日本銀行ワーキングペーパーシリーズ

名目金利の非負制約下の最適金融政策ルール

― 理論的考察 ―

須合　智広*
sugo@troi.cc.rochester.edu

寺西　勇生**
yuuki.teranishi@boj.or.jp

No.04-J-8
2004 年 4 月

日本銀行
〒103-8660　日本橋郵便局私書箱 30 号

* 調査統計局（現ロチェスター大学）　** 調査統計局

名目金利の非負制約下の最適金融政策ルール*

——　理論的考察　——

日本銀行 調査統計局
須合　智広・寺西　勇生
（初稿2003年8月、最終稿2004年4月）

【要旨】

本稿では、名目金利の非負制約（ゼロ金利の状態）を考慮に入れた場合の最適金融政策ルール（最適な利子率ルール）を理論的に求めた。その結果、確定的なショックのもとでは、名目金利の非負制約が発生し得る、発生し得ないに関わらず、常に最適金融政策を実現する利子率ルールが存在することが確認された。こうしたルールは、インフレ率、GDPギャップと言った内生変数の過去の状態に依存することを通じて歴史依存性を確保するが、非負制約に直面する可能性がある名目金利の過去の値は参照しないという性質をもつことが分かった。

* 本稿の作成においては、小田信之、鎌田康一郎、亀田制作、白塚重典、早川英男、藤原一平、門間一夫（日本銀行）、福田慎一（東京大学）、Marc Giannoni（Columbia University）、Pierpaolo Benigno（New York University）、Michael Woodford（Princeton University）の各氏、及び日本銀行調査統計局での勉強会参加者から有益なコメントを頂いた。また、青木浩介（Universitat Pompeu Fabra）、関根敏隆（日本銀行）の各氏からは、貴重なコメントと共に、多大なご指導を頂いた。日本銀行調査統計局渡邊真一郎氏からは技術的支援を受けた。ここに感謝の意を表したい。ただし、本稿における意見等は、すべて筆者の個人的な見解であり、日本銀行および調査統計局の公式見解を示すものではない。

１． はじめに

本稿の目的は、名目金利がゼロになり、その非負制約が問題になるような状況も考慮に入れると、最適な利子率ルールとはどのようなものとなるかを、理論的に考察することにある。直感的には、非負制約がないときの最適金融政策ルールと、非負制約があるときの最適金融政策ルールは異なるものになると考えられる。これに対して、本稿では、「中央銀行は、インフレ率、GDPギャップといった内生変数の過去の状態をみながら名目金利を定める一方で、非負制約に直面する可能性がある名目金利の過去の値は参照しない」という形で表わされる利子率ルールは、非負制約があろうがなかろうが、確定的なショックという仮定のもとでは、最適であり続けることを理論的に証明する。

最適金融政策ルールを論じる際に、名目金利の非負制約を考慮に入れる必要性は、日本のみならず、他の先進国でも高まっているように思われる。最近の先進国経済では、インフレ率が低下する中、名目短期金利は低水準で推移しており、大きな負のショックが発生することで、名目金利の非負制約（ゼロ金利の状態）が発生しやすい状況となっている。実際に日本経済では、1999年以降、名目短期金利が実質的にゼロとなり、従来の名目短期金利のコントロールによる金融政策手段が失われた状態が続いている[1]。この他、米国、ユーロ圏等の先進国経済を見渡してみても、低インフレ、低金利下での金融政策運営を迫られており、名目金利の非負制約が政策運営に与える影響について、関心が高まっているようにみえる。

本稿では、こうした状況を鑑み、名目金利の非負制約を引き起こす確定的なショックのもとでの最適金融政策ルール、その中でも特に最適な利子率ルール[2]に焦点をあて、その性質を考察する。本稿での考察は、確定的なショックについての分析に留まるが、こうした仮定を置いた上でも、名目金利の非負制約が発生し得る状況での最適な利子率ルールを理論的に求め、望ましい金融政策運営スタイルを考察する意義は大きいと

[1] 日本銀行は、1999年2月から2000年8月までゼロ金利政策、2001年3月から現在までの量的緩和政策を実施している。そうしたもとで、名目短期金利は実質的にゼロ近傍で推移している。

[2] 実際には、特定の利子率ルールを公表して政策運営を行っている中央銀行は存在しないが、理論的な考察においては、一定の利子率ルールを定めてその性質を考察することには意味があると考えられる。

