日本銀行ワーキングペーパーシリーズ

ポートフォリオ理論に基づいた最適な国債満期構成について

西岡慎一*
shinichi.nishioka@boj.or.jp

No.04-J-1
2004年2月

日本銀行
〒103-8660　日本橋郵便局私書箱30号

* 金融市場局

日本銀行ワーキングペーパーシリーズ No.04-J-1
2004 年 2 月

ポートフォリオ理論に基づいた最適な国債満期構成について

西岡 慎一*

【要 旨】

本稿は、投資期間が異なる投資家が存在する市場において、望ましい国債満期構成はどのように決定されるか、また、そのときの市場金利がどのように決定されるかについて問題整理を行った。本稿では、①国債管理政策の目的は「国債発行コストとリスクが最小となるような発行ポートフォリオの決定」であること、②投資期間が異なる投資家が存在すること、に着目してモデルが構築されている。1 点目については、通常、民間経済主体の厚生最大化を国債管理政策の目的とすることが多いが、本稿では、実務面における財政当局の問題意識が、発行コストとリスクの最小化である場合が多いことを考慮した。2 点目については、投資期間の異なる投資家によって、国債の需要構造が異なることを明確にした。これは、現在のわが国の国債市場では、通常、投資期間が長いと言われる生保・年金の国債保有比率と比較して、満期が長い 20 年債、30 年債といった超長期債の発行比率が低いため、他の投資家に比べて、こうした投資家の超長期債に対する潜在的な需要が大きいとされていることを考慮している。こうした、わが国の国債管理政策を巡る特徴点を踏まえて、本稿では、投資期間が異なる投資家のポートフォリオ問題を扱った米澤・大森 [2002] のモデルをベースに、発行コストとリスクを最小化する政府の最適化問題を解くことにより、国債満期構成の含意を導出した。この結果、政府の合理的な行動を前提とすれば、①市場に占める長期投資家の運用資産比率が高まった場合、長期債の発行比率は上昇し、長期債の超過収益率は低下する、②政府が危険回避的となった場合、長期債の発行比率は上昇し、長期債の超過収益率は上昇する、③投資家が危険回避的となった場合、長期債の発行比率は低下し、長期債の超過収益率は上昇する、との結論が得られた。

キーワード：国債管理政策、ポートフォリオ理論

* 日本銀行 金融市場局 金融市場課 Email: shinichi.nishioka@boj.or.jp

本稿を作成するにあたり、米澤康博教授（横浜国立大学）及び日本銀行スタッフから数多くの有益な示唆を受けた。記して感謝したい。もちろん、有り得べき誤りは全て筆者に帰するものである。また、本稿に記された意見・見解は筆者個人のものであり、日本銀行及び金融市場局の公式見解を示すものではない。

1. はじめに

本稿では、国債管理政策の目的を、「国債発行コストとリスクが最小となるような発行ポートフォリオの決定」と定義し、投資期間が異なる国債投資家が存在する市場において、国債満期構成や市場金利はどのように決定されるか、という点について問題整理を行うことを目的としている。

実務面において、各国の財政当局は、国債発行コストやリスクの最小化に大きな関心を寄せている。例えば、イギリスの国債管理局（DMO）は、90 年代の半ばより、国債管理政策の目的を「金融政策の補完」から「国債発行コストとリスクの最小化」に変更した[1]。また、わが国おいても、財務省が、国債管理政策の基本的な考え方として「①確実かつ円滑な発行、②中長期的な調達コストの抑制[2]」を挙げている。

もっとも、理論面においては、完全市場の下では、満期構成によらず発行コストは不変であるため、「発行コストの抑制」を国債管理政策の目的として据えることについては、概して否定的な見解が多い。国債管理政策についてのこれまでの議論を振り返ると[3]、民間経済主体の厚生最大化を国債管理政策の目的とする研究が多い。例えば、Barro [1979, 1995] や Lucas and Stokey [1983] では、最適な国債管理政策は、税率を現在から将来に亘って等しくなるように国債満期を構成することであると結論づけた。更に、Bohn [1990]、Missale [1999] は、この結論を拡充し、国債管理政策の目的を税率の平準化と据えた上で、総需要ショックに対しては、短期債や物価連動債の、総供給ショックに対しては、長期債のウェートを高めるべきと主張している。また、須藤 [2003] は、Barro [1995] を発展させて、ロールオーバーリスクを考慮したモデルを構築し、国債発行額の増加局面においては、長期債のウェートを高めるべき、などの幾つかのインプリケーションを導出している。一方、Stiglitz [1983]、Gale [1990] では、国債満期構成は、世代間において、将来所得のリスクに対する保険機能を持つという点に着目し、満期構成を適当に変化させることにより、望ましいリスク・シェアリングが達成できるとしている。もっとも、市場が不完全である場合、発行コストは満期構成に依存するため、発行コストを国債管理政策の目的に据えることの意義が発生する。例えば、Calvo [1988] では、情報が非対称的な場合、短期債への依存は、将来のインフレーションや債務不履行を連想させることから、政府は高利回り発行を余儀なくされ、結果としてインフレや債務不履行が実現してしまう可能性を指摘し、バランスのとれた国債満期構成を採るべきであることを示唆している。本稿では、各国の財政当局の実務的な関心を考慮して、不確実性のある世界を想定し、国債満期構成の目的を「国債発行コストとリスクの最小化」に据えて分析を行う。

一方、現在のわが国における、国債保有者の比率をみると、運用期間が長期に亘る生保・

---

[1] 須藤 [2003] 参照。
[2] 財務省 [2003] 参照。
[3] 国債管理政策の包括的なサーベイについては、Missale [1997, 1998]、Leong [1999] 参照。

