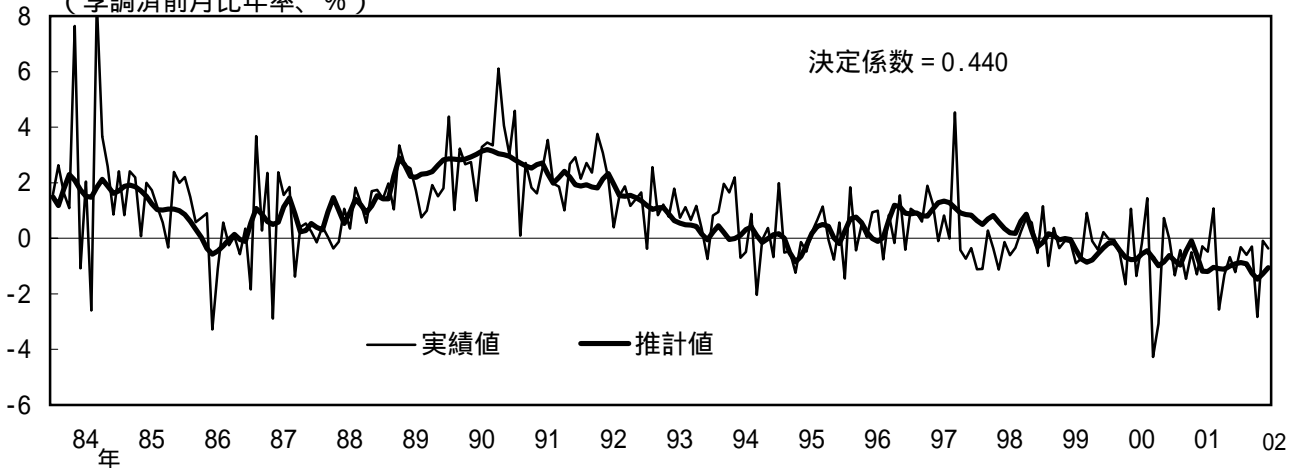
(季調済前月比年率、%)



(注) レベル3~5のディテールとレベル5のスムースを使用。

(2) ドビッシー・ウェーブレットD(12)

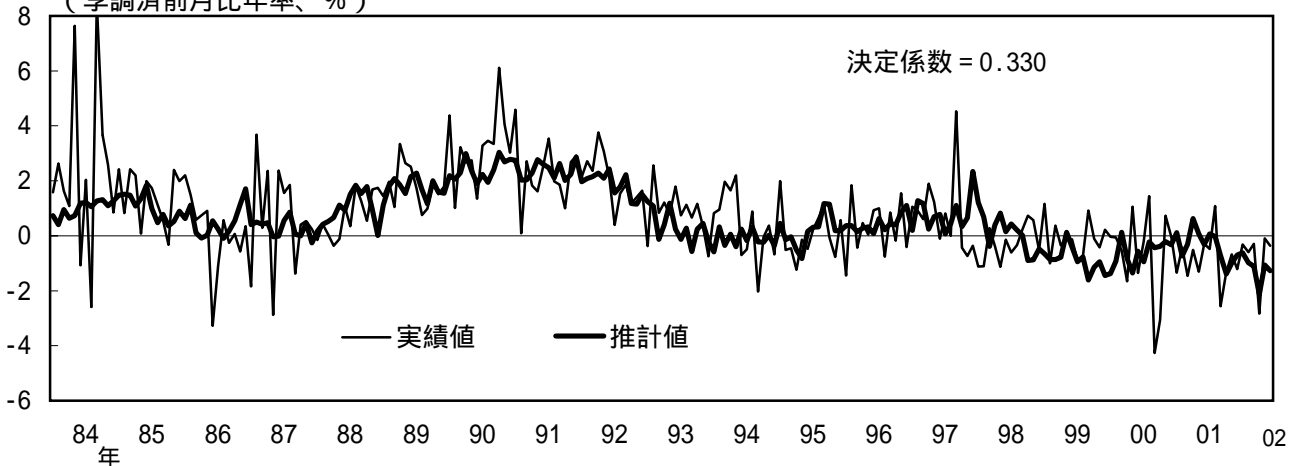
(季調済前月比年率、%)



(注) レベル2~5のディテールとレベル5のスムースを使用。

(3) ウェーブレット分解しないケース

(季調済前月比年率、%)

