

ゼロ金利政策下における金利の期間構造モデル

丸茂幸平

中山貴司

takashi.nakayama@boj.or.jp

西岡慎一

shinichi.nishioka@boj.or.jp

吉田敏弘

toshihiro.yoshida@boj.or.jp

日本銀行金融市場局

〒103-8660 日本橋郵便局私書箱 30 号

2003 年 3 月 7 日

日本銀行金融市場局ワーキングペーパーシリーズは、金融市場局スタッフ等による調査・研究成果をとりまとめたもので、金融市場参加者、学界、研究機関などの関連する方々から幅広くコメントを頂戴することを意図しています。ただし、論文の内容や意見は、執筆者個人に属し、日本銀行あるいは金融市場局の公式見解を示すものではありません。

ゼロ金利政策下における金利の期間構造モデル

丸茂幸平 中山貴司 西岡慎一 吉田敏弘*

【要旨】

本稿は、ゼロ金利政策下における金利の期間構造モデルを構築し、国債価格に内包されたゼロ金利政策継続期間に対する情報を抽出することを目的に作成されたものである。ゼロ金利政策実施期間中の我が国のイールド・カーブは、中短期ゾーンの金利水準が著しく低く、Vasicek モデル等の伝統的な金利の期間構造モデルで想定されるイールド・カーブとは形状が大きく異なっている。本稿では、こうした点を踏まえて、ゼロ金利政策の継続期間に対する期待(いわゆる「時間軸効果」)をイールド・カーブの構成要素の1つとして捉えることにより、以下の通りモデルを定式化し実証分析を行った。まず、ゼロ金利政策の実施期間中における金利の期間構造モデルを、従来型の Vasicek モデルにゼロ金利政策の継続期間を加味することによって短期金利水準を表現する一方、市場が想定する長期的な金利水準に関しては、リスクの市場価格に集約することで調整するモデルを構築した。次に、導出されたモデルのパラメータを、国債の流通価格を用いて推定し、ゼロ金利政策継続期間に対する確率分布を抽出した。この結果、ゼロ金利政策下におけるイールド・カーブのフィットが、従来型の Vasicek モデルと比較して飛躍的に向上したほか、ゼロ金利政策継続期間に対する確率分布を明示することが可能となった。

キーワード：ゼロ金利政策、時間軸効果、金利の期間構造モデル、Vasicek モデル

* 丸茂幸平 日本銀行金融市場局金融市場課(現人事局)
中山貴司 日本銀行金融市場局金融市場課 *e-mail*: takashi.nakayama@boj.or.jp
西岡慎一 日本銀行金融市場局金融市場課 *e-mail*: shinichi.nishioka@boj.or.jp
吉田敏弘 日本銀行金融市場局金融市場課兼金融研究所 *e-mail*: toshihiro.yoshida@boj.or.jp

本稿を作成するにあたり、木島正明教授(京都大学大学院経済学研究科)、長山いづみ助教授(一橋大学大学院国際企業戦略研究科)及び日本銀行スタッフから数多くの有益な示唆を受けた。記して感謝したい。もちろん、有り得べき誤りは筆者達の責任である。

目次	
1 はじめに	3
2 ゼロ金利政策下でのイールド・カーブ・モデル	4
3 実証分析	7
4 結語	13
補論 1 リスクの市場価格	15
補論 2 債券価格の導出	16
補論 3 イールド・カーブの推計方法	18
補論 4 イールド・カーブの主成分分析	19
補論 5 瞬間的スポット・レートの推計	20
補論 6 ゼロ金利継続期間に様々な確率分布を仮定した場合の推計結果	21
参考文献	25

1 はじめに

本稿では、無担保コール・オーバーナイト・レートがゼロ近傍で推移した2つの期間^{*1}における我が国のイールド・カーブから、ゼロ金利政策の継続期間に対する市場の期待を抽出することにより「時間軸効果」の特性を明らかにすることを目的としている。

1999年2月12日、日本銀行は「潤沢な資金供給を行い、無担保コールレート（オーバーナイト金利）を、できるだけ低めに推移するように促す。その際、短期金融市場に混乱の生じないよう、その機能に十分配慮しつつ、当初0.15%前後を目指し、その後市場の状況を踏まえながら、徐々に一層の低下を促す」ことを決定、いわゆる「ゼロ金利政策」がスタートした。さらに同年4月13日、速水総裁は「デフレ懸念の払拭が展望できるような情勢になるまで」ゼロ金利政策を継続する意志を明らかにした。このゼロ金利政策は、2000年8月に解除されるが、その後の経済情勢の悪化に伴い、2001年3月19日に日本銀行は、「金融市場調節にあたり、主たる操作目標を、これまでの無担保コールレート（オーバーナイト金利）から、日本銀行当座預金残高に変更」し「消費者物価指数の前年比上昇率が安定的にゼロ%以上になるまで、継続する」ことを決定した。この措置により無担保コール・オーバーナイト・レートは再びゼロ%近傍で推移することとなった。

この両期間における金融政策の枠組みは異なるものの、共通して観察される現象として、中短期金利が著しく低下し、イールド・カーブが通常の期間と比べて特異な形状を示すことが挙げられる。特に、VasicekモデルやCIRモデル等、伝統的な金利の期間構造モデルにより、我が国の国債価格をフィットさせることが著しく困難となっている。これは、中央銀行が一定の期間に亘ってオーバーナイト・レートをゼロ%に誘導することを明確にコミットしたため、イールド・カーブの水準が、短期ゾーンに近づくほど、ゼロ金利政策の継続期間に対する期待に大きく依存して低下することが、その背景の1つとして指摘されている。こうした効果は一般的に「時間軸効果」と呼ばれている。白塚・藤木（2001）では、推計された瞬間的フォワード・レートの変化を通じて、将来の金融政策の経路についてのコミットメントがイールド・カーブのフラット化と低位安定に大きな効果があったことを指摘している。

そこで本稿では、イールド・カーブが、従来型の金利の期間構造モデルと時間軸に対する期待から構成されると捉えることによってこの問題に対処する。ここで、時間軸とは「ゼロ金利政策下において、現在時点からゼロ金利政策の解除に要する時間の長さ」と定義し、ゼロ金利政策の解除がある一定の確率分布に従って発生すると仮定する。瞬間的スポット・レートは、ゼロ金利政策下ではゼロ、解除後はVasicekモデルに従うとする。従って、ある満期時点における瞬間的スポット・レートは従来型のVasicekモデルにゼロ金利政策解除に対する確率を勘案して決定される。本稿では、以上の仮定の下で導出されたモデルをゼロ金利政策期間中の国債価格をフィットさせ、モデルの妥当性を検証すると

^{*1} 1999年2月～2000年8月にかけて実施された、いわゆるゼロ金利政策期、及び金融調節方針を無担保コールレートから当座預金残高へのコミットに転換した2001年3月から現在までの期間を指す。以下では、特に断らない限り、この両期間を指して「ゼロ金利政策」期と呼ぶ

ともに、推計された時間軸に対する確率分布を抽出する。

本稿で得られた結論をあらかじめ要約すると以下の通りである。

- (1) 従来型の Vasicek モデルと比較して、本稿のモデルではイールド・カーブのフィットが飛躍的に向上した。特に短期ゾーンのフィットに著しい改善がみられた。
- (2) 推計によって得られたゼロ金利政策継続期間に対する確率分布関数の推移をみると、ゼロ金利政策が解除された 2000 年 8 月付近で分布が解除方向へシフトするなど妥当な結果が得られた。

本稿の構成は以下の通りである。第 2 節では、従来型の Vasicek モデルの概要とその問題点について触れた後、Vasicek モデルにゼロ金利政策変更確率を加味したモデルを構築し、パラメータの推計方法について述べる。第 3 節では、前節で得られたモデルに基づいて推定を行い、イールド・カーブのフィットとそこから抽出されたゼロ金利政策継続期間に対する確率分布の推移について検証し、本稿モデルの妥当性を考える。第 4 節では、本稿で得られた結論と残された課題について述べる。

2 ゼロ金利政策下でのイールド・カーブ・モデル

イールド・カーブ・モデルは、一般的に、将来における金利変動を織り込むような形で構築されるが、その方法として、スポット・レート・モデルとフォワード・レート・モデルの 2 通りに大別できる。

スポット・レート・モデルは、無リスクの割引債を瞬間的スポット・レート^{*2}を状態変数とする派生証券と考え、無裁定価格を導出した上で、任意の満期の割引債価格を求めることにより得られる。このタイプのモデルは、イールド・カーブの形状が瞬間的スポット・レートの変動のみに依存するという特徴を持っており、Vasicek モデル^{*3}、CIR モデル^{*4}、Hull and White モデル^{*5}などがこれに該当する。