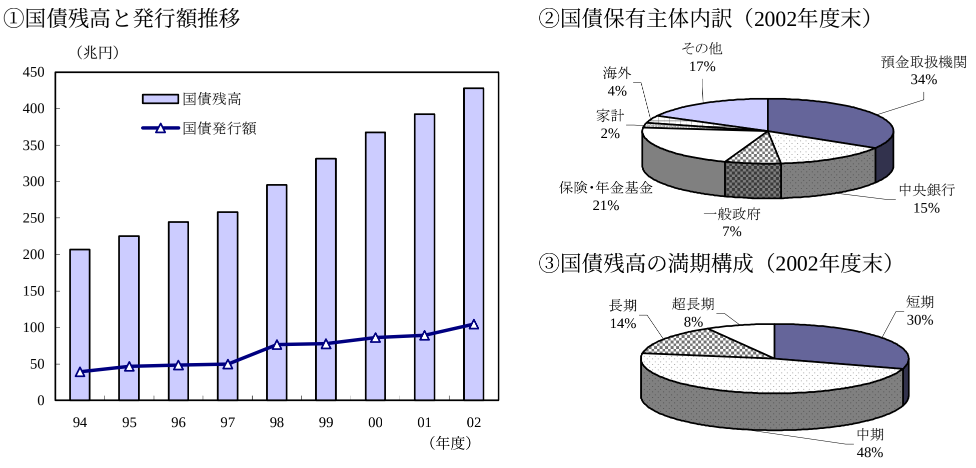
年金のシェアが 20%を超える一方、残存期間別の国債発行額シェアをみると、中短期債のシェアが 8 割近くを占めており、超長期債のシェアは 10%に満たない。近年、機関投資家の間では、金利変動リスクを回避する観点から、運用資産のデュレーションを負債デュレーションに一致させる ALM 運用の考え方が浸透している。特に、生保や年金といった負債デュレーションが長い機関投資家は、現状、負債に比べて運用資産のデュレーションが短いことから、超長期債を中心とした満期が長い国債に対する需要が潜在的に大きいとの見方が多い。

こうしたわが国の財務当局の問題意識や国債需要構造を踏まえて、本稿では、投資期間が異なる投資家のポートフォリオ問題を扱った米澤・大森 [2002] のモデルをベースに、発行コストとリスクを最小にする政府の行動を加えることにより、政府にとっての望ましい国債満期構成がいかに決定されるか、また、そのときの市場金利がどのように決定されるかについて分析を行う。

本稿で得られた結論をあらかじめ要約すると、①市場に占める長期投資家の運用資産比率が高まった場合、長期債の発行比率は上昇し、長期債の超過収益率は低下する、②政府が危険回避的となった場合、長期債の発行比率は上昇し、長期債の超過収益率は上昇する、③投資家が危険回避的となった場合、長期債の発行比率は低下し、長期債の超過収益率は上昇する。

本稿の構成は以下の通りである。第 2 節では、投資期間が異なる投資家が存在する場合の債券ポートフォリオ問題を扱った米澤・大森 [2002] のモデルを紹介する。第 3 節では、前節のモデルをベースに、政府の発行コスト・リスク最小化問題を解くことにより、政府にとって最適な国債満期構成についてのインプリケーションを引き出す。第 4 節では、本稿で得られた結論と残された課題を指摘する。

（図表 1）わが国の残存期間別・保有主体別国債発行残高



（注）1. 国債発行額は収入金ベース、国債残高は額面ベース。2001年度までは実績、2002年度は補正予算ベース。
2. 国債残高の満期構成における、「短期」は2年未満、「中期」は2年以上7年未満、「長期」は7年以上10年未満、「超長期」は10年以上を示す。

（出所） 財務省「日本国債ニュースレター」2003年7月号
日本銀行「資金循環統計」

2. 投資家の国債需要構造

ここでは、通常のポートフォリオ理論の枠組みをベースに、投資期間が異なる二人の投資家が各々最適化行動を採った場合、債券需要がどのように記述されるかについて扱った米澤・大森 [2002] のモデルを紹介する。このモデルの特徴は、安全資産が、短期投資家にとっては短期債、長期投資家にとっては長期債、と異なるため、長期債を安全資産とみなす長期投資家の長期債利回りに対する評価が、短期投資家の評価より低い。このため、市場における長期投資家（短期投資家）のシェアが大きくなるほど、長期債の期待利回りは低下（上昇）する。

2.1 モデルセッティング

2 期間、2 投資家の経済を考える。この経済には 1 期債と 2 期債が存在し、それぞれ、短期債、長期債と呼ぶ。投資家 S（短期投資家）は 1 期間だけ生存し、投資家 L（長期投資家）は 2 期間生存する。投資家 S と投資家 L の初期資産を、それぞれ、W^S 、W^L とし、長期債保有比率を w^S 、 w^L とする。投資家 S と投資家 L の終期における資産収益率と予算制約式を以下の通り表す。

投資家 S：$(1-w^S)\cdot(1+r_1)+w^S(1+\tilde{R}_1)$ (1)

投資家 L：$(1-w^L)\cdot(1+r_1)\cdot(1+\tilde{r}_2)+w^L(1+Y)^2$ (2)

ここで、r_i は、i 期の短期債利回り、R_i は、i 期の長期債利回り、Y は長期債を満期保有した場合の確定利回りを表す。ここで、r_1、Y は、第 1 期において既知と仮定する。また、$\tilde{X}$ は確率変数であることを表す。（1）式より、投資家 S は、$1-w^S$ の比率で短期債を、w^S の比率で長期債を 1 期間保有する。短期債利回り（r_1）は確定変数である一方、1 期目の長期債利回り（$\tilde{R}_1$）は確率変数であるため、投資家 S にとって短期債は安全資産、長期債はリスク資産である。投資家 L は、（2）式より、$1-w^L$ の比率で短期債をロールオーバーしながら 2 期間保有し、w^L の比率で長期債を満期保有する。2 期目における短期債利回り（$\tilde{r}_2$）は確率変数、満期保有した場合の長期債利回り（Y）は確定変数であるため、投資家 L にとって短期債はリスク資産、長期債は安全資産となる。次に、投資家の効用関数 U_p を、

$$U_p \equiv E[R_p]-\frac{1}{2}\lambda_p\cdot Var[R_p] \quad (3)$$

と定義する。ここで R_p は投資家のポートフォリオ収益率、$Var[R_p]$ はポートフォリオ収益率の分散を表す。また、λ_p は投資家の危険回避度を表し、$\lambda_p>0$ と仮定、すなわち投資家は危険回避的と仮定する。この値が大きいほど、投資家は危険回避的となる。また、両投資家の危険回避度は同一であると仮定する[4]。