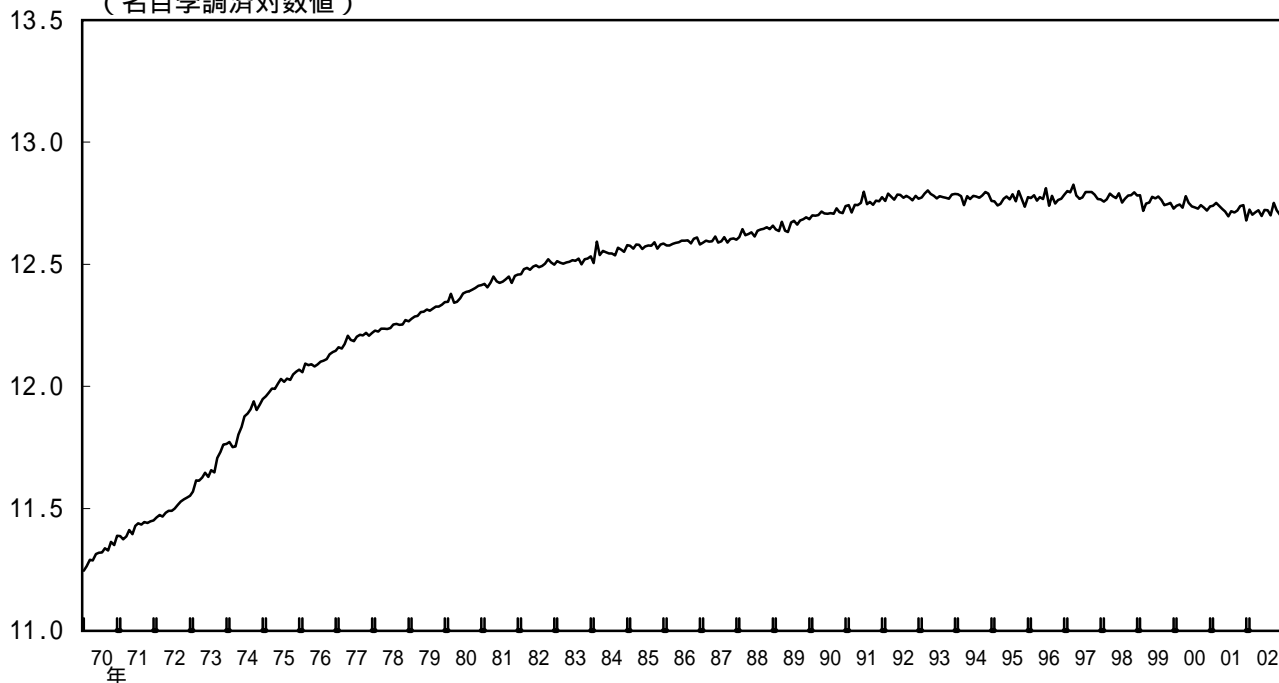


(資料) 総務省「消費者物価指数」等

家計調査ベースの消費と可処分所得

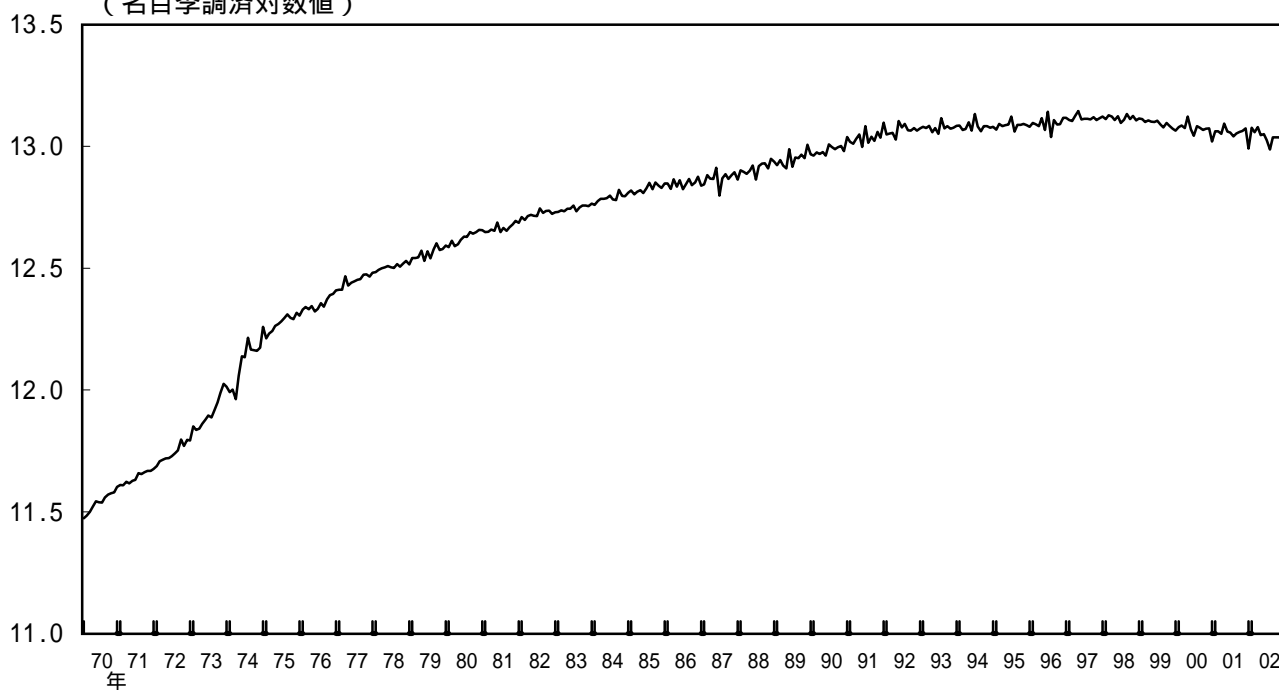
(1) 消費 < 勤労者世帯 >

(名目季調済対数値)



(2) 可処分所得 < 勤労者世帯 >

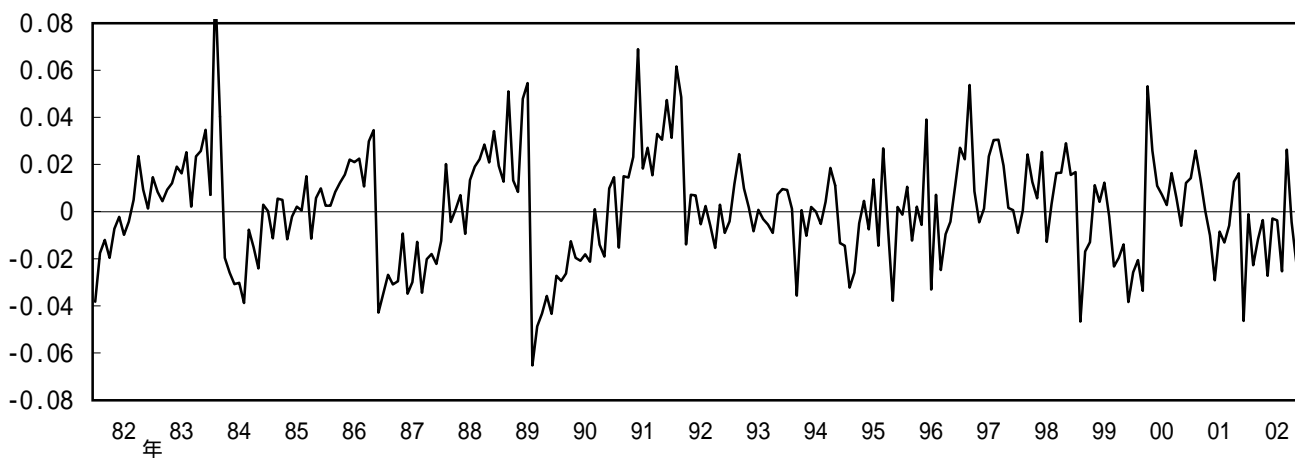
(名目季調済対数値)