一方、フォワード・レート・モデルは、HJM モデル^{*6}に代表されるように、任意の満期のフォワード・レートを定式化することによって、イールド・カーブを記述するモデルである。

このように、金利の期間構造を表現するための枠組みとして、様々なイールド・カーブ・モデルが提案されているが、本稿では、これらの中でも Vasicek モデルに注目する。Vasicek モデルでは、時点 t における瞬間的スポット・レート r_t が、

$$dr_t = \kappa(m - r_t)dt + \sigma dW_t \quad (1)$$

*2 イールド・カーブ・モデルを構築する上で考える仮想的な金利。直観的には、無リスク資産に微小時間だけ投資したときの利回りと考えることができる。現実の金融市場では、マネー・マーケット・レートで近似したり、イールド・カーブの縦軸との交点を瞬間的スポット・レートと考えることがある(吉羽・家田(2001)を参照)。本稿での扱いは次節以降で詳述する。

*3 Vasicek (1977) 参照。

*4 Cox, Ingersoll, and Ross (1985) 参照。

*5 Hull and White (1990) 参照。

*6 Heath, Jarrow, and Morton (1992) 参照。

のように平均回帰性を持って変動すると仮定する。ただし、 W_t はウィーナー過程、 κ, m, σ はパラメータである。また、Vasicek モデルにおける満期 T の割引債の時点 t での価格 $v(t, T)$ は、

$$v(t, T) = H_1(T - t)e^{-H_2(T-t)r(t)} \quad (2)$$

$$H_1(t) = \exp \left\{ \frac{(H_2(t) - t)(\kappa^2 \mu - \sigma^2 / 2)}{\kappa^2} - \frac{\sigma^2 H_2^2(t)}{4\kappa} \right\}$$

$$H_2(t) = \frac{1 - e^{-\kappa t}}{\kappa}$$

で与えられる。

Vasicek モデルは、瞬間的スポット・レートが平均回帰性を持つことのほかに、イールドが比較的簡単な形の解析解を持つなど、数学的な取り扱いが容易なことで知られている。一方、負の金利を排除していないこと、瞬間的スポット・レートのボラティリティが金利水準によらず一定であること、等がモデルの問題点として指摘されている。

さらに、Vasicek モデルでは、瞬間的スポット・レートの変動のみによってイールド・カーブを構築するために、どのような現実的なパラメータの組み合わせを選んだとしても、イールド・カーブの2次の曲率は正（即ち、イールド・カーブは上に凸）となる。しかし、ゼロ金利政策期のイールド・カーブは、時間軸効果の存在により短期から中期にかけて下に凸となることが多いため、同期間のイールド・カーブを Vasicek モデルを用いて表現することは適当ではない。

以下では、こうした Vasicek モデルの問題点を踏まえて、ゼロ金利政策下におけるイールド・カーブ・モデルの定式化を行う。本稿では、ゼロ金利政策下のイールド・カーブが、通常の Vasicek モデルにゼロ金利政策継続期間に対する期待が加味されて決定されると捉えていることから、ゼロ金利政策の継続期間がある一定の確率分布に従うとした上でこれを定式化し、このゼロ金利政策に係る確率変数と通常の Vasicek モデルを用いて、ゼロ金利政策下におけるイールド・カーブ・モデルを導出する。

2.1 ゼロ金利政策下における瞬間的スポット・レートの定式化

ゼロ金利政策の実施期間は、事前に決定されているわけではないため、ゼロ金利政策の解除時点を τ として、これがある確率過程に従うと仮定する。また、 P を現実の確率測度、 P^* は P と同値なマルチンゲール測度とし、フィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$ を定義する^{*7}。

ここで、 $1_{\{A\}}$ を定義関数

$$1_{\{A\}}(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \omega \notin A \end{cases} \quad (3)$$

としたとき、ゼロ金利政策解除時点 τ は、確率過程 $\{1_{\{\tau \leq t\}}\}$ が $\{\mathcal{F}_t\}$ -適合となるような非負の確率変数として定式化することができる。

^{*7} 確率空間に関する議論は森村・木島 (1991)、Schonbucher (1999) を参照。

一方、ゼロ金利政策期間中における短期金利の推移をみると、概ねゼロに近い水準に張り付いている。そこで本稿では、ゼロ金利政策下における瞬間的スポット・レートを先験的にゼロ（一定値）とおき、政策解除後の瞬間的スポット・レートを Vasicek モデルで記述することにする。

従って、ゼロ金利政策解除時点 τ が与えられた場合の時点 t における瞬間的スポット・レートを r_t^τ とするとき、同値マルチンゲール測度 P^* の下で r_t^τ は、

$$dr_t^\tau = 1_{\{\tau \leq t\}} \{ \kappa(\mu - r_t^\tau)dt + \sigma dW_t^* \} \quad (4)$$

ただし、 $W^* : P^*$ の下でのウィーナー過程

κ, μ, σ : パラメータ

$$r_0^\tau = 0$$

を満たすものとする。

ここで、 τ と W^* は、 P^* の下で独立と仮定する。また、(1) 式の現実の確率測度 P の下でのウィーナー過程 W と、(4) 式の P^* の下でのウィーナー過程 W^* の間の関係から*⁸、(4) 式におけるドリフト μ は、リスクの市場価格 λ を用いて*⁹、

$$\mu = m - \frac{\sigma}{\kappa} \lambda \quad (5)$$

と記述される。

2.2 割引債価格とイールド・カーブ

次に、ゼロ金利政策下におけるイールド・カーブ・モデルを導出する。満期 T に 1 円が支払われる無リスクの割引債の時点 t における価格を $v(t, T)$ とおくと、これは瞬間的スポット・レート r_t^τ を使って

$$v(t, T) = E^{P^*} \left[\exp \left\{ - \int_t^T r_s^\tau ds \right\} \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad (6)$$

と表される。ただし、 $E^{P^*}[\cdot]$ は同値マルチンゲール測度 P^* の下での期待値を表す。 $\tau > t$ という条件（時点 t はゼロ金利政策実施期間中）の下で、(4) 式を使ってこれを整理すると、

$$\begin{aligned} v(t, T) &= \int_t^T \frac{\psi(s)}{1 - \Psi(t)} H_1(T - s) ds + \frac{1 - \Psi(T)}{1 - \Psi(t)} \\ H_1(t) &= \exp \left\{ \frac{(H_2(t) - t)(\kappa^2 \mu - \sigma^2 / 2)}{\kappa^2} - \frac{\sigma^2 H_2^2(t)}{4\kappa} \right\} \\ H_2(t) &= \frac{1 - e^{-\kappa t}}{\kappa} \end{aligned} \quad (7)$$

*⁸ 測度変換に関する詳細な議論は、木島（1999）を参照。

*⁹ リスクの市場価格についての追加的な説明は、補論 1 を参照。

となる^{*10}。ここで、 ψ 、 Ψ を、それぞれゼロ金利政策解除時点 τ が従う確率密度関数と分布関数とする。このとき、イールド $Y(t, T)$ は、

$$Y(t, T) = -\frac{\log v(t, T)}{T-t} \quad (8)$$

と表される。

(8) 式には Vasicek モデルに関するパラメータ κ, μ, σ と、ゼロ金利政策解除時点 τ の分布に関するパラメータが含まれているが、これらのパラメータの推定に関しては、次節で取り扱う。

3 実証分析

ここでは、本稿モデルの基となる Vasicek モデルの 3 つのパラメータとゼロ金利政策の継続期間に関する確率分布のパラメータを推定し、市場金利に対してフィットを行う。また、ゼロ金利政策の継続期間に対する確率分布を明示し、その妥当性について考察する。

3.1 瞬間的スポット・レート及び Vasicek モデルのパラメータの推計

本稿モデルでは(8)式の通り、イールド・カーブを割引債の価格を用いて定義しているため、実証分析を行う際には、割引債の市場価格が必要となる。もっとも、本邦国債市場においては、割引債の発行額は利付国債の発行額に比べ少額に止まるほか、発行年限が 1 年以下の短期国債や 3 年債など一部に限定されるといった問題が存在する。そこで、本稿では、市場参加者の金利観を最も端的に表していると考えられる利付国債から割引債価格を推計し、そこからイールド・カーブを算出することとした。具体的には、5 年、10 年、20 年の利付国債の価格データを用いて McCulloch の方法に従って推計を行った^{*11}。利付国債の価格としては日本証券業協会の基準気配を採用し、他の銘柄対比極端に流動性の高い新発債は推計対象から除外した。また、イールド・カーブは、0.5 年から 20 年までを 0.5 年刻みで表現する。推計されたイールド・カーブの例を図 1 に示す。このイールド・カーブは、モデルを推計する際のベースとなる金利である。以後、特に断りのない限り、この推計された金利を単に市場金利と呼ぶこととする。