[4] 両投資家の危険回避度は異なると仮定する方が自然であると思われるが、以下の議論に本質的な違いが生じないため、ここでは同一であると仮定した。

2.2　投資家の最適化問題

以上のモデルセッティングの下で、投資家の最適化問題を解き、長期債需要関数を導く。まず、投資家 S の最適化問題を考える。投資家 S の期待ポートフォリオ収益率と分散は、それぞれ以下の通り書ける。

$$E\left[R_P^S\right]=\left(1-w^S\right)\cdot\left(1+r_1\right)+w^S\left(1+E[\tilde{R}_1]\right) \tag{4}$$

$$Var\left[R_P^S\right]=\left(w^S\right)^2 Var[\tilde{R}_1] \tag{5}$$

これを用いて最適化問題を解くと、投資家 S の長期債保有比率は、以下の通り導くことができる。

$$w^S=\frac{E[\tilde{R}_1]-r_1}{\lambda_p\cdot Var[\tilde{R}_1]} \tag{6}$$

次に投資家 L の最適化問題を考える。長期債利回りは定義により[5]、以下の通り表すことができる。

$$\left(1+Y\right)^2=\left(1+\tilde{R}_1\right)\cdot\left(1+\tilde{r}_2\right) \tag{7}$$

交差項が無視し得るほど小さいと仮定すれば（以下、同様）、上の式は、

$$\left(1+Y\right)^2=1+2Y=\left(1+\tilde{R}_1\right)\cdot\left(1+\tilde{r}_2\right)=1+\tilde{R}_1+\tilde{r}_2 \tag{8}$$

と近似できる。（8）式と（2）式から、投資家 L の収益率は、

$$\begin{aligned} R_P^L &=\left(1-w^L\right)\cdot\left(1+r_1\right)\cdot\left(1+\tilde{r}_2\right)+w^L\left(1+Y\right)^2 \\ &=\left(1-w^L\right)\cdot\left(1+r_1+\tilde{r}_2\right)+w^L\left(1+R_1+\tilde{r}_2\right) \\ &=\tilde{r}_2+\left(1-w^L\right)\cdot\left(1+r_1\right)+w^L\left(1+\tilde{R}_1\right) \end{aligned} \tag{9}$$

と書ける。このとき投資家 L の期待ポートフォリオ収益率と分散は、

$$E\left[R_P^L\right]=E\left[\tilde{r}_2\right]+\left(1-w^L\right)\cdot\left(1+r_1\right)+w^L\left(1+E[\tilde{R}_1]\right) \tag{10}$$

$$Var\left[R_P^L\right]=Var\left[\tilde{r}_2\right]+\left(w^L\right)^2\cdot Var[\tilde{R}_1]+2w^L\cdot Cov[\tilde{r}_2,\tilde{R}_1] \tag{11}$$

と書ける。ここで、（8）式により、

$$1+2Y=1+\tilde{R}_1+\tilde{r}_2 \Leftrightarrow \tilde{r}_2=2Y-\tilde{R}_1 \tag{12}$$

$$Var\left[\tilde{r}_2\right]=Var[\tilde{R}_1]$$

$$Cov[\tilde{R}_1,\tilde{r}]=E[\tilde{R}_1-E[\tilde{R}_1]]\cdot[\tilde{r}_2-E[\tilde{r}_2]]=-Var[\tilde{R}_1]$$

[5] この経済における債券は割引債であると仮定し、P_i を i 期における割引長期債価格とすると、

$$1+R_1=P_1/P_0$$

$$1+r_2=P_2/P_1=100/P_1 \Leftrightarrow P_1=100/\left(1+r_2\right)$$

$$P_0=100/\left(1+Y\right)^2$$

と定義できる。第 1 式に第 2 式、第 3 式を代入すると（7）式が得られる。

が成立することから、（11）式は以下の通り書き換えられる。

$$
\begin{aligned}
Var\left[R_p^L\right] &= Var[\tilde{R}_1] + \left(w^L\right)^2 \cdot Var[\tilde{R}_1] - 2w^L \cdot Var[\tilde{R}_1] \\
&= \left(1-w^L\right)^2 \cdot Var[\tilde{R}_1]
\end{aligned}
\tag{13}
$$

（10）式、（13）式から、投資家 L の最適化問題は、以下の通り解くことができる。

$$
w^L = \frac{E[\tilde{R}_1]-r_1}{\lambda_p \cdot Var[\tilde{R}_1]} + 1 \tag{14}
$$

投資家の最適ポートフォリオにおけるポジション[6]をみると、投資家 S は、（6）式から、$E\left[R_1\right]-r_1>0$ の場合、長期債・短期債ともにロングする一方、$E\left[R_1\right]-r_1<0$ の場合、長期債をショートする。また、$E\left[R_1\right]-r_1=0$ の場合、投資家 S は、短期債のみを保有する。投資家 L については、（14）式から、$E\left[R_1\right]-r_1>0$ の場合、短期債をショートし、長期債をロングする一方、$E\left[R_1\right]-r_1<0$ の場合、長期債・短期債ともにロングする。また、$E\left[R_1\right]-r_1=0$ の場合、長期債のみを保有する。

（図表 2）投資家のポジション

ケース	投資家 S	投資家 L
① $E\left[R_1\right]-r_1>0$	短期債：ロング 長期債：ロング	短期債：ショート 長期債：ロング
② $E\left[R_1\right]-r_1=0$	短期債：ロング 長期債：ゼロ	短期債：ゼロ 長期債：ロング
③ $E\left[R_1\right]-r_1<0$	短期債：ロング 長期債：ショート	短期債：ロング 長期債：ロング

次に、危険回避度 λ_p が上昇した場合における投資家のポートフォリオの変化をみると、投資家 S については、$E\left[R_1\right]-r_1>0$ の場合、λ_p の上昇は、長期債のポートフォリオを減少させる。一方、$E\left[R_1\right]-r_1<0$ の場合、投資家 S にとって長期債は危険資産であるにも関わらず、λ_p の上昇は、長期債のポートフォリオを上昇させる。これは、危険回避度の上昇により、危険資産である長期債のショート・ポジションが解消（w^S のマイナス幅が縮小）されることによる。投資家 L については、$E\left[R_1\right]-r_1>0$ の場合、長期債は安全資産であるにも関わらず、λ_p の上昇は、長期債のポートフォリオを減少させる。これは、危険回避度の上昇により、危険資産である短期債のショート・ポジションが解消（$1-w^L$ のマイナス幅が縮小・w^L のプラス幅が縮小）されることによる。一方、$E\left[R_1\right]-r_1<0$ の場合、λ_p の上昇は、長期債のポートフォリオを上昇させる。

[6] ここでは、投資家が無制限にショート・ポジションをとることができると仮定している。ショート・ポジションに制約がある場合の長期債需要関数は補論 A で示されている。もっとも制約がある場合においても、以下で述べる国債満期構成についてのインプリケーションに本質的な違いはない。