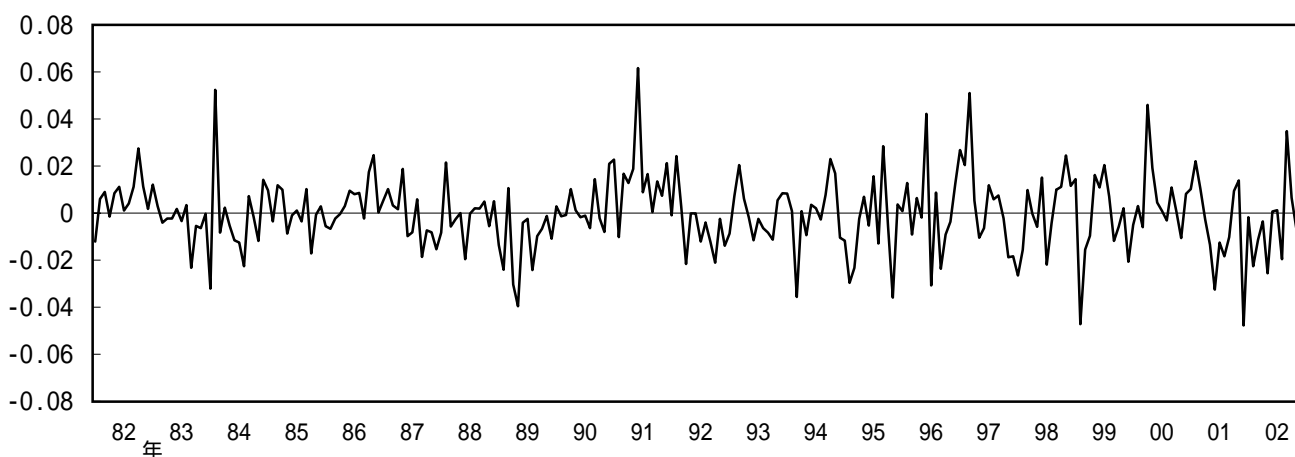
(資料) 総務省「家計調査報告」

名目消費のウェーブレット・ラフ

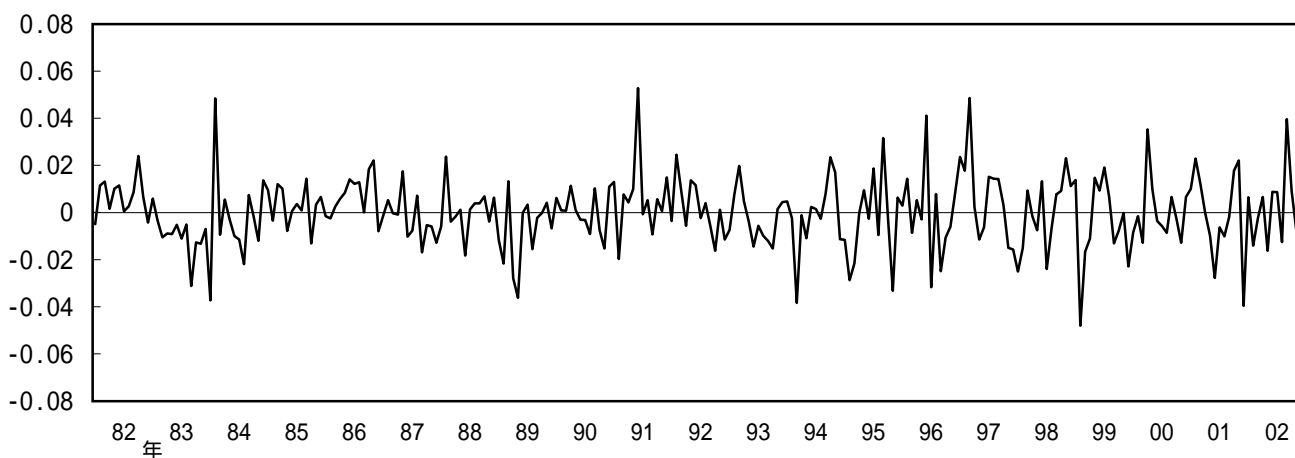
(1) ハールの場合



(2) D(4)の場合



(3) D(12)の場合

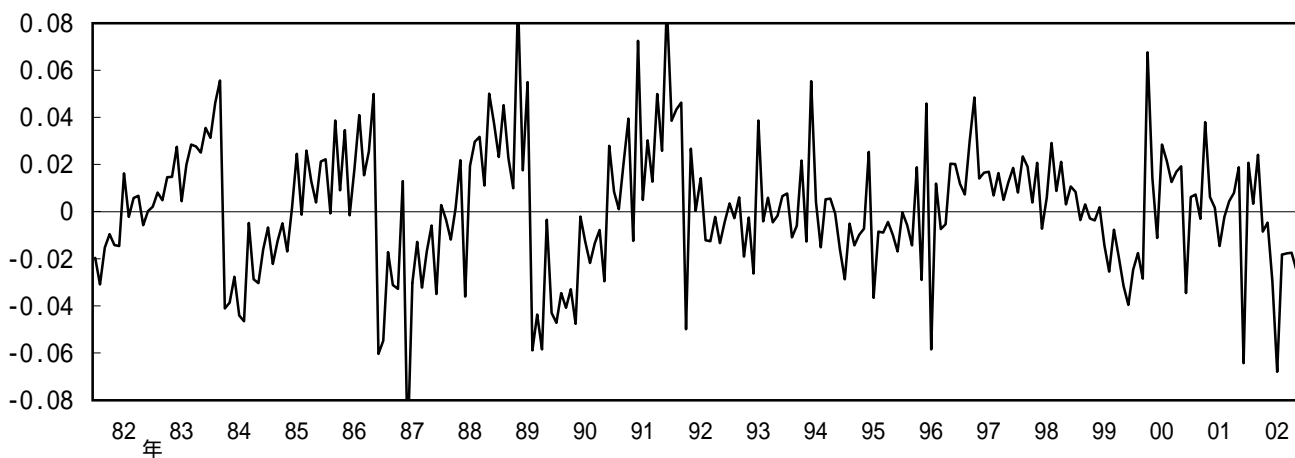


(注) ウエーブレット・ディテール・レベル1～レベル5の和。

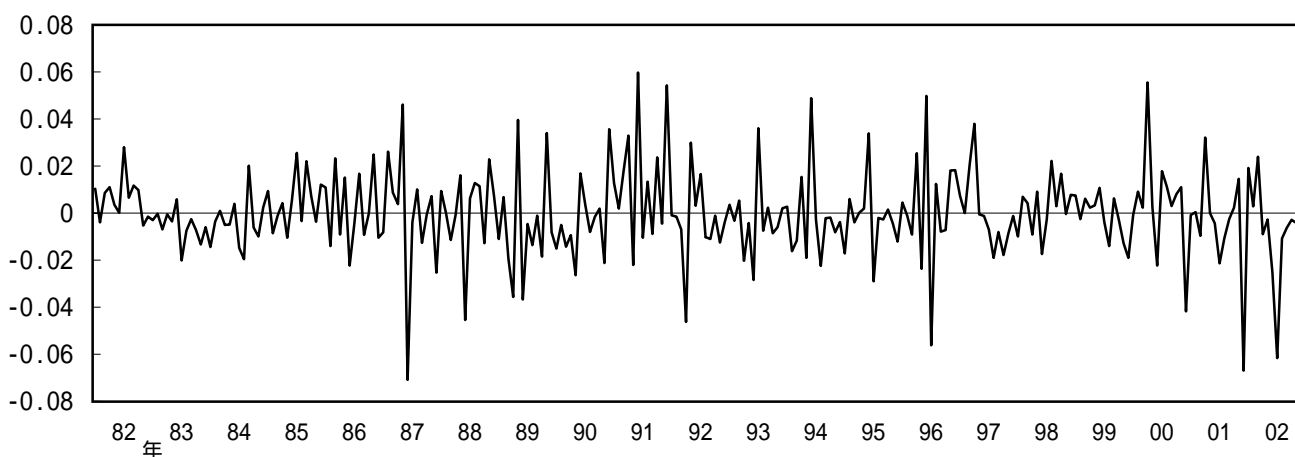
(資料) 総務省「家計調査報告」

可処分所得のウェーブレット・ラフ

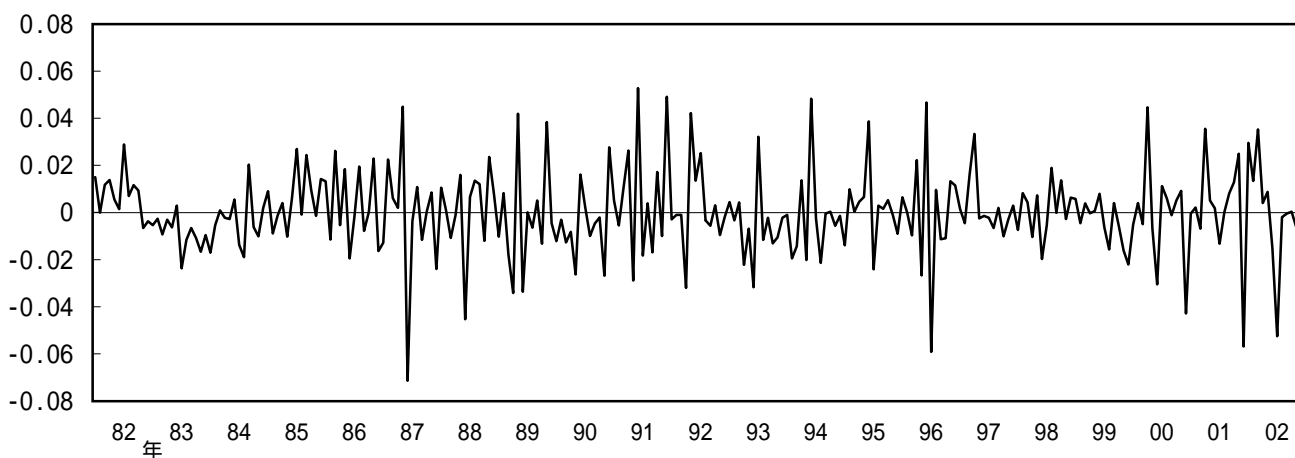
(1) ハールの場合



(2) D(4)の場合



(3) D(12)の場合

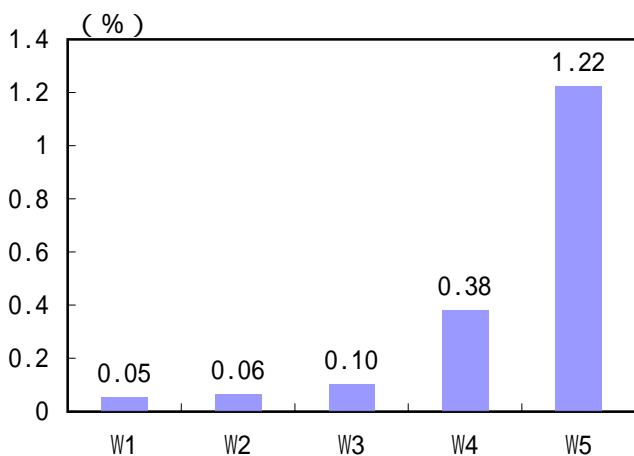