本稿モデルは、Vasicek モデルをベースとしていることから、同モデルのパラメータを推計するためには瞬間的スポット・レートの時系列データが必要となる。イールド・カーブの変動に対する主成分分析を行ったところ、第 1 主成分は約 89% と高い説明力を持つ^{*12}。第 1 主成分は一般的に、イールド・カーブの平行・シフトを表現していると考えられることから、1 ファクターのスポット・レート・モデルにおける瞬間的スポット・レートは、イールド・カーブの平行・シフトに対応している必要がある。そこで、第 1 主成

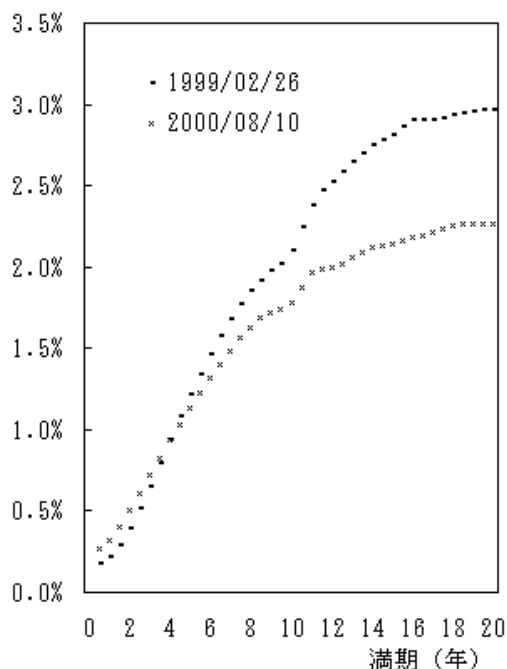
^{*10} (7) 式の導出に関しては補論 2 を参照。

^{*11} McCulloch の方法の詳細は補論 3 を参照。

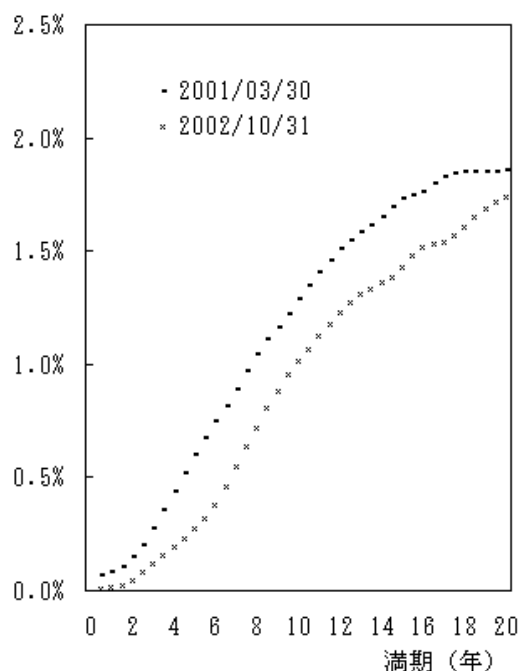
^{*12} ゼロ金利政策導入前の市場金利を用いて算出した数値。以下、主成分分析の詳細については、補論 4 を参照。

図 1: 国債流通価格より推計されたイールド・カーブの例

(a) 1999年2月～2000年8月



(b) 2001年3月～



分の累積値と Vasicek and Fong モデル^{*13}により推計される瞬間的スポット・レート、及び無担保コール・オーバーナイト・レートの推移を比較したところ、Vasicek and Fong モデルにより推計される瞬間的スポットレートは無担保コール・オーバーナイト・レートよりも、第 1 主成分の累積値と高い運動性を持つことが分かった(図 2)。従って、本稿では、瞬間的スポット・レートとして、Vasicek and Fong モデルによる推計値を瞬間的スポット・レートとする。

Vasicek モデルのパラメータ推計で問題となるのは、市場金利から推計した瞬間的スポット・レートは離散時間で表現されるのに対し、Vasicek モデルは連続時間で記述される点である。この問題を解決するためには、(1) 式の離散化を行う必要がある。(1) 式における微小時間 dt を有限な時間 Δ とすると、 $dr_t \rightarrow r_{t+\Delta} - r_t$ 、 $\sigma dW_t \rightarrow \sigma\sqrt{\Delta}u_t$ (u_t は標準正規分布に従う確率変数)となるので、(1) 式は、

$$r_{t+\Delta} - r_t = \kappa(m - r_t)\Delta + \sigma\sqrt{\Delta}u_t$$

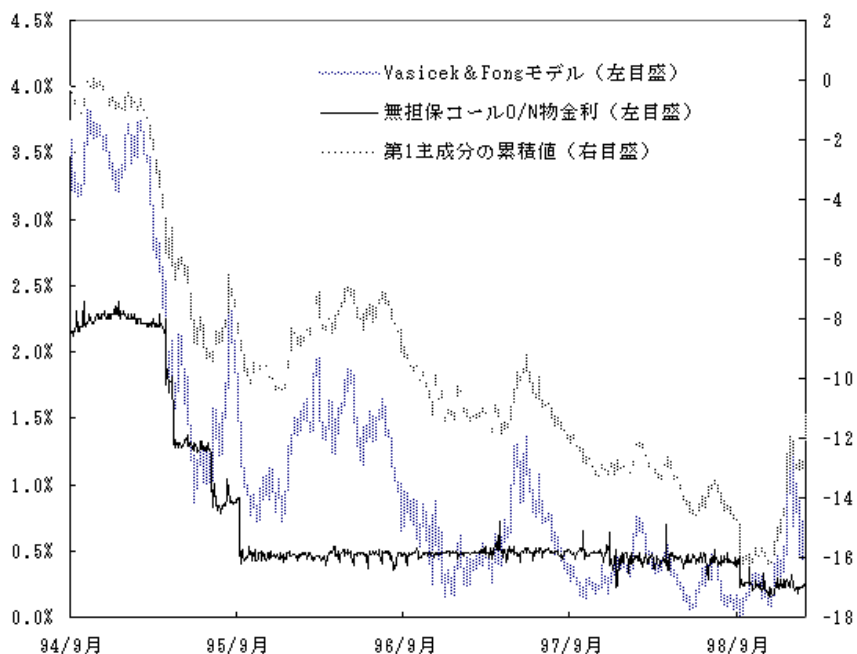
となる。この式と推計した瞬間的スポット・レートから Vasicek モデルの 3 つのパラメータ m, κ, σ の推計が可能となる^{*14}。

パラメータの推計結果を表 1 に示す。推計は、 Δ を 1/250 とした上で最尤法により行った。推計結果をみると、平均回帰の強さを表す κ については推計期間によって値が大きく

*13 Vasicek and Fong モデルの詳細は補論 5 を参照。

*14 連続時間モデルの離散化に関する詳細な議論は、小暮 (1995) を参照。

図 2: 推計された瞬間的スポット・レートの推移



異なっているが、Vasicek モデルは長期的な瞬間的スポット・レートの構造を仮定していることから、以下では、1992 年 1 月から 1999 年 1 月までを推計期間とした結果を基に分析を進める。

表 1: 推計された Vasicek モデルのパラメータ

	κ	m	σ
1992 年 1 月 6 日 ~ 1999 年 1 月 29 日	0.7131 (1.974) **	0.006476 (0.8477)	0.01017 (89.40) ***
1995 年 1 月 4 日 ~ 1999 年 1 月 29 日	2.329 (3.737) ***	0.004061 (1.593)	0.009323 (77.03) ***
1997 年 1 月 6 日 ~ 1999 年 1 月 29 日	6.123 (3.000) ***	0.002672 (3.002) ***	0.007224 (48.35) ***

(注) 括弧内は t 値。***は、1%、**は 5%、*は 10%水準で有意であることを示す。

3.2 市場が期待するゼロ金利政策継続期間の推計

次に、本稿モデル ((7) 式) の推計を行うが、式を特定化するためには、ゼロ金利政策継続期間 τ が従う確率分布関数を仮定する必要がある。本稿では、対数正規分布や指数分布等、様々な確率分布関数を用いて推計を行ったが、以下では、標準ガンマ分布を用いた

推計結果のみを示す^{*15}。標準ガンマ分布の確率密度関数は、次式により表される。

$$P^*(\tau \leq t) = \Psi(t) = \frac{\Gamma_t(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}, \quad \alpha > 0 \quad (9)$$

ただし、

$$\Gamma_t(\alpha) = \int_0^t u^{\alpha-1} e^{-u} du$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-u} du$$