（図表 3）危険回避度λ_pが上昇した場合のポートフォリオの変化

ケース	投資家 S	投資家 L
① $E[R_1]-r_1>0$	短期債：上昇 長期債：減少	短期債：上昇 長期債：減少
② $E[R_1]-r_1=0$	短期債：変化なし 長期債：変化なし	短期債：変化なし 長期債：変化なし
③ $E[R_1]-r_1<0$	短期債：減少 長期債：上昇	短期債：減少 長期債：上昇

2.3　長期債需要関数と市場均衡

以上の議論から、長期債需要関数B^dは、以下の通り書ける。

$$B^d = w^S W^S + w^L W^L \tag{15}$$

（15）式に、（6）式、（14）式を代入すると、長期債の需要関数は以下の通り書き換えることができる。

$$\begin{aligned} B^d &= W^L + \frac{E[\tilde{R}_1]-r_1}{\lambda_p \cdot Var[\tilde{R}_1]} \cdot W \\ \Leftrightarrow \quad w^d &= \phi + \frac{E[\tilde{R}_1]-r_1}{\lambda_p \cdot Var[\tilde{R}_1]} \end{aligned} \tag{16}$$

ここで、$W = W^S + W^L$、$w^d = B^d / W$、$\phi = W^L / W$とする。ϕは総資産に占める投資家 L の保有資産比率を表す。一方、長期債の供給は所与とする。

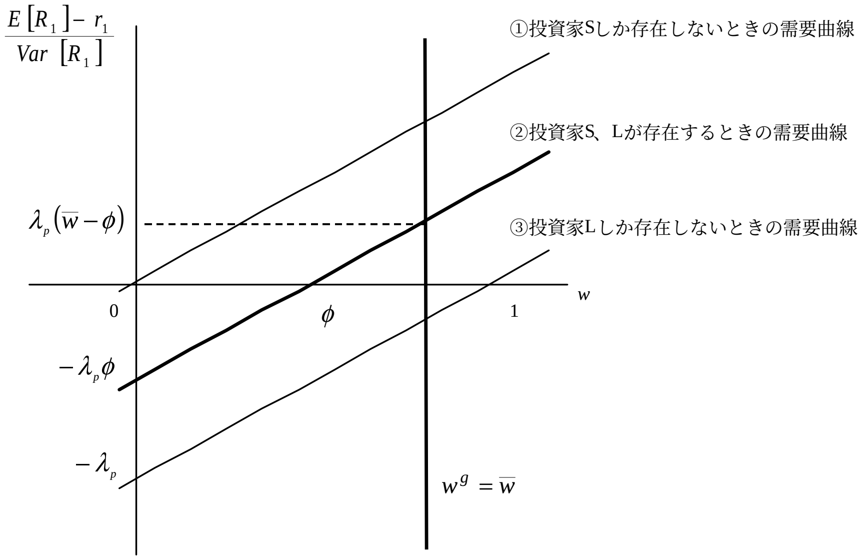
$$w^g = \overline{w} \tag{17}$$

従って、（16）式と（17）式より市場均衡が成立する。長期債のリスク調整後の均衡超過収益率は、

$$\frac{E[\tilde{R}_1]-r_1}{Var[\tilde{R}_1]} = \lambda_p(\overline{w} - \phi) \tag{18}$$

と書ける。長期債の超過収益率は、投資家の危険回避度、長期債発行比率、長期投資家の資産比率により構成されることがわかる。また、長期債需要曲線（16）式と供給曲線（17）式は以下の通り図示できる。

（図表 4）供給一定の下での長期債需要曲線



投資家 S しか存在しない場合（$\phi=0$）、需要関数は、切片ゼロの①線となる。これは、通常のポートフォリオ理論で想定される直線に該当する。また、反対に投資家 L しか存在しない場合（$\phi=1$）、③線となる。両方の投資家が存在するとき、需要曲線は、①線と③線の間に位置する。供給曲線が一定の下では、長期債を安全資産とみなす投資家 L の比率が増加するに従い、需要曲線は下方にシフトするため、長期債の期待利回りは低下することになる。

長期債の供給額に応じた投資家のポジションを整理すると以下の通り。

① $\overline{w}=\phi$ ：長期債発行比率が投資家 L の資産比率と一致するとき

期待長期債利回りは、$E[R_1]=r_1$ となる（図表 2、②のケース）。この場合、投資家 S は短期債のみ、投資家 L は長期債のみを保有する。両投資家とも安全資産しか保有しないため、危険回避的であるにも関わらず、金利リスクは収益率に反映されず、投資家の危険回避度が変化しても、利回りは変化しない。また、このとき、純粋期待仮説（$(1+Y)^2=(1+r_1)\cdot(1+r_2)$）が成立する。

② $\overline{w}>\phi$ ：長期債発行比率が投資家 L の資産比率を上回るとき

期待長期債利回りは、$E[R_1]>r_1$ となり（図表 2、①のケース）、投資家 S、投資家 L 両者が長期債を保有する。また、投資家 L は短期債を空売りしている。

③ $\overline{w}<\phi$ ：長期債発行比率が投資家 L の資産比率を下回るとき

期待長期債利回りは、$E[R_1]<r_1$ となり（図表 2、③のケース）、投資家 S は長期債を空売りし、投資家 L のみが長期債を保有する。

3. 政府の最適な国債満期構成

前節では、投資期間が異なる二人の投資家が各々最適化行動を採った場合、債券需要がど

のように記述されるかについて扱った米澤・大森 [2002] のモデルを紹介した。この節では、政府の行動を明示的に取り入れることにより、最適な国債満期構成についてのインプリケーションを導出する。ここでは、国債満期構成の目的を「発行コストとリスクの最小化」と定義する。国債を狭義に捉えれば、発行体は中央政府に限られるため、政府は国債需要を勘案しながら独占的に行動すると仮定することが自然であると思われる。一方、国債は公的債務の一部として捉えれば、発行体は中央政府のほか、地方公共団体、政府関係機関、外国政府等、様々存在し、債券供給者は各々、価格受容者として競争的に行動すると捉えることも可能である[7]。もっとも、本稿のフレームワークの下では、得られるインプリケーションは、競争均衡の場合と独占均衡の場合で大差がないことから、ここでは、競争均衡のみを考え、独占均衡については、補論 B で述べる。