(注) ウエーブレット・ディテール・レベル1～レベル5の和。

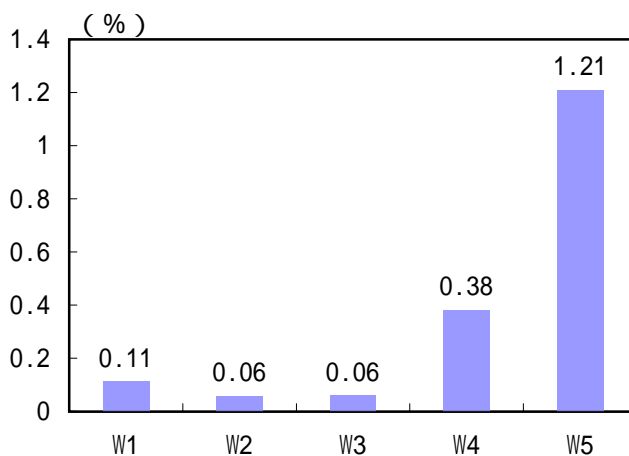
(資料) 総務省「家計調査報告」

消費・可処分所得のエネルギー分布

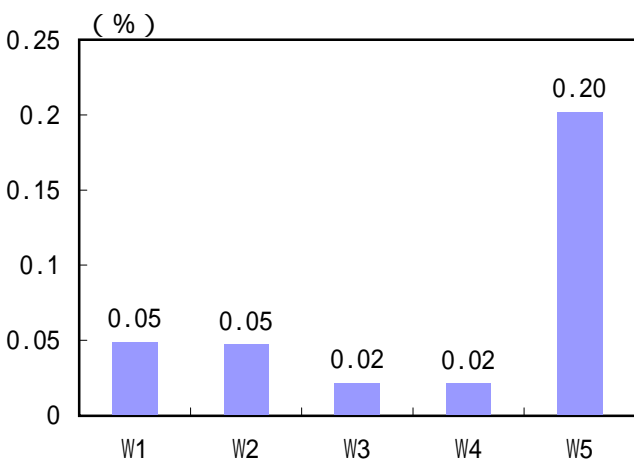
(1) ハール・消費



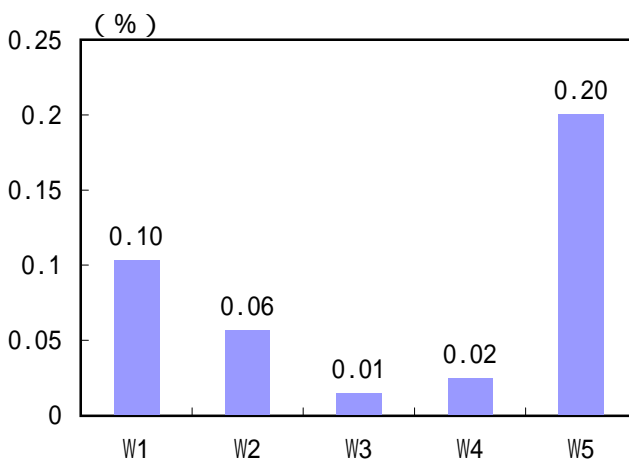
(2) ハール・可処分所得



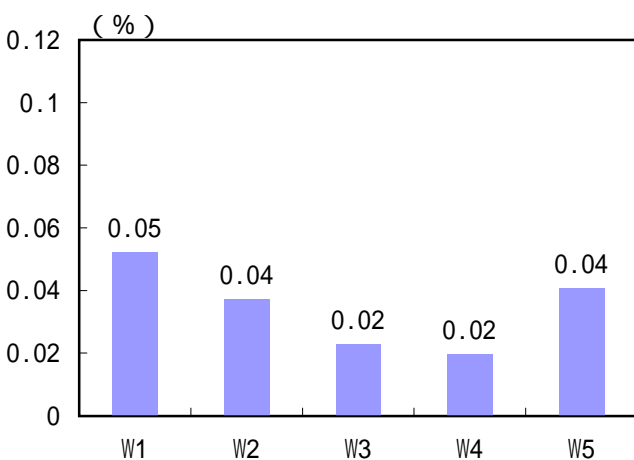
(3) D(4)・消費



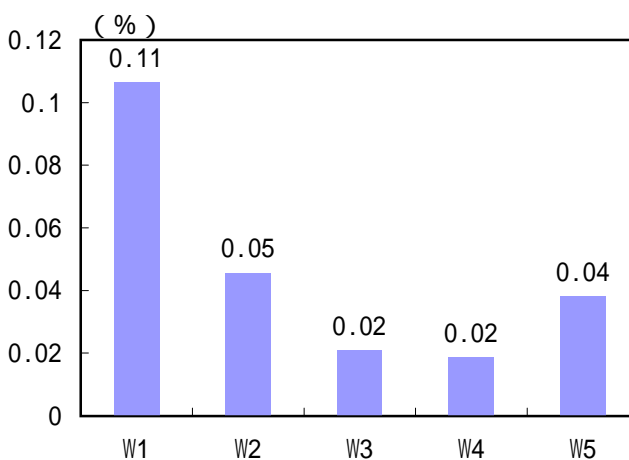
(4) D(4)・可処分所得



(5) D(12)・消費



(6) D(12)・可処分所得



(注) 平均周りの原系列のエネルギー量が100になるように規格化。

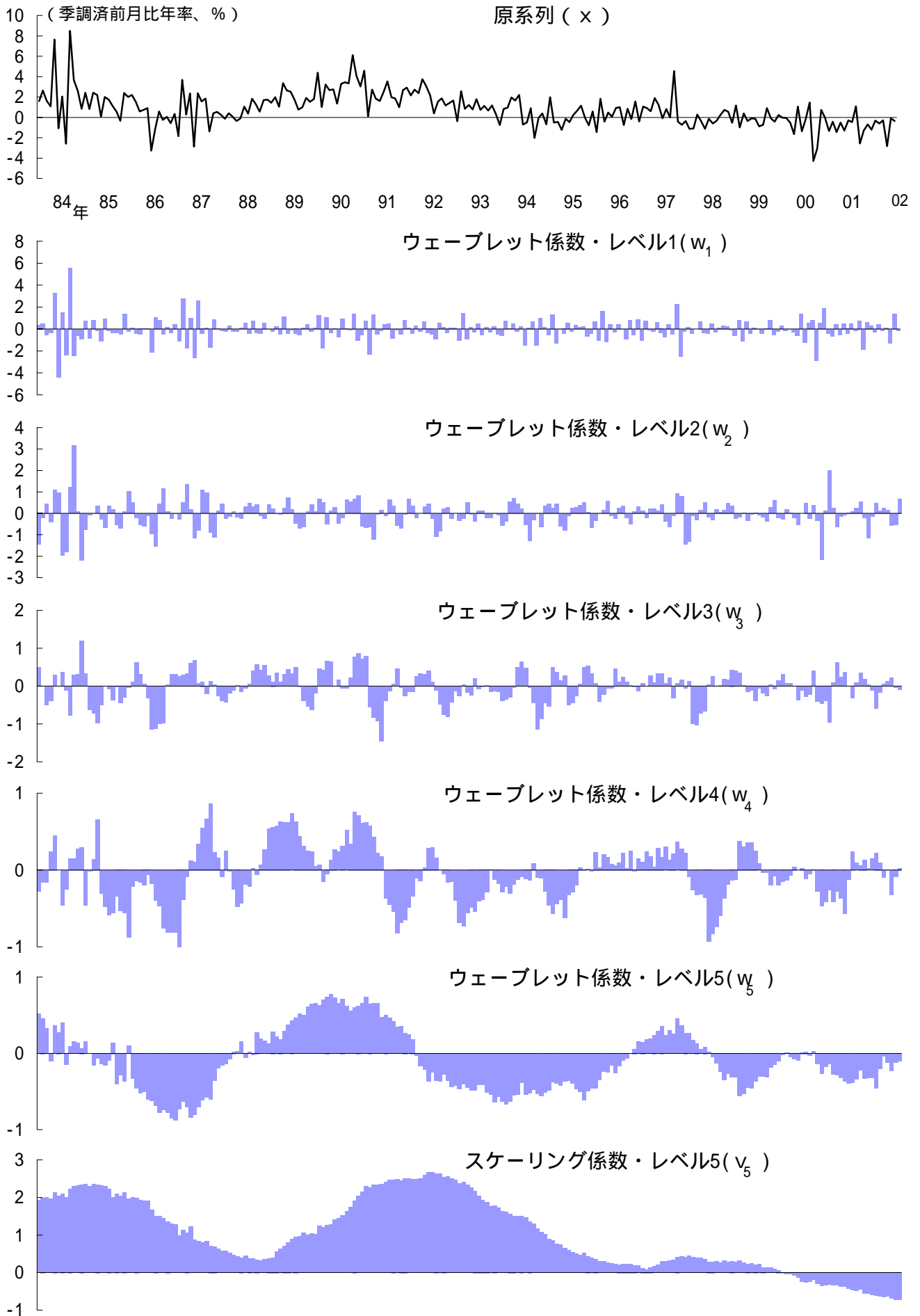
(資料) 総務省「家計調査報告」