ここで、 α はパラメータである。標準ガンマ分布は、 τ の非負性や確率密度関数の単峰性を満たすほか、ゼロ金利政策継続期間が短期化するほど、極値を持たない指数分布に近い形状^{*16}となるなどの望ましい性質を持つ。

前節において、Vasicek モデルの 3 つのパラメータが確定したため、本稿モデルにおける未知パラメータは、標準ガンマ分布のパラメータ α とリスクの市場価格 λ の 2 つとなる。これらのパラメータについては、市場金利から最小二乗法により推計した。

図 3 には、上記手順より推計された本稿モデルのイールド・カーブが示されている。同図の細線は、通常の Vasicek モデルによるイールド・カーブを示す^{*17}。本稿モデルと Vasicek モデルは、瞬間的スポット・レートが変動している期間では 1 ファクターのスポット・レート・モデルという共通点を持つが、前者は後者と比べ、フィットが飛躍的に向上している。また、本稿モデルの残差の推移（図 4）をみても、恒常的に残差の絶対値が大きくなっている年限は見当たらず、残差平方和も比較的小さな値で安定的に推移している。

次に、推計の結果得られたゼロ金利政策の継続期間が従う確率密度関数を図 5 に示す。前回ゼロ金利政策時においては、解除時点（2000 年 8 月）が近づくにつれて、分布は左方にシフトする一方、今回の量的緩和政策期（2002 年 10 月）においては、時間の経過と共に右方へシフトしている。

本節の最後に、時間軸の長さの推移を算出するが、本稿ではゼロ金利政策の継続期間を確率変数として扱っていることから、市場参加者が想定する時間軸の長さを時系列で観察するためには、確率分布に含まれる多くの情報を捨象し、一部の統計値をもって時間軸の長さを定義する必要がある。図 6 では、期待値、最頻値、パーセンタイル値（ある一定以上の確率となる値）をその例として挙げている。これをみると、どの統計量を用いるかによって、市場参加者が想定するゼロ金利政策の継続期間に対する評価は若干異なる^{*18}。

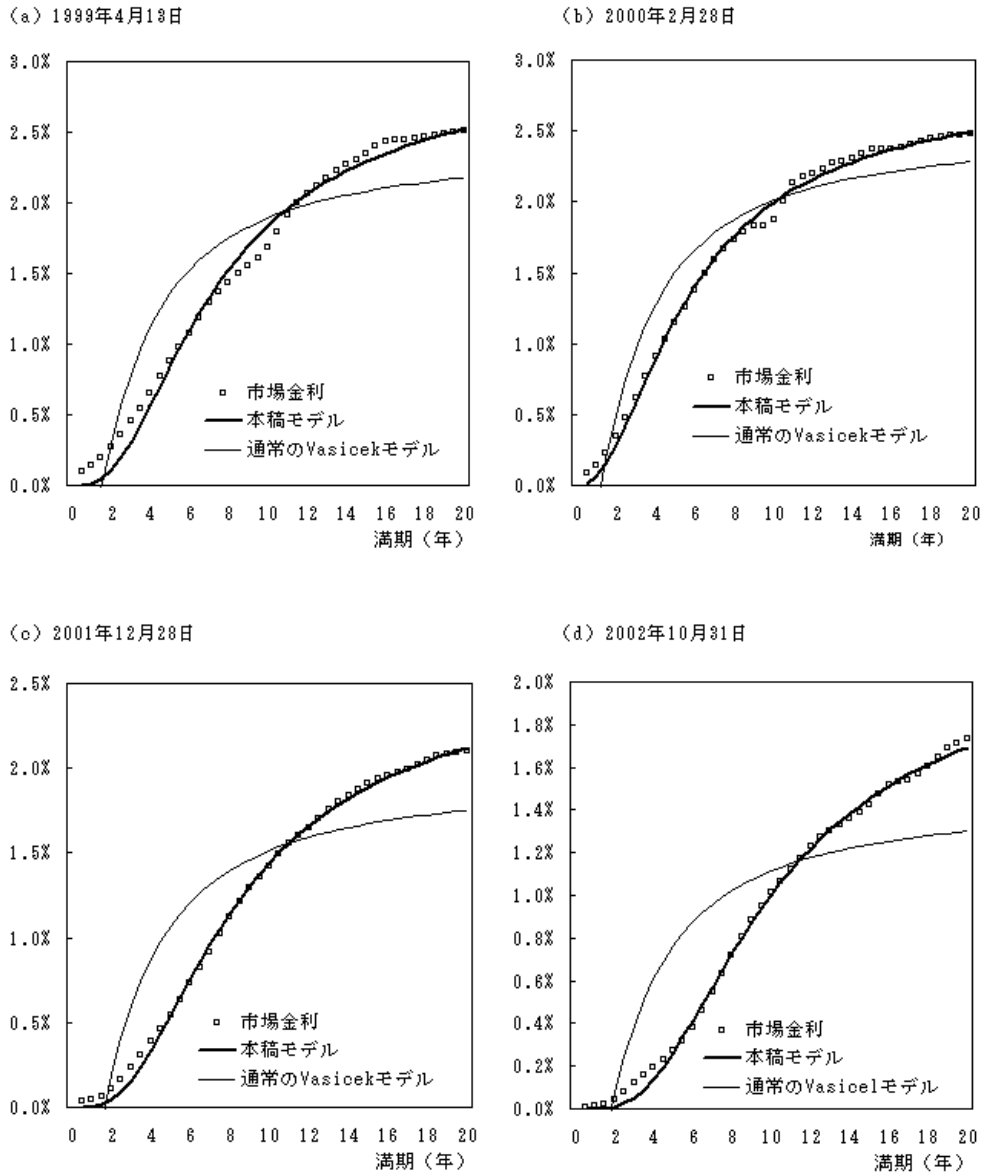
*15 その他の分布を仮定したモデルのパフォーマンスの比較は、補論 6 を参照。

*16 標準ガンマ分布は、 α が 1 のとき、指数分布と一致し、 α が 1 を下回るとき、確率密度関数は 0 を極限とした右下がりの形状となる。これは、 α が短期化するにつれ、足許でのゼロ金利政策解除確率が高まることを意味する。

*17 Vasicek モデルによるイールド・カーブについては、瞬間的スポット・レート及び平均回帰過程のパラメータは前節で推計したものを使用し、リスクの市場価格は市場金利に対するフィット（最小二乗法）により推定した。

*18 このほか、Vasicek モデルのパラメータ推定期間も時間軸の絶対的な水準に影響を及ぼす。例えば、推計

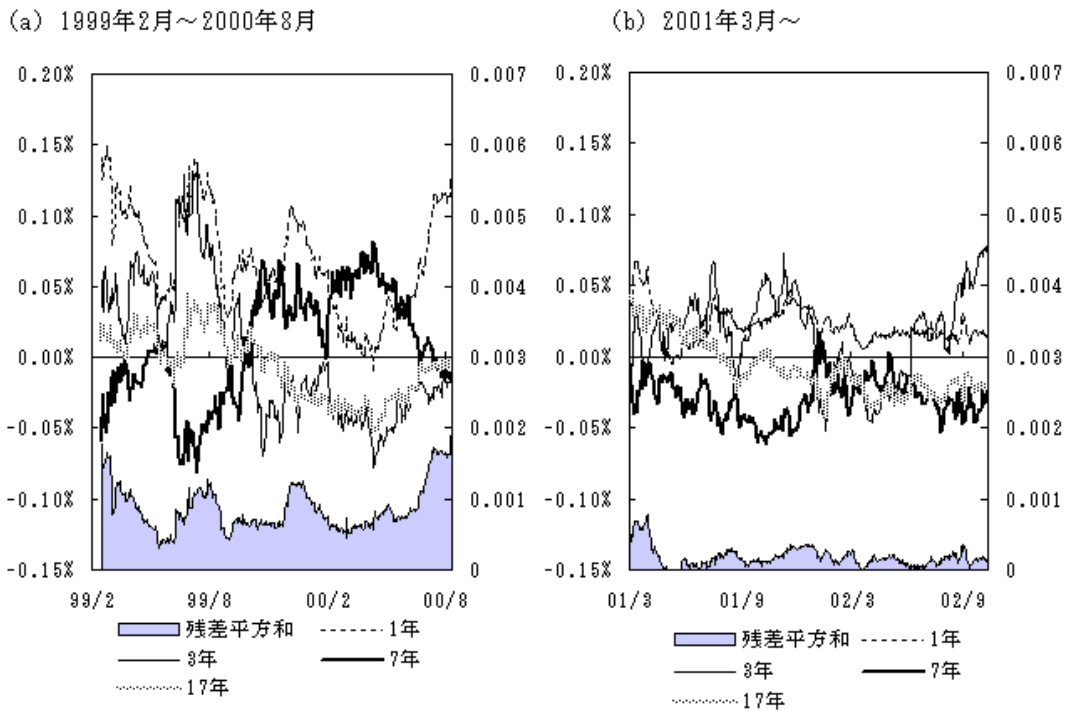
図 3: 本稿モデルのフィットの例



もっとも、その方向性については、前回ゼロ金利政策時において、解除時点の接近に伴い時間軸の長さが短期化するなど、ある程度妥当な結果が得られている。

期間を 1997 年 1 月から 1999 年 1 月にすると、時間軸の長さはここで示した値より 1 年程度長くなる。もっとも、その方向性については、推計期間を変更しても大きな変化はみられない。