3.1 競争均衡の導出

政府は、2 期間存在し、危険回避的で、発行コストとリスクを最小化するような短期債と長期債の組み合わせを選択することにより資金調達を行うと仮定する。政府の長期債発行比率を w^g とすると、発行コスト C は、以下の通り書ける。

$$C = \left(1 - w^g\right)\cdot\left(1 + r_1\right)\cdot\left(1 + \tilde{r}_2\right) + w^g\left(1 + Y\right)^2$$

上式は、$1 - w^g$ の比率で短期債発行により、w^g の比率で長期債発行により資金調達することを示す。$\tilde{r}_2$ は確率変数であることから、政府にとって、短期債のロールオーバーがリスクを伴う資金調達手段となる。一方、長期債発行は政府にとってリスクのない資金調達手段である。発行コスト C は以下の通り書き換えることができる。

$$\begin{aligned} C &= \left(1 - w^g\right)\cdot\left(1 + r_1 + \tilde{r}_2\right) + w^g\left(1 + 2Y\right) \\ &= \left(1 - w^g\right)\cdot\left(1 + r_1 + 2Y - \tilde{R}_1\right) + w^g\left(1 + 2Y\right) \\ &= 1 + 2Y - \left(1 - w^g\right)\cdot\left(\tilde{R}_1 - r_1\right) \qquad (19) \end{aligned}$$

（19）式より、発行コストの期待値と分散はそれぞれ以下の通り書ける。

$$\begin{aligned} E\left[C\right] &= 1 + 2Y - \left(1 - w^g\right)\cdot\left(E[\tilde{R}_1] - r_1\right) \\ Var\left[C\right] &= \left(1 - w^g\right)^2 Var[\tilde{R}_1] \end{aligned} \qquad (20)$$

政府の効用関数 U_g は、投資家の効用関数と同様、次式で表されるとする。

$$U_g \equiv E\left[\tilde{R}_P\right] - \frac{1}{2}\lambda_g \cdot Var\left[\tilde{R}_P\right] \qquad (21)$$

λ_g は政府のリスク回避度を表す。ここで、$R_P = -C$ であることから、この最適化問題を解くと、政府の最適発行ポートフォリオは以下の通り書ける。

[7] 現実的には、独占均衡を目論む財政当局と、自由競争を要求する投資家の交渉ゲームと捉えることが妥当かもしれないが、本稿では、この点を今後の研究課題として譲る。

$$w^g = -\frac{E[\tilde{R}_1]-r_1}{\lambda_g \cdot Var[\tilde{R}_1]}+1 \tag{22}$$

一方、投資家の長期債需要関数は（16）式より、以下の通り導かれた。

$$w^d = \phi + \frac{E[\tilde{R}_1]-r_1}{\lambda_p \cdot Var[\tilde{R}_1]} \tag{23}$$

従って、競争均衡における長期債発行比率と長期債超過収益率は、$w^g = w^d$ により、

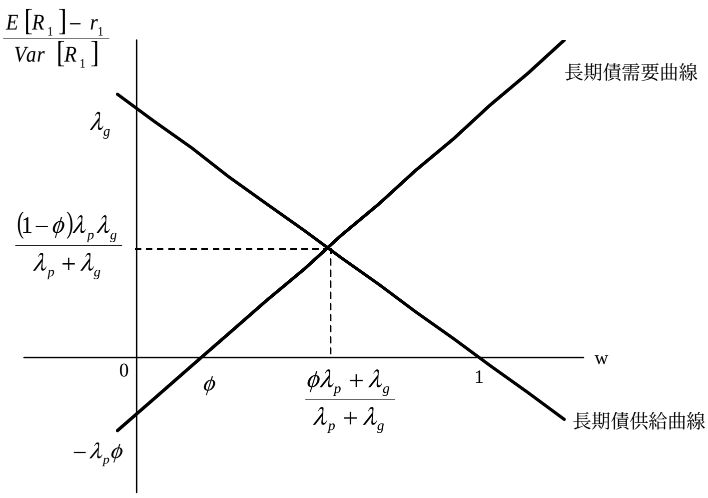
$$\begin{aligned} w &= \frac{\phi\lambda_p+\lambda_g}{\lambda_p+\lambda_g} \\ \frac{E[\tilde{R}_1]-r_1}{Var[\tilde{R}_1]} &= \frac{\lambda_p\lambda_g}{\lambda_p+\lambda_g}(1-\phi) \end{aligned} \tag{24}$$

と導出される。長期債供給曲線（22）式と需要曲線（23）式を図示すると、図表 5 の通り表すことができる。競争均衡における長期債発行比率は、長期投資家の保有資産比率（ϕ）を上回る。これは、$\lambda_p,\lambda_g>0$、$0<\phi<1$のとき、

$$w^* = \frac{\phi\lambda_p+\lambda_g}{\lambda_p+\lambda_g} > \phi$$

が成立することによる。また、このとき長期債の超過収益率は正となる。

（図表 5）競争市場における長期債需要曲線と供給曲線



3.2　インプリケーション

ここで、競争均衡における国債発行比率についてのインプリケーションを整理する[8]。図表 6 では、各パラメータが変化した場合の均衡の変化を概念的に示している。

[8] ここでは、$\lambda_p,\lambda_g>0$、$0<\phi<1$、すなわち内点解における比較静学のみを示す。

① 長期投資家の保有資産比率が拡大した場合、長期債発行比率は上昇する。また、このとき、長期債の超過収益率は低下する。

超過収益率は、投資家が要求するリスク資産に対するプレミアムと解釈することができるが、(24)式からプレミアムの構成要素は、長期債のボラティリティ、投資家、政府の危険回避度のほか、長期投資家の資産比率(ϕ)にも依存する。これは、短期投資家にとって長期債はリスク資産であるのに対し、長期投資家にとっては、長期債は安全資産であるため、どちらの投資家がより多く市場を占めるかによって、長期債のプレミアムに対する評価が変わることによる。図表 6①をみると、長期投資家の比率が拡大した場合、長期債のプレミアムは低下すると同時に、長期債の発行比率は拡大することがわかる。