スケール別家計消費関数

	定数項 (t値)	可処分所得 係数	<ラゲ> (t値)	R ²
(1) ハール				
ディテール・レベル1(d ₁)	0 (0)	0.263	<1> (8.6)	0.162
レベル2(d ₂)	0 (0)	0.518	<1> (14.7)	0.362
レベル3(d ₃)	0 (0)	0.787	<1> (34.4)	0.756
レベル4(d ₄)	0 (0)	0.963	<1> (158.7)	0.985
レベル5(d ₅)	0 (0)	0.916	<2> (238.2)	0.993
スムーズ・レベル5(s ₅)	0.528 (13.1)	0.937	<0> (298.2)	0.996
(2) D(4)				
ディテール・レベル1(d ₁)	- (-)	-	<-> (-)	0.1未満
レベル2(d ₂)	0.000 (0.4)	0.433	<3> (13.0)	0.307
レベル3(d ₃)	-0.000 (-0.0)	0.451	<0> (12.1)	0.278
レベル4(d ₄)	0.000 (0.5)	0.726	<1> (30.1)	0.710
レベル5(d ₅)	-0.000 (-0.5)	0.927	<0> (111.3)	0.970
スムーズ・レベル5(s ₅)	0.530 (13.4)	0.937	<0> (300.4)	0.996
(3) D(12)				
ディテール・レベル1(d ₁)	0.000 (0.0)	0.212	<0> (6.6)	0.1未満
レベル2(d ₂)	-0.000 (-0.1)	0.392	<0> (10.2)	0.307
レベル3(d ₃)	0.000 (0.2)	0.464	<1> (7.9)	0.278
レベル4(d ₄)	0.000 (0.1)	0.840	<1> (28.2)	0.710
レベル5(d ₅)	-0.000 (-0.8)	0.916	<0> (58.8)	0.970
スムーズ・レベル5(s ₅)	0.530 (13.3)	0.937	<0> (298.5)	0.996