図 4: 残差と残差二乗和の推移



(注) 残差平方和は右目盛、残差は左目盛。

図 5: ゼロ金利政策継続期間に対する確率密度関数の推計例

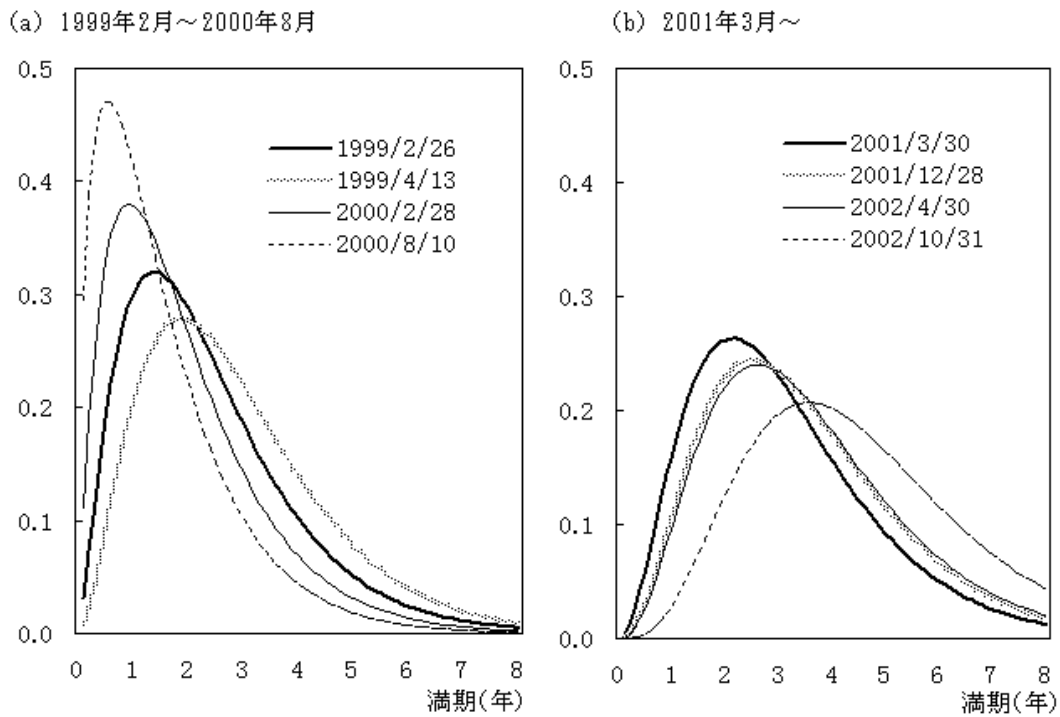
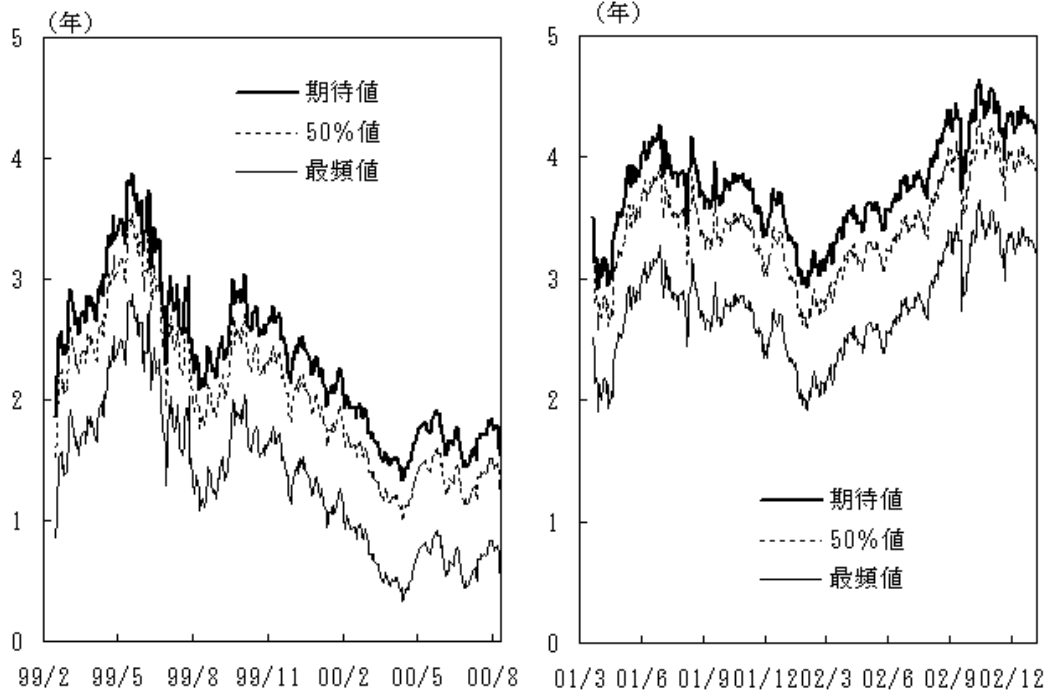


図 6: 確率密度関数の評価方法の比較

(a) 1999年2月～2000年8月

(b) 2001年3月～



4 結語

本稿は、国債価格に内包されたゼロ金利政策の継続期間に対する市場参加者の期待を定量的に抽出するために、従来型の Vasicek モデルに「ゼロ金利政策の継続期間」という要素を加味することによって、ゼロ金利政策下におけるイールド・カーブ・モデルを構築した。また、実証分析から、本稿モデルは、従来型の Vasicek モデルに比べてイールド・カーブに対するフィットが飛躍的に向上していることが確かめられた。さらに、ゼロ金利政策継続期間に対する確率分布の推移についても、ゼロ金利政策が解除された 2000 年 8 月付近で分布が解除方向へシフトするなど、ある程度妥当な分布を抽出できることが判明した。

最後に残された課題の一部を列挙する。

- (1) 本稿では、ゼロ金利政策継続期間に対する確率分布を先験的に仮定し、恣意性を排除するためにできるだけ多くの分布型を用いて比較を行ったが、こうしたアプローチが妥当なものかどうかを検証する必要がある。
- (2) 本稿では、マネー・マーケットの金利と国債市場の金利は、完全な裁定関係にはないとして、国債市場データのみから瞬間的スポット・レートを推計したが、本稿の趣旨と照らせば、何故両市場間で裁定が働かないのかについても検討すべき問題であり、この点も課題として残った。

ゼロ金利政策と金利の期間構造モデルの関係については、現下の金融政策環境を踏まえると、極めて興味深いテーマであるにも関わらず、それほど取り組まれていないのが現状である。本稿はこうした状況を勘案したささやかな試みとして作成されたものであり、次の段階への一過程に過ぎない。この種の研究が進展することを期待しつつ、最後に挙げた課題を中心に今後自らに与えられた重要な課題として他日を期したい。

補論 1 リスクの市場価格

スポット・レート・モデルでは、割引債を瞬間的スポット・レートの上に書かれたデリバティブと考える。瞬間的スポット・レートを $r(t)$ 、観測経済における標準ブラウン運動を $z(t)$ 、ドリフトを $\mu(r(t), t)$ 、ボラティリティを $\sigma(r(t), t)$ とすると、瞬間的スポット・レートが従う微分方程式は、

$$dr(t) = \mu(r(t), t)dt + \sigma(r(t), t)dz(t)$$

と書ける。

この瞬間的スポット・レートの上に書かれた満期 T のデリバティブの価格 $\xi(t)$ がある滑らかな関数 $\xi(r(t), t)$ で表現されているとする。このとき、 $\xi(t)$ は、伊藤の公式より確率微分方程式

$$\begin{aligned} \frac{d\xi(t)}{\xi(t)} &= \mu_\xi(t)dt + \sigma_\xi(t)dz(t), 0 \leq t \leq T \\ \mu_\xi(t) &= \frac{1}{\xi(t)}(\xi_r \mu + \xi_t + \frac{\xi_{rr}}{2}\sigma^2) \\ \sigma_\xi(t) &= \frac{\xi_r \sigma}{\xi(t)} \end{aligned} \quad (A-1)$$