② 政府の危険回避度が上昇した場合、長期債発行比率は上昇する。このとき、長期債超過収益率は上昇する。

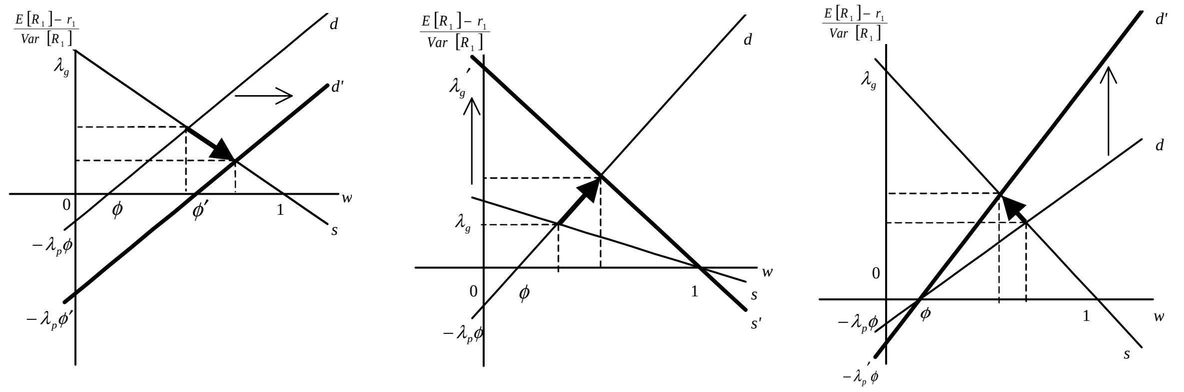
政府にとって、長期債はリスクのない資金調達手段であるため、危険回避度が上昇すると、長期債プレミアムの負担を増加させながら、政府にとってリスクのない長期債発行にシフトする。図表 6②では、国債発行当局の危険回避度が上昇した場合の均衡の変化を示している。逆に、危険回避度が低下すると、長期債発行比率は低下する。仮に、危険回避度がゼロの場合、すなわち、政府がリスク中立であるような極端なケースでは、供給曲線は、長期債超過収益率がゼロの水準で水平となり、長期債発行比率はϕで均衡する。この均衡では、前節で言及した通り、純粋期待仮説が成立する($(1+Y)^2=(1+r_1)\cdot(1+r_2)$)。従って、投資家がリスク回避的であっても、政府がリスク中立であれば、純粋期待仮説が成立することをここでは示している。

③ 投資家の危険回避度が上昇した場合、長期債発行比率は低下する一方、長期債超過収益率は上昇する。

投資家の危険回避度が上昇した場合、短期投資家は、リスク資産である長期債の保有を減少させる一方、長期投資家は、リスク資産である短期債のショート・ポジションを解消(短期債比率のマイナス幅が縮小、1 を超える長期債比率が低下)することから、長期債需要は減少する。このとき、投資家の長期債に対する要求プレミアムは上昇する。図表 6③では、投資家の危険回避度が上昇した場合の均衡の変化を示している。逆に、投資家の危険回避度が低下すると、長期債の需要は拡大する。危険回避度がゼロの場合、すなわち、投資家がリスク中立であるような極端なケースでは、需要曲線は超過収益率がゼロの水準で水平となる。このとき、長期債発行比率は 1、すなわち国債発行当局は資金調達を全て長期債により賄うことを意味する。これは、投資家がリスク中立であるため、政府は、プレミアムの負担なしにリスクのない長期債を発行できることによる。

（図表 6）各パラメータが変化した場合の競争均衡の変化

①長期投資家比率（ϕ）の拡大　②国債発行当局の危険回避度（λ_g）の上昇　③投資家の危険回避度（λ_p）の上昇



4. 結論

本稿では、最適な国債満期構成を、「発行コストとリスクが最小となるような発行ポートフォリオの決定」と定義し、投資期間が異なる債券投資家が存在するモデルを扱った米澤・大森 [2002] をベースに、政府の最適な発行ポートフォリオがいかに決定されるか、また、そのときの市場金利がどのように決定されるかについて議論を行った。その結果、政府の合理的な行動を前提とすると、①市場に占める長期投資家の運用資産比率が高まった場合、長期債の発行比率は上昇し、長期債の超過収益率は低下する、②政府が危険回避的となった場合、長期債の発行比率は上昇し、長期債の超過収益率は上昇する、③投資家が危険回避的となった場合、長期債の発行比率は低下し、長期債の超過収益率は上昇する、との結論が得られた。

一方、本稿のモデルの問題点としては、①長期投資家や政府の最適ポートフォリオは本来、動学的意思決定問題として捉えられるべきであるが、本稿では、簡便のため、静学的な問題として設定していること、②株式やクレジット資産等、他資産との関係を考慮していないこと、③実体経済の変動やそれに伴う国債発行規模の変動を考慮していないこと、等が挙げられる。

本稿は、できるだけシンプルなモデルを用いながら、国債管理政策を議論する際のフレームワークを提示した。具体的に日本政府がどのように国債満期構成を設定すべきかといった、より実務的なインプリケーションを得るためには、上で挙げた種々の問題点を克服する必要があることに加え、精緻な実証分析を行う必要があることは言うまでもない。こうした点については、この種の研究が一段と進展することを期待しつつ、今後の課題としたい。

補論 A.　ショート・ポジションに制約がある場合の長期債需要関数と市場均衡

ここでは、ショート・ポジションに制約がある場合の長期債需要関数と市場均衡を導出する。無制限にショート・ポジションがとれる場合、本文図表 2 により、$E[R_1]-r_1>0$ のとき、投資家 S は短期債・長期債を共にロングする一方、投資家 L は短期債をショートする。また、$E[R_1]-r_1<0$ のとき投資家 S は長期債をショートする一方、投資家 L は短期債・長期債共にロングする。これに従い、ショート・ポジションに制約がある場合における各投資家の最適ポートフォリオは以下の通り定式化することができる。

（$E[R_1]-r_1>0$ の場合）

$$\begin{cases} w^S = \dfrac{E[R_1]-r_1}{\lambda_p \cdot Var[R_1]} \\ w^L = 1 \end{cases} \tag{A1}$$

（$E[R_1]-r_1<0$ の場合）

$$\begin{cases} w^S = 0 \\ w^L = \dfrac{E[R_1]-r_1}{\lambda_p \cdot Var[R_1]}+1 \end{cases} \tag{A2}$$