考えた[3]。

本稿と先行研究との関連は次節でみることにして、ここでは以下の議論を展開するにあたって、幾つかのテクニカルな用語を整理する。「最適金融政策」とは経済に発生するショックに対して経済厚生を最大化（＝損失を最小化）する政策を表わす。ここでいう経済厚生とは、理論的には代表的な家計の効用最大化のことを指すが、Woodford (2003)で示されているように、家計の効用最大化問題を、中央銀行の損失関数の最小化問題で置き換えられることが知られている。「最適金融政策」とは、こうして求められた中央銀行の損失を最小化する政策を指す。

一般に、金融政策の運営方法は、「公約型政策運営」と「裁量型政策運営」という２つに大別することができる[4]。公約型政策運営とは、足下の政策だけではなく、同時に将来にわたる政策にコミット（公約）する政策運営方法として定義される。この場合には、最適金融政策は、ある政策にコミットすることが経済主体の期待に与える影響を織り込んだ上で、決定される。一方、裁量型政策運営とは、将来の政策についての公約を行わずに当期ごとに政策を決定していく政策運営にあたる。この場合には、最適金融政策は、経済主体の期待を所与として決定される。つまり、公約型政策運営と裁量型政策運営の違いは、自らの政策が引き起こす経済主体の期待の変化を考慮して政策を行うのか、行わないのかという点になる。

本稿では、以下、将来にわたり特定の政策ルールにコミットするという形をとる、公約型政策運営について考察を行う。これは、Woodford(1999b)が示すとおり、本稿で用いているモデルを前提とすれば、歴史依存性を持つ公約型政策運営が、裁量型政策運営に比べて高い厚生を実現できるためである。以下にみるように、本稿で用いるモデルは、先行きの期待に依存するという意味で、フォワード・ルッキングな形になっている。このように期待が重要な役割を担うモデルにおいては、期待を活用しようとする公約型政策の方が、望ましい結果をもたらすことになる。また、この場合、公約型政策は、過去の経済状態（インフレ率、GDPギャップ）に依存して決定されるという意味で、歴史依存性をもつことが知られている。

公約型政策運営で用いられるルールは、「利子率ルール」と「ターゲティング・ルール」の２つに大きく分けられる。利子率ルールとは、当期の名目金利が直接インフレ率やGDPギャップによって説明される形のルールを指す。一方、ターゲティング・

[3] 確率的なショックの下での最適金融政策を考察する研究も多く見られるが、これらの研究では、ショックに対する応答（反応）関数を示すことに留まっており、利子率ルールを示すまでには至っていない（例えば、Nakov (2003)が挙げられる）。
[4] 詳細はWoodford（1999b）を参照。

ルールは、直接名目金利とインフレ率やGDPギャップの関係を表すのではなく、インフレ率やGDPギャップのみの間の関係を表すルールとなる（金利の設定はこうしたインフレ率やGDPギャップの関係を満たすように設定されることになる）。なお、「最適金融政策ルール」とは、中央銀行が、そのルールに従うことで最適な金融政策を実現できるルールとして定義される。

最適金融政策ルールを論じるときに、「timeless perspective」という概念も重要になる。Timeless perspectiveとは、ある政策ルールにコミットした後、中央銀行は常に損失関数を最小化する必要はなく、経済の初期状態に関する制約条件（これには、その時点で既に形作られた期待といった、もはや政策によって変更できないものも含む）のもとで最適な均衡が実現されていれば十分とする考え方である。この考え方にたてば、中央銀行が公約型政策運営をする際に生じる動学的非整合性（time inconsistency）の問題を回避することができる。

以下、本稿では、名目金利の非負制約が効いてくるような状況も考慮に入れた場合に、「timeless perspective」の前提のもとで、「最適金融政策」としての「利子率ルール」を求める。

本稿の構成は以下の通りである。まず、第２節では最適金融政策ルール、名目金利の非負制約を考慮に入れた金融政策を扱った先行研究を簡単にサーベイし、本稿の位置付けを明らかにする。第３節では理論モデルの設定を行う。第４節では、名目金利の非負制約を引き起こす確定的なショックのもとでの最適な利子率ルール（最適金融政策ルール）を提示する。加えて、求められたルールの性質を考察することで、名目金利の非負制約が発生し得る状況での、望ましい金融政策運営の形（スタイル）を示す。第５節はまとめとなる。

２．　先行研究

本稿は名目金利の非負制約を考慮に入れた場合の（名目金利の非負制約が発生し得る状況での）最適な利子率ルールについての考察を行うもので、既存の研究との関係で述べれば、「最適金融政策ルール」についての研究の中でも、特に「名目金利の非負制約」を取り扱ったものとして位置付けられる。同分野の研究は最近急速な発展を