に従う。満期が異なる 2 つのデリバティブを用いてリスクのないポートフォリオを複製することを考えると、単位あたりの超過収益率 $\frac{\mu_\xi(t) - r(t)}{\sigma_\xi(t)}$ は、デリバティブの満期に依存せず一定の値となる。即ち、

$$\frac{\mu_\xi(t) - r(t)}{\sigma_\xi(t)} \equiv \lambda(t) \quad (A-2)$$

と書け、この瞬間的スポット・レートの上に書かれたデリバティブのリスク・リターンの特ラードオフを表す尺度 $\lambda(t)$ をリスクの市場価格と呼ぶ。

リスクの市場価格は、一般に、すべての履歴に依存する確率過程となるが、本稿モデルが基にしている Vasicek モデルは、時刻 t によらず一定の値と仮定する。

なお、リスクの市場価格は、以下の理由により通常は負の値となる。

- (1) 金利の上昇に対して割引債価格は下落するために、 ξ_r はマイナスとなる。 σ や $\xi(t)$ が正であるため、(A-1) 式により、 σ_ξ もマイナスとなる。
- (2) 無裁定を仮定しているため、リスク資産のリターンは無リスク資産のリターンよりも常に大きい ($\mu_\xi(t) - r(t) > 0$)。
- (3) (1) (2) より、リスクの市場価格の定義式 (A-2) 左辺の分子は正、分母は負となるので、全体としては負の値を取る。

補論 2 債券価格の導出

ここでは、(7) 式の導出の概要を示す。まず、(6) 式より、満期 T に 1 円支払われる割引債の時点 t における価格 $v(t, T)$ は、

$$v(t, T) = E^{P^*} \left[\exp \left\{ - \int_t^T r_s^\tau ds \right\} \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

と表される。この右辺を

$$\begin{aligned} & E^{P^*} \left[1_{\{\tau < t\}} \exp \left\{ - \int_t^T r_s^\tau ds \right\} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ & + E^{P^*} \left[1_{\{t \leq \tau \leq T\}} \exp \left\{ - \int_t^T r_s^\tau ds \right\} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ & + E^{P^*} \left[1_{\{T < \tau\}} \middle| \mathcal{F}_t \right] \end{aligned} \quad (\text{A-3})$$

のように場合分けして考える。

まず第 1 項は、

$$\begin{aligned} & E^{P^*} \left[1_{\{\tau < t\}} \exp \left\{ - \int_t^T r_s^\tau ds \right\} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ & = 1_{\{\tau < t\}} E^{P^*} \left[\exp \left\{ - \int_t^T r_s^\tau ds \right\} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ & = 1_{\{\tau < t\}} v^\tau(t, T) \end{aligned} \quad (\text{A-4})$$

と計算される。ただし、 $v^u(t, T)$ は、Vasicek 型の債券価格で、時点 $u (\leq t)$ における瞬間的スポット・レートをゼロとしたものである。(7) 式の H_1, H_2 を利用すれば

$$v^u(t, T) = H_1(T - t) e^{-H_2(T - t)r_t^u}$$

と表される。

次に、第 3 項を計算する。時刻 τ 以前における不確実性は政策の解除のみであるので、 $1_{\{T < \tau\}}$ を \mathcal{F}_t で条件付けた期待値は

$$\begin{aligned} & E^{P^*} [1_{\{T < \tau\}} | \mathcal{F}_t] \\ & = 1_{\{\tau \leq t\}} E^{P^*} [1_{\{T < \tau\}} | \{\tau \leq t\}] + 1_{\{t < \tau\}} E^{P^*} [1_{\{T < \tau\}} | \{t < \tau\}] \\ & = 1_{\{t < \tau\}} P^*(T < \tau | \{t < \tau\}) \\ & = 1_{\{t < \tau\}} \frac{P^*(T < \tau)}{P^*(t < \tau)} \\ & = 1_{\{t < \tau\}} \frac{1 - \Psi(T)}{1 - \Psi(t)} \end{aligned} \quad (\text{A-5})$$

と求まる^{*19}。

^{*19} 丸茂・家田 (2000) や Lando (1998) を参照。

第2項を計算する前に少し準備をしておく。まず、確率過程 N を

$$N_t \equiv 1_{\{\tau \leq t\}}$$

と定義する。また、 τ に関するハザード率 l は、 τ の分布関数 Ψ と確率密度関数 ψ を使って

$$l_t \equiv \frac{\psi(t)}{1 - \Psi(t)}$$

と表される。ここで、 l は時間に依存する確定的な関数である。これら N, l に対して、

$$M_t \equiv N_t - \int_0^t l_s(1 - N_s)ds \quad (\text{A-6})$$

で表される確率過程 M が測度 P^* の下でマルチンゲールになることが知られている (ドゥーブ=マイヤー分解)。 (A-6) 式は微分型にすると、

$$dN_t = dM_t + l_t(1 - N_t)dt \quad (\text{A-7})$$

と表すことができる。

また、 Z を

$$Z_t \equiv v^t(t, T) = E^{P^*} \left[\exp \left\{ - \int_t^T r_s^t ds \right\} \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

と定義すると、最右辺の期待値も (A-4) 式と同様に Vasicek 型の債券価格式を利用して、

$$Z_t = v^t(t, T) = H_1(T - t)e^{-H_2(T-t)r_t^t}$$

と表される。(4) 式の瞬間的スポット・レートの定義より $r_t^t = 0$ が確定的なので、

$$Z_t = H_1(T - t)$$

となるが、これは (確率過程でなく) 確定的な関数である。

さて、(A-3) 式右辺の第2項の期待値は、

$$\begin{aligned} & E^{P^*} \left[1_{\{t \leq \tau \leq T\}} \exp \left\{ - \int_t^T r_s^\tau ds \right\} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= E^{P^*} \left[1_{\{t \leq \tau \leq T\}} E^{P^*} \left[\exp \left\{ - \int_\tau^T r_s^\tau ds \right\} \middle| \mathcal{F}_\tau \right] \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= E^{P^*} \left[1_{\{t \leq \tau \leq T\}} Z_\tau \middle| \mathcal{F}_t \right] \end{aligned}$$

と書ける。さらに期待値の中身を (A-7) 式を使って、

$$\begin{aligned} 1_{\{t \leq \tau \leq T\}} Z_\tau &= \int_t^T Z_s dN_s \\ &= \int_t^T Z_s dM_s + \int_t^T Z_s l_s(1 - N_s)ds \end{aligned}$$

のように分解すると、最右辺の第 1 項がマルチンゲールであることから、この期待値は

$$\begin{aligned}
 E^{P^*} \left[1_{\{t \leq \tau \leq T\}} Z_\tau \middle| \mathcal{F}_t \right] &= E^{P^*} \left[\int_t^T Z_s l_s (1 - N_s) ds \middle| \mathcal{F}_t \right] \\
 &= \int_t^T Z_s l_s E^{P^*} [1 - N_s | \mathcal{F}_t] ds \\
 &= \int_t^T Z_s l_s E^{P^*} [1_{\{s < \tau\}} | \mathcal{F}_t] ds \quad (\text{A-8})
 \end{aligned}$$

となる。(A-8) 式の最右辺の条件付き期待値を計算すれば良いわけだが、 $s \geq t$ より (A-5) 式と同様の式変形ができて、

$$\begin{aligned}
 E^{P^*} \left[1_{\{t \leq \tau \leq T\}} Z_\tau \middle| \mathcal{F}_t \right] &= \int_t^T Z_s l_s 1_{\{t < \tau\}} \frac{1 - \Psi(s)}{1 - \Psi(t)} ds \\
 &= 1_{\{t < \tau\}} \int_t^T v^s(s, T) \frac{\psi(s)}{1 - \Psi(s)} \frac{1 - \Psi(s)}{1 - \Psi(t)} ds \\
 &= 1_{\{t < \tau\}} \int_t^T H_1(T - s) \frac{\psi(s)}{1 - \Psi(t)} ds
 \end{aligned}$$

と整理される。

$\tau > t$ という条件の下では、(A-3) 式第 1 項がゼロになるので、(7) 式を得る。

補論 3 イールド・カーブの推計方法

スポット・レート・モデルと整合的なイールド・カーブを求めるためには、様々な満期を持つ割引債価格を知る必要があるが、市場で取引されている大部分の債券は利付債券である。ここでは、利付債券の価格から割引債価格を推計する際に用いた McCulloch の方法^{*20}についての説明を行う。