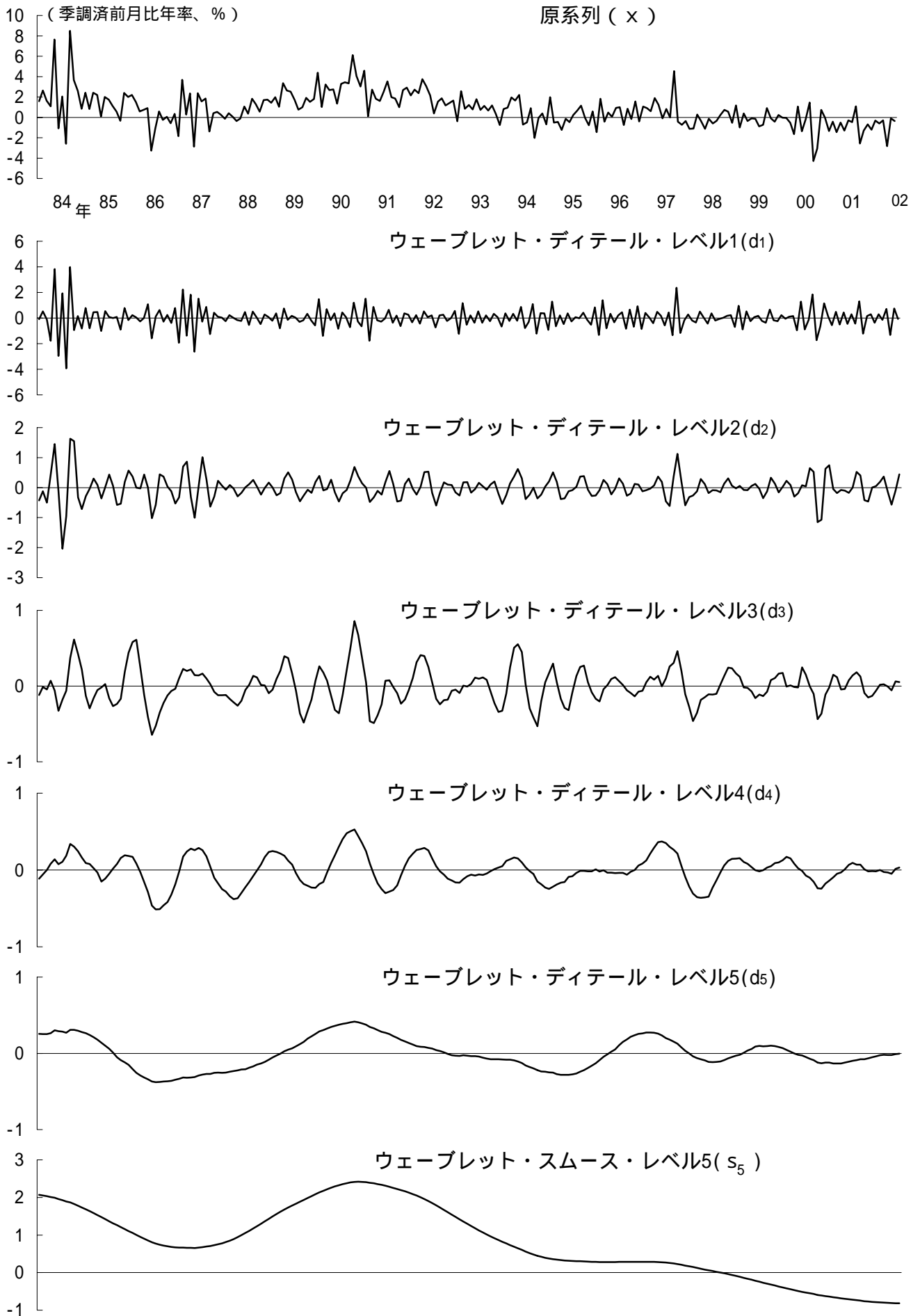
(注) 推計期間は1970年12月～2002年11月。
(資料) 総務省「家計調査報告」

消費者物価のウェーブレット係数・スケーリング係数(ハール・MODWT)



(資料) 総務省「消費者物価指数」

消費者物価のウェーブレット・ディテールとスムーズ(ハール・MODWT)