見せており、その全てをサーベイすることはできないが、本稿との関連の深いごく主要な研究結果をまとめると、以下の通りである。

２．１　最適金融政策ルール

まず、最適金融政策ルールについての代表的な研究としては、Taylor (1993)、Giannoni and Woodford (2002a、b)、Svensson and Woodford (2003)、Aoki and Nikolov (2003)が挙げられる。

金融政策ルール、特に利子率ルールに関する研究は、Taylor（1993）が米国のFRB（連邦準備銀行）による金融政策が、簡単な利子率ルール（次式で表現される、いわゆるテーラー・ルール）に従っていることを提示したことが始まりとなる。

（式１）　$i_t = \phi_c + \phi_x x_t + \phi_\pi \pi_t$

ここで、i_tは名目短期金利、x_tはGDPギャップ、π_tはインフレ率、ϕはパラメータ。それ以降、経済理論的、実務的観点から、金融政策運営を行う際にどのようなルールが有効なルールとなるのかが注目されるようになり、その研究が近年大きな進展を見せている。

Giannoni and Woodford (2002a、b)は、利子率ルールについての理論的研究を大きく進展させ、timeless perspectiveの観点から、名目金利の非負制約を考慮に入れない場合に、中央銀行がコミットすべき最適な利子率ルールをいくつか提示した。その中で、Taylor（1993）が経験的に提示した単純なルールが、金利の慣性項等を取り入れると、経済理論の観点から最適な金融政策ルールに近い形を有していることを導いている。また同時に、フォワード・ルッキングなモデルにおいて、こうした最適金融政策ルールは、足下の経済状況だけでなく過去の経済状況とも関連付けて決定されるという意味で、歴史依存的な性質（歴史依存性）を有することが示されている。なお、テーラー・ルールに金利の慣性項等を取り入れたルールは、「テーラー・ルール型のルール」と総称されている。Clarida, Gali and Gertler（1998）は、先進国中央銀行が実質的にテーラー・ルール型のルールに従って金融政策を行っていることを実証的に示している。

Svensson and Woodford (2003)は、もう１つのルールの形であるターゲティング・ルールについての研究を行うと同時に、利子率ルールとターゲティング・ルールの２つのルール型が、お互いにどのように位置付けられるかをまとめている。包括的な金融政策ルールの議論を通じて、理論的観点だけではなく、実務的な視点を取り込んだ場合に、インフレ予測ルール（Inflation-forecast targeting rule）が、①経済の安定化、②決定性（均衡解の一意性）、③政策目標との結びつきの透明性等の観点から、有効なルールとなることを提案している。

この他、金融政策ルールについての最新の研究トピックとしては、より現実的な経済環境を想定して最適金融政策ルールを扱った研究の進展がめざましい。例えば、Aoki and Nikolov (2003)は、現実的なモデルの設定として、経済主体、中央銀行が学習を行いながらその行動を決定するとの仮定を置いた場合（経済構造についての情報が完全ではない場合、つまり、経済に予期せぬショックが発生する場合）、どのようなルールが有効なルールとなるかを検証している。結論として、経済構造についての情報が完全ではない場合（予期せぬショックが発生して、過去の金融政策が間違え得る場合）には、歴史依存性を有する最適な金融政策の中でも、長期の過去にわたっての名目金利の和と物価水準を説明変数とするルールが、有効な金融政策ルールとなることを示している。これは、ルールの説明変数に、物価水準のように長期にわたる過去の情報を持つ変数を含むことで、中央銀行が長い将来に渡り過去の誤りを修正する性質を持つことによる。

２．２　名目金利の非負制約

こうした最適金融政策ルールの研究の中で、特に「名目金利の非負制約」を明示的に取り扱った先行研究としては、例えば、Reifschneider and Williams (2000)、Jung, Teranishi and Watanabe (2003)、Eggertsson and Woodford (2003)が挙げられる。

Reifschneider and Williams (2000)は、米国連邦準備銀行（FRB）の大型推計モデルFRB/USを用いてシミュレーションを行い、名目金利の非負制約が発生している状況での望ましい利子率ルールの形を実験的に求めている。結論として、名目金利の非負制約が発生し得る状況では、従来のテーラー・ルール型のルールによる政策運営では十分な政策対応が行なわれないとして、①平時にはテーラー・ルール型のルールに従い、②ルールがマイナスの金利を示した場合には金利をゼロまで下げると同時に、ルールが指示するマイナス金利とゼロ金利との乖離を記録しておき、③将来、名目金