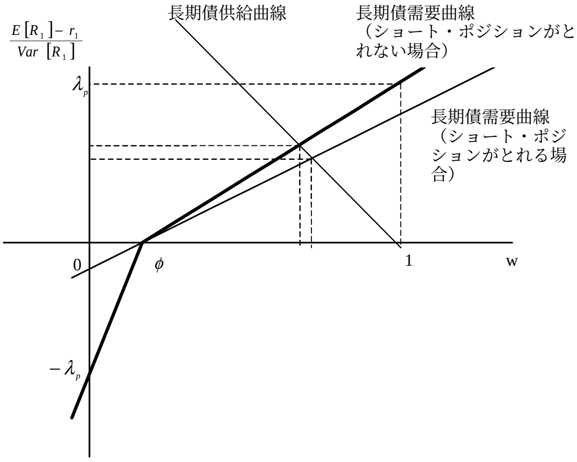
また、$E[R_1]-r_1=0$ のとき、$w^S=0$、$w^L=1$。従って、長期債需要関数 w^d は、以下の通り導くことができる。

$$w^d = \begin{cases} \phi+(1-\phi)\dfrac{E[R_1]-r_1}{\lambda_p \cdot Var[R_1]} & E[R_1]-r_1>0\text{のとき} \\ \phi+\phi\dfrac{E[R_1]-r_1}{\lambda_p \cdot Var[R_1]} & E[R_1]-r_1<0\text{のとき} \\ \phi & E[R_1]-r_1=0\text{のとき} \end{cases} \tag{A3}$$

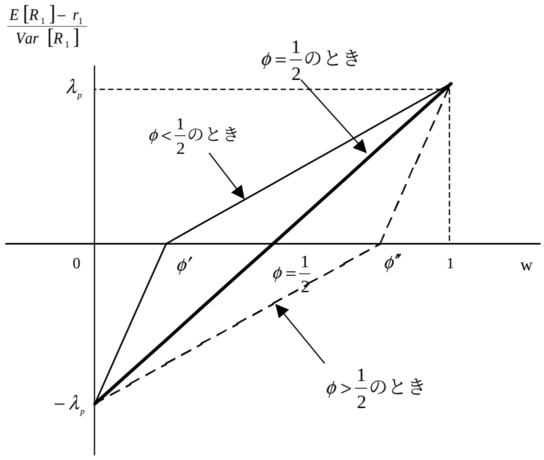
これを図示すると、下図の通り書ける。長期債需要曲線は、$w^d=\phi$ で屈折する（$\phi=1/2$ で直線)。簡単な計算から、競争均衡において、ショート・ポジションに制約がある場合の長期債発行比率は、制約ない場合と比べて低く、長期債利回りは、制約がある場合の方が高い。もっとも、証明は割愛するが、本文 3 節における、国債満期構成についてのインプリケーションは、制約がある場合においても妥当する。

（図表 A-1）ショート・ポジションに制約がある場合の長期債需要曲線

①ショート・ポジションに制約がある場合の長期債需要曲線



②φに応じたショート・ポジションに制約がある場合の長期債需要曲線



補論 B．独占市場における国債満期構成について

政府は、債券需要を所与としながら、独占的に行動すると仮定する。資金調達コストと効用関数は、上と同様、次の通り定義する。

$$C=(1-w^g)\cdot(1+r_1)\cdot(1+r_2)+w^g(1+Y)^2=1+2Y-(1-w^g)\cdot(R_1-r_1) \qquad \text{(B1)}$$

$$E[C]=1+2Y-(1-w^g)\cdot(E[R_1]-r_1)$$
$$Var[C]=(1-w^g)^2 Var[R_1] \qquad \text{(B2)}$$

$$U_g=E[R_P]-\frac{1}{2}\lambda_g\cdot Var[R_P] \qquad \text{(B3)}$$

$R_P=-C$ により、効用関数は以下の通り書き換えられる。

$$U_g=-(1+2Y)+(1-w^g)\cdot(E[R_1]-r_1)-\frac{1}{2}\lambda_g(1-w^g)^2 Var[R_1] \qquad \text{(B4)}$$

一方、投資家の長期債需要関数は本文（16）式より以下の通り導いた。

$$w^d=\phi+\frac{E[R_1]-r_1}{\lambda_P\cdot Var[R_1]}$$
$$\Leftrightarrow \quad E[R_1]-r_1=\lambda_p\cdot Var[R_1]\cdot(w^d-\phi) \qquad \text{(B5)}$$

政府は、長期債需要を所与とした上で、最適化を行う。従って、（B5）式を $w^d=w^g$ とした上で、（B4）式に代入する。

$$U_g=-(1+2Y)+\lambda_p\cdot Var[R_1]\cdot(1-w^g)\cdot(w^g-\phi)-\frac{1}{2}\lambda_g\cdot Var[R_1]\cdot(1-w^g)^2 \qquad \text{(B6)}$$

これを w^g で微分する。

$$\frac{\partial U_g}{\partial w^g} = \lambda_p \cdot Var[R_1] \cdot \left(-w^g + \phi + 1 - w^g\right) + \lambda_g \cdot Var[R_1] \cdot \left(1 - w^g\right)$$
$$= Var[R_1] \cdot \left(\lambda_p (1+\phi) + \lambda_g - (2\lambda_p + \lambda_g) w^g\right) = 0 \tag{B7}$$

また、2 回微分は、

$$\frac{\partial^2 U_g}{\partial {w^g}^2} = -Var[R_1] \cdot (2\lambda_p + \lambda_g) < 0 \tag{B8}$$

となる。従って、独占均衡は（B7）式より、

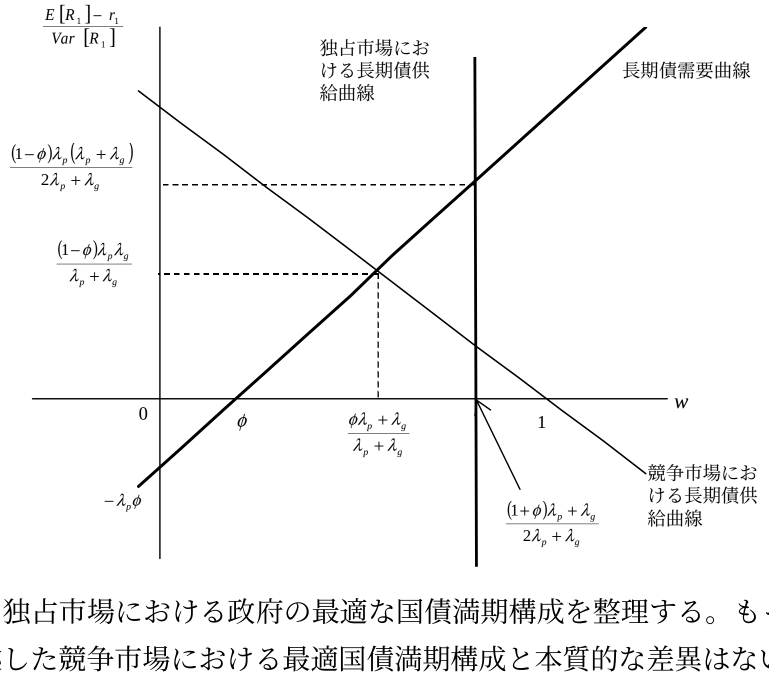
$$w^g = \frac{(1+\phi)\lambda_p + \lambda_g}{2\lambda_p + \lambda_g}$$
$$\frac{E[R_1] - r_1}{Var[R_1]} = \frac{(1-\phi)\lambda_p (\lambda_p + \lambda_g)}{2\lambda_p + \lambda_g} \tag{B9}$$