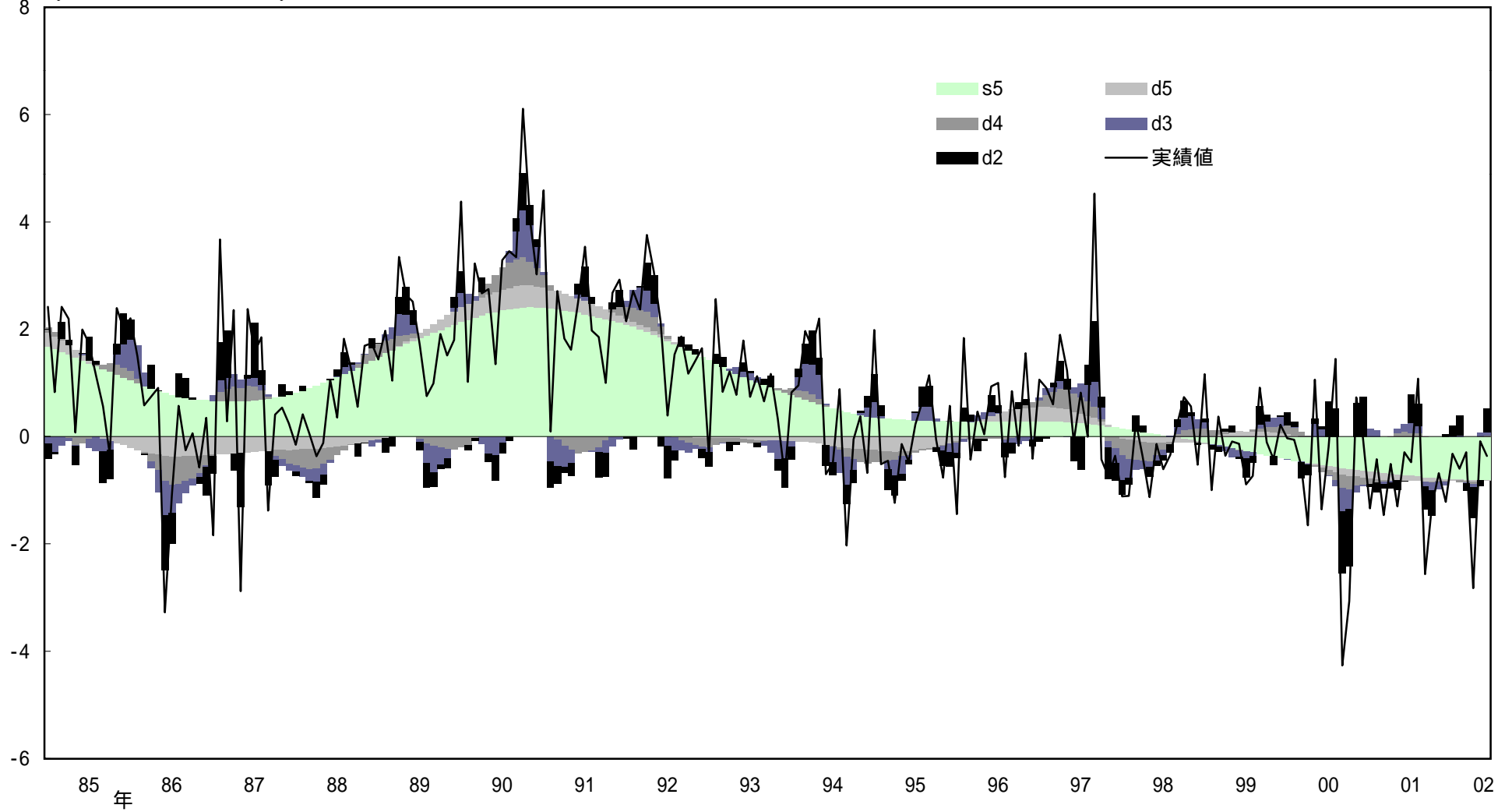


(資料) 総務省「消費者物価指数」

(図表27)

消費者物価の寄与度分解(ハール・MODWT)

(季調済前月比年率、%)



MODWTによるスケール別消費者物価関数（ハール）

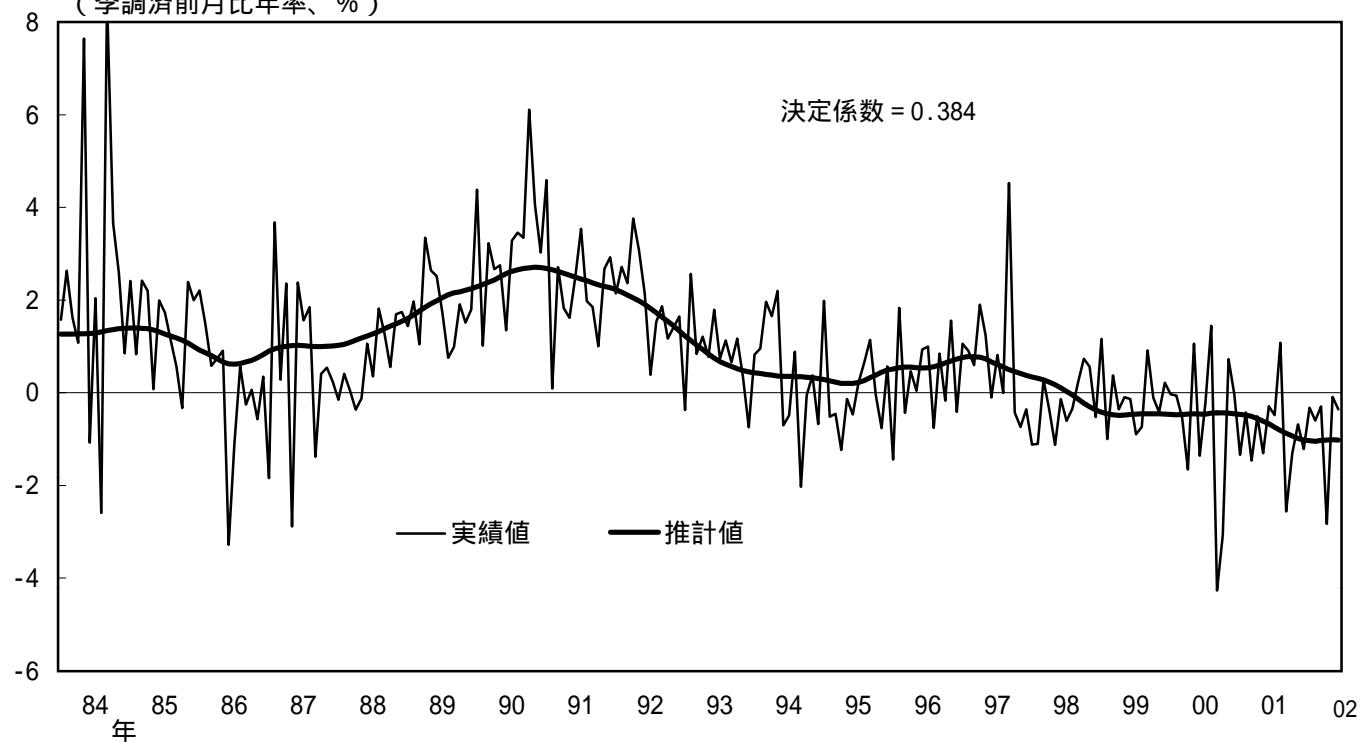
(1) スケール別消費者物価関数

	定数項 (t値)	需給ギャップ 係数 <ラグ> (t値)	輸入物価 係数 <ラグ> (t値)	R ²
ディテール・レベル1(d ₁)	- (-)	- <-> (-)	- <-> (-)	0.1未満
レベル2(d ₂)	- (-)	- <-> (-)	- <-> (-)	0.1未満
レベル3(d ₃)	- (-)	- <-> (-)	- <-> (-)	0.1未満
レベル4(d ₄)	0 (0)	- <-> (-)	0.016 <3> (6.3)	0.151
レベル5(d ₅)	0 (0)	0.274 <0> (11.4)	- <-> (-)	0.368
スムーズ・レベル5(s ₅)	4.011 (71.9)	0.533 <6> (59.8)	- <-> (-)	0.960

(注) 推計期間は1983年11月～2002年6月。

(2) 消費者物価関数の当てはまり

(季調済前月比年率、%)



(資料) 総務省「消費者物価指数」等