利が上昇する局面に入った時に、この乖離の累積分だけ金融緩和を継続するルールが望ましいとしている。

Jung, Teranishi and Watanabe (2003)の研究は、Reifschneider and Williams (2000)で経験的に得られた結果が理論的にも正しいことをターゲティング・ルールの観点から裏付けるものとなっている。Jung, Teranishi and Watanabe (2003)は、本稿と同じフォワード・ルッキングな理論モデルを用いて、確定的なショックの仮定のもとで、経済が一度ゼロ金利に陥ってしまった場合には、経済が十分に回復するまでゼロ金利を継続する政策が最適な金融政策運営となることを理論的に示している。積極的なゼロ金利政策の継続をコミットすることによって、経済が流動性の罠から抜け出しやすく、ショックの影響をより和らげることができると結論づけている[5]。

Eggertsson and Woodford (2003)でも、Jung, Teranishi and Watanabe (2003)と同様にして、名目金利の非負制約が発生し得る状況では、経済が十分に回復するまでゼロ金利を継続する、歴史依存性が強い政策が最適な金融政策運営となることをターゲティング・ルールの観点から理論的に示している。加えて、名目金利の非負制約下で有効となる歴史依存性が強い政策運営を実行する方法として、物価水準ターゲティング型のルールに従った政策運営方法を提案している。

本稿の位置付けを改めて確認すると、まず、名目金利の非負制約を考慮に入れない場合の最適な利子率ルールを論じたGiannoni and Woodford (2002a、b)を、名目金利の非負制約を明示的に考慮に入れて、理論的に発展させたものとみなせる。また、名目金利の非負制約下での利子率ルールを実証的に探ったReifschneider and Williams (2000)に、理論的な裏づけを与えるものともみなせる。さらに、ターゲティング・ルールに的を絞ったJung, Teranishi and Watanabe (2003)やEggertsson and Woodford (2003)の研究との対比では、同じ名目金利の非負制約が発生し得る状況での、最適な利子率ルールを具体的に提示したことに特徴がある。

[5] これは、いわゆる金融緩和の前借効果と呼ばれるもの。金融緩和の前借効果とは、将来の金融緩和を公約することで、足下の実質金利を低下させて景気を下支えする効果のこと。

３．　理論モデル

ここでは、以降の議論のために、フォワード・ルッキングなフィリップス曲線（AS曲線）、IS曲線、確定的なショックと中央銀行の政策運営からなるシンプルなモデルを提示する。

３．１　ＩＳ－Ｐモデル

本稿では、近年の金融政策に関する研究で広く用いられているモデル（Clarida, Gali and Gertler (1999)、Woodford (2003)）を用いて、以降の議論を行う。このモデルは、以下のように、フォワード・ルッキングなフィリップス曲線（AS曲線）、IS曲線と中央銀行の政策運営からなる。

（式２）　$x_t = E_t x_{t+1} - \sigma\left[(i_t - E_t \pi_{t+1}) - r_t^n\right]$

（式３）　$\pi_t = \kappa x_t + \beta E_t \pi_{t+1}$

（式４）　$W = E_0 \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t L_t \right\} = E_0 \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\pi_t^2 + \lambda_x x_t^2 + \lambda_i (i_t - i^*)^2 \right) \right\}$

ここで、r_t^n は実質自然利子率、σ、κ、β はいずれも正のパラメータ、i^* は均衡で中央銀行が目標とする名目金利の水準である。まず（式２）のIS曲線は、当期のGDPギャップが、将来のGDPギャップの期待値と実質金利の自然利子率からの乖離で決定される形となっている。σ はGDPギャップの実質金利、自然利子率に発生するショックに対しての感応度を示す。IS曲線の性質を分かりやすく見るために、式をフォワードに展開すると、

（式５）　$x_t = -\sigma \sum_{i=0}^{\infty} E_t \left[(i_{t+i} - \pi_{t+i+1}) - r_{t+i}^n \right]$

が得られる。（式５）から、このIS曲線では当期のGDPギャップが実質長期金利に依存して決定されることが分かる。

次に、（式３）はいわゆるフィリップス曲線（Phillips Curve）にあたり、Calvo（1983）の硬直的価格モデルから理論的に導出される。当期のインフレ率が当期のGDPギャップと将来のインフレ率の期待値によって決定される形となっている。κはインフレ率のGDPギャップに対しての感応度を示し、βは主観的割引率となる。先と同様に、（式３）の性質を分かりやすくするために、式をフォワードに展開すると、