McCulloch の方法では、ディスカウント・ファクターに 3 次のスプライン多項式を仮定する。具体的には、債券価格とキャッシュフローの関係式

$$P + A = \sum_t C(t) \delta(t) \quad (\text{A-9})$$

において

$$\delta(t) = 1 + \sum_{i=1}^k a_i g_i(t)$$

とする。ただし、 P は債券価格、 A は経過利子、 $C(t)$ はキャッシュフロー、 $\delta(t)$ はディスカウント・ファクターであり、 a_i は推計すべきパラメータである。 $\delta(t)$ は、3 次スプライン

^{*20} 詳しくは、McCulloch (1971) を参照。

イン多項式との仮定から、

$$g_i(t) = \begin{cases} 0 & (t < d_{i-1}) \\ \frac{(t - d_{i-1})^3}{6c_i} & (d_{i-1} \leq t < d_i) \\ \frac{c_i^2}{6} + \frac{c_i(t - d_i)}{2} + \frac{(t - d_i)^2}{2} - \frac{(t - d_i)^3}{6(d_{i+1} - d_i)} & (d_i \leq t < d_{i+1}) \\ (d_{i+1} - d_{i-1}) \left[\frac{2d_{i+1} - d_i - d_{i-1}}{6} + \frac{t - d_{i+1}}{2} \right] & (d_{i+1} \leq t) \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, k-1)$$

$$g_k(t) = t$$

となる。ただし、

$$c_i = d_i - d_{i-1}$$

d_i はノット・ポイントである。この $g_i(t)$ を用いて (A-9) 式のパラメータ a_i を最小二乗法により推定する。こうして推定された a_i を用いて、イールドは、

$$Y(t, T) = -\frac{\ln(1 + \sum_i a_i g_i(T - t))}{T - t}$$

と表現される。

なお、本稿では、1年刻みのノットポイントを設定した。

補論 4 イールド・カーブの主成分分析

主成分分析とは、複数の変数を扱う際に、相関構造を考慮することによってそれらの変数からより少ない数の変数（主成分と呼ぶ）を合成し、データが有する情報を解釈しやすくするための方法である。本稿では、主成分分析の結果との比較を通じて、Vasicek and Fong モデルで推計した瞬間的スポット・レートを実証分析に用いる根拠の1つとしているが、ここでは、第1主成分の算出方法について解説を加える。

第 i 日の年限 j に対応する金利の前日との差分を x_{ij} で表現する。このとき、ベクトル \mathbf{x}_j を標準化（各成分の平均が0、分散が1となるベクトルへの変換）したものを \mathbf{u}_j とする。即ち、 \mathbf{x}_j の平均を \bar{x}_j 、標準偏差を s_j とすると、

$$\mathbf{u}_j = \frac{\mathbf{x}_j - \bar{x}_j}{s_j}$$

$$\mathbf{u}_{ij} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots]$$

となる。

このベクトル \mathbf{u}_j の相関係数行列を R とし、 R の固有値を大きい順^{*21}に $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ とする。それぞれの固有値に対応する長さが1に規格化された固有ベクトルを $\mathbf{a}(1), \mathbf{a}(2), \dots$

*21 一般に、 R の性質から、固有値はすべて正の実数となる。

とすると、第 i 日の第 1 主成分 $z(1)_i$ は、

$$z(1)_i = \sum_j a(1)_j \cdot u_{ij}$$

と計算される。この値は、イールド・カーブの差分に対する主成分なので、瞬間的スポット・レートと比較するためには、第 1 主成分の値を累積する必要がある。通常、第 1 主成分は、イールド・カーブの平行・シフトを表現する成分として認識されている。図 2 に示した第 1 主成分の累積は、1994 年 9 月 1 日から 1999 年 2 月 10 日までを分析対象区間とし、1994 年 9 月 1 日をゼロとして、第 1 主成分を逐次累積したものである。同図からは、本稿における第 1 主成分も通常の認識と同じような解釈が可能であることが分かる。

補論 5 瞬間的スポット・レートの推計

本稿では、市場のイールド・カーブにノットポイントを持たない Vasicek and Fong モデル^{*22}をフィットさせることによって、瞬間的スポット・レートの推計を行った。ここでは、その詳細を述べる。

Vasicek and Fong モデルでは、割引債価格 $v(t, T)$ は

$$v(t, T) = \theta_1 e^{-\omega(T-t)} + \theta_2 e^{-2\omega(T-t)} + \theta_3 e^{-3\omega(T-t)} \quad (\text{A-10})$$

で定められているので、イールドは

$$\begin{aligned} Y(t, T) &= -\frac{\ln v(t, T)}{T-t} \\ &= -\frac{\ln(\theta_1 e^{-\omega(T-t)} + \theta_2 e^{-2\omega(T-t)} + \theta_3 e^{-3\omega(T-t)})}{T-t} \end{aligned}$$

となる ($\theta_1, \theta_2, \theta_3$ はパラメータ)。ただし、瞬間的フォワード・レートを計算すると、

$$\begin{aligned} f(t, T) &= -\frac{\partial}{\partial T} \ln v(t, T) \\ &= \omega \frac{\theta_1 e^{-\omega(T-t)} + 2\theta_2 e^{-2\omega(T-t)} + 3\theta_3 e^{-3\omega(T-t)}}{\theta_1 e^{-\omega(T-t)} + \theta_2 e^{-2\omega(T-t)} + \theta_3 e^{-3\omega(T-t)}} \end{aligned} \quad (\text{A-11})$$

となり、 $T-t \rightarrow \infty$ で右辺は ω に収束することから、 ω は $T-t$ を十分大きくしたときのフォワード・レートに一致させる必要がある。

これらの条件のもと、瞬間的スポット・レート $r(t)$ は、定義式から、

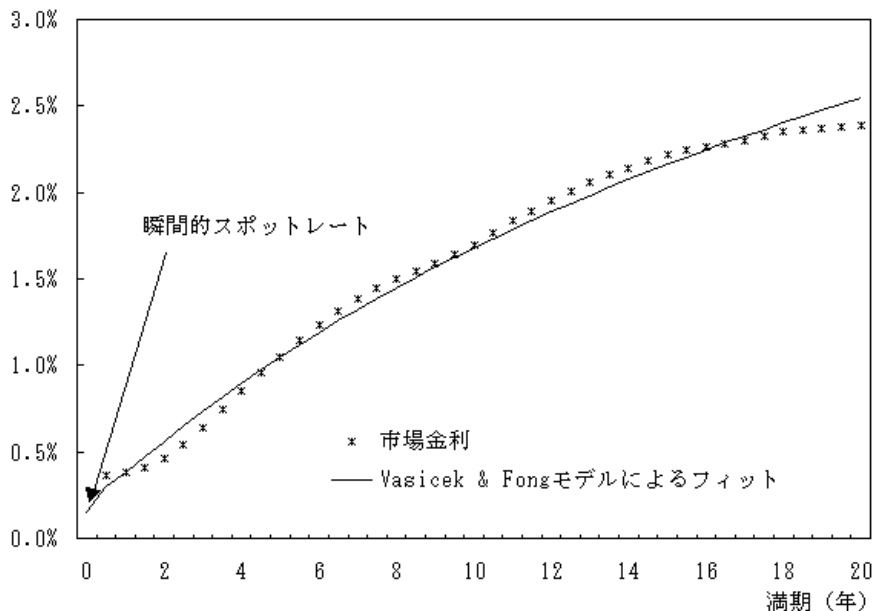
$$\begin{aligned} r(t) &= f(t, t) \\ &= \frac{\omega(\theta_1 + 2\theta_2 + 3\theta_3)}{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3} \end{aligned} \quad (\text{A-12})$$

と計算される。

本稿では、 ω として、市場金利から計算した 20 年のフォワード・レートを採用した。Vasicek and Fong モデルのフィットの例を図 A-1 に示す。

^{*22} Vasicek and Fong (1982) 参照。

図 A-1: 瞬間的スポット・レートの推計例



補論 6 ゼロ金利継続期間に様々な確率分布を仮定した場合の推計結果

3.2 節で述べたように、市場参加者に期待されるゼロ金利政策の継続期間 τ の確率密度関数は、負の定義域を持たないこと、単峰形であること等、いくつかの条件が課されている。それらの条件を満たす確率密度関数としては、標準ガンマ分布以外に、対数正規分布、ワイブル分布、ガンマ分布、指数分布、カイ 2 乗分布などが挙げられる。ここでは、 τ に対してこれらの確率分布を仮定した場合の推計結果を示す（表 A-1 及び表 A-2 を参照）。

(1) 2 パラメータの分布関数

(a) 対数正規分布

対数正規分布の確率密度関数は、

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}P_2x} \exp\left[-\frac{(\log x - P_1)^2}{2P_2^2}\right]$$