と書ける。競争均衡における長期債の発行比率を w^*、独占均衡における、長期債の発行比率を w^{**} とすると、 $\lambda_p, \lambda_g > 0$ 、 $0 < \phi < 1$ のとき、

$$w^{**} - w^* = \frac{(1+\phi)\lambda_p + \lambda_g}{2\lambda_p + \lambda_g} - \frac{\phi\lambda_p + \lambda_g}{\lambda_p + \lambda_g} = \frac{(1-\phi)\lambda_p^2}{(2\lambda_p + \lambda_g) \cdot (\lambda_p + \lambda_g)} > 0$$

が成立し、独占均衡における長期債発行比率は競争均衡と比べて高い。また、独占均衡における長期債の期待利回りは、競争均衡と比較して高い。長期債利回りの上昇は、（B9）式より、政府にとってのリスク負債である短期債の借り換えコストの低下を意味することから、政府は、価格支配力を行使して、借り換えコストを低下させながら、安全負債である長期債のウェートを高めることにより自らの効用を高めることが可能となる。

（図表 B-1）独占市場における長期債需要曲線と供給曲線



ここで、独占市場における政府の最適な国債満期構成を整理する。もっとも、ここでの結論は、前述した競争市場における最適国債満期構成と本質的な差異はない。

① 長期投資家の資産比率が上昇する場合、長期債の発行比率を高めることにより最適な国債満期構成が達成される。これは、

$$\frac{\partial w^g}{\partial \phi} = \frac{\lambda_p}{2\lambda_p + \lambda_g} > 0$$

であることによる。また、このときの長期債期待利回りは低下する。

② 政府の危険回避度が上昇した場合、長期債の発行比率を高めることにより最適な国債満期構成が達成される。これは、

$$\frac{\partial w^g}{\partial \lambda_g} = \frac{1}{2\lambda_p + \lambda_g} - \frac{(1+\phi)\lambda_p + \lambda_g}{(2\lambda_p + \lambda_g)^2} = \frac{(1-\phi)\lambda_p}{(2\lambda_p + \lambda_g)^2} > 0$$

であることによる。このとき、長期債の期待利回りは上昇する。

③ 投資家の危険回避度が上昇した場合、長期債の発行比率を低下させることにより最適な国債満期構成が達成される。これは、

$$\frac{\partial w^g}{\partial \lambda_p} = \frac{1+\phi}{2\lambda_p + \lambda_g} - \frac{2[(1+\phi)\lambda_p + \lambda_g]}{(2\lambda_p + \lambda_g)^2} = \frac{-(1-\phi)\lambda_g}{(2\lambda_p + \lambda_g)^2} < 0$$

であることによる。また、

$$\frac{\partial \frac{E[R_1]-r_1}{Var[R_1]}}{\partial \lambda_p} = \frac{2(1-\phi)\cdot(\lambda_p^2 + \lambda_p\lambda_g + \lambda_g^2)}{(2\lambda_p + \lambda_g)^2} > 0$$

であることから、投資家の危険回避度の上昇により、長期債の期待利回りは上昇する。

参考文献

財務省 [2003]、「平成 16 年度国債発行のポイント」、財務省ホームページ.

須藤時仁 [2003]、『イギリス国債市場と国債管理』、日本経済評論社.

米澤康博・大森孝造 [2002]、「金利変動リスクと債券ポートフォリオ」、笹井均・浅野幸弘編『資産運用の最先端理論』日本経済新聞社、pp.157-175.

Barro, R. J. [1979], “On the Determination of Public Debt,” *Journal of Political Economy*, Vol. 87, pp. 940-971.

——— [1995], “Optimal Debt Management,” *NBER Working Paper*, No.5327.

Bohn, H. [1990], “Tax Smoothing with Financial Instruments,” *American Economic Review*, Vol. 80, pp. 1217-1230.

Calvo, G. A. [1988], “Servicing the Public Debt: the Role of Expectations,” *American Economic Review*, Vol. 78 (4), pp. 647-661.

——— and P. E. Guidotti [1990], “Indexation and Maturity of Government Bonds: An Exploratory Model,” in R. Dornbusch and M. Draghi (eds.), *Public Debt Management: Theory and History*, Cambridge: Cambridge University Press.

Gale, D. [1990], “The Efficient Design of Public Debt,” in R. Dornbusch and M. Draghi (eds.), *Public Debt Management: Theory and History*, Cambridge: Cambridge University Press, pp. 14-47.

Leong, D. [1999], “Debt Management-Theory and Practice,” *Treasury Occasional Paper*, No. 10.

Lucas, R. E. and Stokey, N.L. [1983], “Optimal Fiscal and Monetary Policy in an Economy without Capital,” *Journal of Monetary Economics*, Vol. 12, pp. 55-94.

Bohn, H. [1990], “Tax Smoothing with Financial Instruments,” *American Economic Review*, Vol. 80, pp. 1217-1230.

Missale, A. [1997], “Managing the Public Debt: the Optimal Taxation Approach,” *Journal of Economic Surveys*, Vol. 11, pp. 235-265.

――― [1999], *Public Debt Management*, Oxford: Oxford University Press.

Stiglitz, J. E. [1983], “On the Relevance or Irrelevance of Public Financial Policy: Indexation, Price Rigidities, and Optimal Monetary Policies,” in R. Dornbush, and M. H. Simonsen, (eds.), *Inflation Debt and Indexation*, Cambridge, Massachusetts: MIT Press, pp. 183-222.