（式６）　$\pi_t = \kappa \sum_{i=0}^{\infty} E_t \beta^i x_{t+i}$

となる。（式６）は、当期のインフレ率が将来に渡るGDPギャップの期待値に依存して決まることを表している。

最後に、中央銀行の行動指針として、中央銀行は（式４）で与えられる将来に渡る損失の割り引き現在価値を最小化[6]するべく政策運営を行うこととする。Woodford（2003）では、Transaction Friction[7]が存在する場合には、家計の損失関数から理論的に（式４）の損失関数が導出されることが示されている。

３．２　ショック

本稿では、実質自然利子率に発生する需給ギャップに対してのショックのみを考えることとする。Jung, Teranishi and Watanabe (2003)は、実質自然利子率のショックには、潜在成長率の変化のような長期的要因と、政府の財政出動のような短期的要因の両方が含まれることを提示している。この考えに従えば、自然利子率に発生する

[6] 言い換えると、厚生の最大化（損失の最小化）を図る。
[7] こうした、Transaction Frictionの考え方は、Friedman（1969）が初めに提唱したもので、取引を行なう際のコストをさす。取引コストを減少させるために、マネーが用いられることになる。

ショックを、経済全体の各所に発生しているショックを近似的にひとまとまりにしたものとして捉えることができる。本稿でも、この考え方に従い以降の議論を行う。なお、実質自然利子率に発生するショックは、ある期に大きく負の値ε_0をとった後、時間の経過とともにゼロとなり、実質自然利子率が再び均衡値r_∞^nに回帰する、AR型の確定的なショックを仮定する。このモデルでは、確定的なショックを仮定しているため、中央銀行、民間部門は共に、ショックが発生して以降の実質自然利子率のパスを知っていることになる。

（式７）　$r_{t+1}^n - r_\infty^n = \rho(r_t^n - r_\infty^n) + \varepsilon_{t+1}$　、$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = 0$

（式７）　$\Rightarrow$　（式８）　$r_t^n = \rho^t \varepsilon_0 + r_\infty^n$

なお、ρ（$0 \le \rho < 1$）はショックの減衰の速さを決定するパラメータで、ρが1より小さいときにはショックは一時的であり、１のときに恒久ショックとなる。つまり、ここでは一時的（有限な）ショックを仮定する。

また、均衡では、実質自然利子率r_∞^nと中央銀行が目標とする名目短期金利i^*が一致するとの仮定を置く。この場合には、GDPギャップ、インフレ率の均衡値はゼロ、名目短期金利の均衡値はi^*となる。加えて、以降の分析では、ショックが発生する以前は経済が均衡状態にあると仮定する。

４．　最適金融政策ルール

ここでは、先ず３節で提示された理論モデルを用いて、timeless perspectiveの前提のもとで、名目金利の非負制約を考慮に入れない場合の最適な利子率ルールを幾つか提示する。次に名目金利の非負制約を考慮に入れた場合の最適な利子率ルールを提示し、同時に、非負制約を考慮に入れない場合に最適であった利子率ルールが、非負制約のもとでどのような性質を持つのかを検証する。

４．１　名目金利の非負制約を考慮に入れない場合の最適金融政策ルール

名目金利の非負制約を考慮に入れない場合（名目金利の非負制約がバインディングとならない、つまり、名目金利が常に正である場合）の最適金融政策ルールは、Giannoni and Woodford (2002b)で詳しく研究されている。Giannoni and Woodford (2002b)は、3節のモデル（（式２）、（式３）、（式４）、（式８））を前提とした場合には、公約型政策運営を仮定すれば、最適な金融政策が単純な利子率ルールによって達成できることを示している。

以下では、Giannoni and Woodford (2002b)の議論に従い、最適な利子率ルールを求める手順を具体的に示す。（式２）、（式３）、（式４）、（式８）で与えられるモデルでは、最適金融政策の条件は次の最適化問題の解として捉えることができる。

（式９）$$L = \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left\{ L_t - 2\phi_{1t}(x_{t+1} - \sigma(i_t - \pi_{t+1} - r_t^n) - x_t) - 2\phi_{2t}(\kappa x_t + \beta\pi_{t+1} - \pi_t) \right\} \right]$$

公約型政策運営を仮定した場合には、（式９）をπ_t、x_t、i_tで微分することで、次の最適１階条件が得られる。

（式１０）　$$\pi_t - \beta^{-1}\sigma\phi_{1t-1} + \phi_{2t} - \phi_{2t-1} = 0$$

（式１１）　$$\lambda_x x_t + \phi_{1t} - \beta^{-1}\phi_{1t-1} - \kappa\phi_{2t} = 0$$