である。ここで、 P_1 及び $P_2 (> 0)$ はパラメータである。この分布の期待値は

$$E[x] = \exp\left(P_1 + \frac{1}{2}P_2^2\right)$$

で与えられる。この分布を仮定したときの推計では、ゼロ金利政策の解除観測が台頭していた時期（2000年8月10日）に、 $E[\tau]$ が大きな値となっている。

(b) ワイブル分布

ワイブル分布の確率密度関数は

$$\varphi(x) = \frac{P_4}{P_3} \left(\frac{x}{P_3}\right)^{P_4-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{P_3}\right)^{P_4}\right] \quad (\text{A-13})$$

表 A-1: 2 パラメータの分布関数を仮定した場合の推計結果

	対数正規分布			ワイブル分布		
	$E[\tau]$	残差平方和		$E[\tau]$	残差平方和	
99/02/26	6.107	-2.812	0.0006929	0.916	-2.348	0.0006154
99/04/13	7.774	-2.589	0.0005871	1.036	-2.027	0.0005083
00/02/28	2.592	-1.746	0.0004183	1.010	-1.671	0.0003693
00/08/10	7.320	-1.857	0.0005529	0.641	-1.557	0.0005029
01/03/30	5.078	-1.511	0.0003275	1.213	-1.338	0.0002552
01/06/20	4.677	-1.565	0.0002969	1.861	-1.483	0.0002043
01/08/31	4.206	-1.608	0.0003036	1.695	-1.535	0.0001980
01/12/10	4.309	-1.665	0.0003678	1.574	-1.568	0.0002578

	ガンマ分布			標準ガンマ分布 (参考)		
	$E[\tau]$	残差平方和		$E[\tau]$	残差平方和	
99/02/26	3.362	-2.454	0.0006093	2.378	-2.102	0.0010006
99/04/13	4.845	-3.091	0.0004820	2.881	-1.774	0.0008719
00/02/28	2.402	-1.820	0.0003764	1.925	-1.618	0.0004695
00/08/10	1.825	-0.762	0.0005196	1.537	-1.369	0.0008047
01/03/30	5.434	-3.674	0.0002090	3.123	-1.222	0.0004690
01/06/20	6.749	-3.841	0.0008843	4.146	-1.460	0.0002901
01/08/31	7.166	-4.605	0.0005657	3.701	-1.506	0.0002939
01/12/10	7.850	-5.987	0.0004432	3.581	-1.520	0.0003817

(注) $E[\tau]$ はゼロ金利政策継続期間の期待値、 λ はリスクの市場価格、RSS は平方二乗和を表す。

期待値は、

$$E[x] = P_3 \Gamma\left(\frac{P_4 + 1}{P_4}\right)$$

と表される。ここで、 Γ はガンマ関数、 P_3, P_4 はパラメータである。

この分布は、フィットは良いが、 $E[\tau]$ の水準が他の分布に比べて小さい。

(c) ガンマ分布

ガンマ分布の確率密度関数は

$$\varphi(x) = \frac{x^{P_5 - 1} \exp(-\frac{x}{P_6})}{P_6^{P_5} \Gamma(P_5)}$$

期待値は、

$$E[x] = P_5 P_6$$

パラメータは、 P_5 と P_6 である。この分布を仮定すると、他の分布と同様に当てはまりは良いが、リスクの市場価格の変化幅が大きい。なお、 $P_6 = 1$ のとき、標準ガンマ分布となる。

表 A-2: 1 パラメータの分布関数を仮定した場合の推計結果

	指数分布			カイ二乗分布		
	$E[\tau]$	残差平方和		$E[\tau]$	残差平方和	
99/02/26	3.355	-2.387	0.0006125	2.782	-2.222	0.0007118
99/04/13	4.655	-2.214	0.0005437	3.350	-1.895	0.0006064
00/02/28	2.363	-1.717	0.0003926	2.259	-1.6953	0.0003742
00/08/10	1.846	-1.435	0.0006306	1.8233	-1.4275	0.0006014
01/03/30	5.320	-1.611	0.0004095	3.621	-1.3157	0.0002888
01/06/20	11.735	-3.085	0.0008659	4.771	-1.5981	0.0002981
01/08/31	7.901	-2.398	0.0007878	4.263	-1.6323	0.0002946
01/12/10	7.141	-2.276	0.0007332	4.123	-1.6421	0.0003178

	標準ワイブル分布			標準ガンマ分布 (参考)		
	$E[\tau]$	残差平方和		$E[\tau]$	残差平方和	
99/02/26	0.980	-1.667	0.002823	2.378	-2.102	0.0010006
99/04/13	0.979	-1.266	0.002978	2.881	-1.774	0.0008719
00/02/28	0.980	-1.376	0.001621	1.925	-1.618	0.0004695
00/08/10	1.300	-1.293	0.001129	1.537	-1.369	0.0008047
01/03/30	0.980	-0.797	0.002394	3.123	-1.222	0.0004690
01/06/20	0.980	-0.772	0.003386	4.146	-1.460	0.0002901
01/08/31	0.980	-0.890	0.003220	3.701	-1.506	0.0002939
01/12/10	0.980	-0.924	0.003152	3.581	-1.520	0.0003817

(注) $E[\tau]$ はゼロ金利政策継続期間の期待値、 λ はリスクの市場価格、RSS は平方二乗和を表す。

(2) 1 パラメータの分布関数

(a) 指数分布

指数分布の確率密度関数及び期待値は、

$$\varphi(x) = \frac{1}{P_7} \exp\left(-\frac{x}{P_7}\right)$$

$$E[x] = \frac{1}{P_7}$$

である (パラメータは P_7)。この分布は、推計されたパラメータの安定性、フィットの当てはまり具合とも良好であるが、常に足許の解除確率が最大となってしまうために、実際の期待形成を表現する確率分布とは考え難い。

(b) カイ 2 乗分布

カイ 2 乗の確率密度関数と期待値は、

$$\varphi(x) = \frac{1}{2^{\frac{P_8}{2}} \Gamma\left(\frac{P_8}{2}\right)} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) x^{\frac{P_8}{2}-1}$$

$$E[x] = P_8$$

で与えられる (パラメータは P_8)。フィットの様子、パラメータの安定性ともに良好であり、標準ガンマ分布を仮定した場合とほぼ同様の結果が得られている。

(c) 標準ワイブル分布

(A-13) 式のワイブル分布において、 $P_3 = 1$ としたものが標準ワイブル分布である。フィットは悪く、 τ の期待値がゼロ金利政策解除の直前に突発的に大きな値を示すなど、パラメータの妥当性も乏しい。

参考文献

- 木島正明 (1999), 『期間構造モデルと金利デリバティブ』, 朝倉書店.
- 小暮厚之 (1995), 「経済データからの確率微分方程式の推定について: 離散化とその問題点」, 『千葉大学 経済研究』, 第 10 巻 2 号, 千葉大学.
- 白塚重典・藤木裕 (2001), 「ゼロ金利政策下における時間軸効果: 1999-2000 年の短期金融市場データによる検証」, 『金融研究』, 第 20 巻 4 号, 日本銀行金融研究所, pp.137-170.
- 丸茂幸平・家田明 (2000), 「信用リスクのある金融商品のコックス過程を用いたプライシング方法」, 『金融研究』, 第 20 巻 1 号, 日本銀行金融研究所, pp.19-48.
- 森村英典・木島正明 (1991), 『ファイナンスのための確率過程』, 日科技連.
- 吉羽要直・家田明 (2001), 「イールド・カーブ・モデルのパラメータ推定手法」, IMES ディスカッションペーパー 2001-J-10, 日本銀行金融研究所 .
- Cox, J.C., J.E. Ingersoll, and S.A. Ross (1985), "A Theory of the Term Structure of Interest Rates," *Econometrica* **53**, pp.385-407.
- Heath, D., R. Jarrow, and A. Morton (1992), "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates : A New Methodology for Contingent Claims Valuation," *Econometrica* **60**, pp.77-105.
- Hull, J.C. and A. White (1990), "Pricing Interest-rate-derivative Securities," *Review of Financial Studies* **3**, pp.573-592.
- Lando, D. (1998), "On Cox Processes and Credit Risky Securities," *Working Paper*, Department of Operations Research, University of Copenhagen.
- McCulloch, J.H. (1971), "Measuring the Term Structure of Interest Rates," *Journal of Business* **44**, pp.19-31.
- Schonbucher, P.J.(1999), "A LIBOR Market Model with Default Risk," *Working Paper*, Department of Statistics, Bonn University.
- Vasicek, O. (1977), "An Equilibrium Characterization of the Term Structure," *Journal of Financial Economics* **5**, pp.177-188.
- Vasicek, O. and H.G. Fong (1982), "Term Structure Modeling Using Exponential Splines," *Journal of Finance* **37**, pp.339-348.