（式１２）　$$\lambda_i(i_t - i^*) + \sigma\phi_{1t} = 0$$

この最適１階条件に、IS曲線（（式２））とフィリップス曲線（（式３））を加えたものが最適金融政策の満たすべき条件となる。ここで、（式１０）－（式１２）を用いて、名目短期金利について解くと、次の最適な利子率ルールが得られることになる。

（式１３）　$i_t = (1+\frac{\sigma\kappa}{\beta})i_{t-1} + \beta^{-1}\Delta i_{t-1} + \frac{\sigma\kappa}{\lambda_i}\pi_t + \frac{\sigma\lambda_x}{\lambda_i}\Delta x_t - \frac{\sigma\kappa}{\beta}i^*$

この（式１３）で与えられるルールは、名目金利の非負制約を考慮に入れない場合には、常に最適金融政策を実現する利子率ルールとなる。ただし、ここで示された最適な利子率ルールは、1つの例に過ぎず、Giannoni and Woodford (2002b)が指摘するように、同じ仮定のもとでは、最適な利子率ルールは異なる形で表わすことができる。例えば、（式１３）と同様にして、（式１０）－（式１２）から次の最適な利子率ルールが得られる（ラグ・オペレータの多項式である$R(L)$、$Q(L)$の具体的な形も含めて、詳細は巻末の参考を参照）。

（式１４）　$i_t = \eta_1 i_{t-1} + R(L)\left(\frac{\sigma\kappa}{\lambda_i}\pi_t + \frac{\sigma\lambda_x}{\lambda_i}\Delta x_t\right) + (1-\eta_1)\cdot i^*$

（式１５）　$i_t = Q(L)\left(\frac{\sigma\kappa}{\lambda_i}\pi_t + \frac{\sigma\lambda_x}{\lambda_i}\Delta x_t\right) + i^*$

これら３つの利子率ルールは、名目金利の非負制約がバインディングにならない限りは、同じ解を持つため、等しく最適金融政策を実現できる。（式１３）で与えられるルールは、当期の名目金利の説明変数が、自身の２期のラグと当期のインフレ率、当期のGDPギャップの変化幅となっている。一方で、（式１５）で与えられるルールでは、当期から長期の過去にかけてのインフレ率とGDPギャップの変化幅が説明変数となっている（名目金利のラグは説明変数となっていない）。

これらの最適な利子率ルールの共通の特徴は、Woodford（1999b）の示す通り、当期の名目金利が過去の変数に依存するという意味で歴史依存性を有する点にある。また、３つのルールは、名目金利の非負制約がバインディングにならない限りは同じ解をもつ（ショックに対して同じ反応をする）ことから、異なる変数に依存する形になっていても、同じ歴史依存性の強さを持つと言うことができる。

４．２　名目金利の非負制約を考慮に入れた場合の最適金融政策ルール

　４．１節で求められたルールに、単純に名目金利の非負制約を取り入れたものが、名目金利の非負制約を考慮に入れた場合にも、引き続き最適金融政策を実現できるルールとなるのだろうか。

（式１３）⇒（式１６）

$$i_t = \max\left(0,\ (1+\frac{\sigma\kappa}{\beta})i_{t-1} + \beta^{-1}\Delta i_{t-1} + \frac{\sigma\kappa}{\lambda_i}\pi_t + \frac{\sigma\lambda_x}{\lambda_i}\Delta x_t - \frac{\sigma\kappa}{\beta}i^*\right)$$

（式１４）⇒（式１７）　$$i_t = \max\left(0,\ \eta_1 i_{t-1} + R(L)\left(\frac{\sigma\kappa}{\lambda_i}\pi_t + \frac{\sigma\lambda_x}{\lambda_i}\Delta x_t\right) + (1-\eta_1)\cdot i^*\right)$$

（式１５）⇒（式１８）　$$i_t = \max\left(0,\ Q(L)\left(\frac{\sigma\kappa}{\lambda_i}\pi_t + \frac{\sigma\lambda_x}{\lambda_i}\Delta x_t\right) + i^*\right)$$

（式１６）－（式１８）は、ルールがマイナスの金利を指し示している間は金利をゼロとし、プラスの値を指し示した時に再び元のルールに回帰することを意味している。以下では、名目金利の非負制約のもとでの最適な利子率ルールと、（式１６）－（式１８）のルールによる政策運営を比較することで、これらのルールが引き続き最適な利子率ルールと成り得るかを検証する。同時に、非負制約を考慮に入れない場合に有効なルールが、非負制約のもとでそれぞれどのような性質を持つのかを明らかにする。

　まず、（式１９）のように名目金利の非負制約条件をモデルに加える。

（式１９）　$i_t \geq 0$

この時、（式２）、（式３）、（式４）、（式８）、（式１９）からなるモデルにおいて、名目金利の非負制約を考慮に入れた場合の最適金融政策ルールは、次のKuhn-Tucker解法を用いた最適化問題の解として捉えることができる。

（式２０）

$$L=\left[\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\left\{\ L_t-2\phi_{1t}(x_{t+1}-\sigma(i_t-\pi_{t+1}-r_t^n)-x_t)-2\phi_{2t}(\kappa x_t+\beta\pi_{t+1}-\pi_t)-2\phi_{3t}i_t\right\}\right]$$

公約型政策運営を仮定した場合には、（式２０）をKuhn-Tucker条件を考慮して、π_t、x_t、i_t について微分することで、最適金融政策の条件となる最適１階条件が得られる。

（式２１）　$\pi_t-\beta^{-1}\sigma\phi_{1t-1}+\phi_{2t}-\phi_{2t-1}=0$

（式２２）　$\lambda_x x_t+\phi_{1t}-\beta^{-1}\phi_{1t-1}-\kappa\phi_{2t}=0$

（式２３）　$\lambda_i(i_t-i^*)+\sigma\phi_{1t}-\phi_{3t}=0$

（式２４）　$i_t\cdot\phi_{3t}=0$

（式２５）　$\phi_{3t}\geq 0$

（式２６）　$i_t\geq 0$

この最適１階条件に、（式２）のIS曲線と（式３）のフィリップス曲線を加えたものが名目金利の非負制約を考慮に入れた場合の、最適金融政策の満たすべき条件となる。

Kuhn-Tucker条件を含んだ（式２１）－（式２６）は、ラグランジェアン ϕ_3 が正の値をとる間は名目金利がゼロとなり、ϕ_3 がゼロの時（負の値をとり始める時）に名目金利が非負となることを表現している。大まかに述べれば、ϕ_3 をゼロと置き、名目金利について解くことで得られる最適な利子率ルールが、正の値を示す間はそのルールに従い、マイナスの値を示した時には名目金利はゼロと置かれることになる（代わりに、ϕ_3 が正の値となる）[8]。

実際に（式２１）－（式２６）より、名目金利の非負制約を考慮に入れた場合の最適な利子率ルールを求めてみる。まず（式２１）、（式２２）から、ϕ_1 について解法すると、

[8] 厳密には、timeless perspectiveの解法のもとでは、どの時点で名目金利がゼロとなり、どの時点で正となるかは同時決定される必要があることから、ϕ_3 を先にゼロとして求められる解が最終的に求められる解とは限らない。

（式２７）　$\phi_{1t}-\left(1+\beta^{-1}(\kappa\sigma+1)\right)\phi_{1t-1}+\beta^{-1}\phi_{1t-2}=-\kappa\pi_t-\lambda_x(x_t-x_{t-1})$

（式２７）　$\Leftrightarrow$（式２８）　$\phi_{1t}=-\frac{\lambda_i}{\sigma}Q(L)(\frac{\sigma\kappa}{\lambda_i}\pi_t+\frac{\sigma\lambda_x}{\lambda_i}\Delta x_t)$

また、（式２３）から、

（式２９）　$\phi_{1t}=\frac{\phi_{3t}}{\sigma}-\frac{\lambda_i}{\sigma}(i_t-i^*)$

となる。ここで、（式２８）と（式２９）より、

（式３０）[9]　$\phi_{3t}-\lambda_i i_t=-\lambda_i\left(Q(L)(\frac{\sigma\kappa}{\lambda_i}\pi_t+\frac{\sigma\lambda_x}{\lambda_i}\Delta x_t)+i^*\right)$

となる。（式３０）において、$\phi_{3t}=0$とすれば、最終的に名目金利の非負制約を考慮に入れた場合の最適な利子率ルールが求まる。

（式３１）[10]　$i_t=Q(L)\left(\frac{\sigma\kappa}{\lambda_i}\pi_t+\frac{\sigma\lambda_x}{\lambda_i}\Delta x_t\right)+i^*$

ただし前述の通り、Kuhn-Tucker条件より、（式３１）で与えられるルールが正の値を示す間は、このルールに従って名目金利が設定され、負の値をとる場合には、名目金利はゼロと設定されることになる。つまり、式で表現すると、

[9] 厳密には、ϕ_{3t}とi_tは、いずれか、もしくは双方がゼロとなることから、ここでの表現は厳密ではない。しかし、ここでは、分かり易さの観点からこうした表現を用いている。
[10] ここでは、詳細に決定性（均衡解の一意性）の議論は行わない。ただし、例えば Giannoni and Woodford (2002b)のパラメータ設定では決定性が満たされる点は確認済み。

（式３２）　$$i_t = \max\left(0,\ Q(L)\left(\frac{\sigma\kappa}{\lambda_i}\pi_t + \frac{\sigma\lambda_x}{\lambda_i}\Delta x_t\right) + i^*\right)$$

となる。

ここで重要なのは、以下の３点となる。

- まず、名目金利の非負制約を考慮に入れない場合に最適な利子率ルールとして求められた、（式１５）（もしくは（式１８））で与えられる歴史依存性を持つルールが、名目金利の非負制約を考慮に入れた場合にも引き続き最適な利子率ルールとなる。つまり、名目金利の非負制約を考慮に入れない場合に、Giannoni and Woodford (2002b)が求めた最適な利子率ルールを変形することで得られる、（式１５）で与えられるルールと、（式３１）で与えられる名目金利の非負制約を考慮に入れた場合の最適な利子率ルールが一致する。これは、少なくとも確定的なショックのもとでは、名目金利の非負制約が発生し得る、発生し得ないに関わらず、常に最適金融政策を実現できる最適な利子率ルールが存在し、それが（式３１）で与えられることを示している。
- 一方で、名目金利の非負制約を考慮に入れない場合に、（式１５）と同じく最適な利子率ルールであった（式１３）、（式１４）で与えられるルールが、名目金利の非負制約を考慮に入れた場合には最適な利子率ルールとはならない。
- 上記の２点から、名目金利の非負制約が発生し得る状況では、歴史依存性をどのような変数を通じて確保するかが重要になる。つまり、名目金利の非負制約が発生し得る状況では、内生変数（インフレ率、GDPギャップ）を通じてのみ歴史依存性を有するルールが、最適な利子率ルールとなる。

このような性質は、名目金利がゼロになる場合には本来行われるべき金融緩和が名目金利の非負制約によって阻害されることから、ゼロ金利期間に十分な金融緩和が行われないという問題からもたらされる。直感的な説明としては、内生変数を通じてのみ歴史依存性を有するルールは、名目金利の非負制約によって十分な金融緩和が行えなかった期間の緩和分を、内生変数を通じて記録しておき、その分を将来の金融緩和によって補うことで最適性を保つことができる[11]。一方、名目金利のラグを通じて歴史

[11] 名目金利が非負制約に陥ることで十分に金融緩和ができなかった分を将来の金融緩和で取り戻すとの本稿の結果は、理論的な観点からReifschneider and Williams (2000)の提案を確認したことになる。また、Jung, Teranishi and Watanabe (2003)が主張する金融緩和の前借効果の有効性を、利子率ルールによる政策運営の観点からも、証明していると

依存性を有する場合には、非負制約によって本来記録されるべき金融緩和の不足分についての情報が失われてしまい、将来十分な金融緩和が行われないことになる[12]。このため、一般的に名目金利の非負制約下では、こうしたルールは最適金融政策ルールにはならないことになる[13]。

名目金利の非負制約が加わることによって、それまで同等の利子率ルールであったものが異なる振る舞いをすることを、（式１５）（もしくは（式３１））と（式１３）（もしくは（式１６））で与えられる利子率ルールで確認する（ただし、以降では議論を分かり易くするために、$i^* = 0$とする）。この場合には、過去の名目金利はゼロとなっていることから、（式１３）の利子率ルールは次のように変形される（$i_{t-1} = i_{t-2} = 0$）。

（式１３）⇒（式３３）　$$i_t = \frac{\sigma\kappa}{\lambda_i}\pi_t + \frac{\sigma\lambda_x}{\lambda_i}\Delta x_t$$

一方、（式１５）で与えられる利子率ルールは、

（式１５）⇒（式３４）　$$i_t = Q(L)\left(\frac{\sigma\kappa}{\lambda_i}\pi_t + \frac{\sigma\lambda_x}{\lambda_i}\Delta x_t\right)$$

となる。仮に、（式３３）が正の値になったとしても、（式３４）ではラグ・オペレータ$Q(L)$がかかるため、正の値になるかどうかは明らかではない。これは、（式３４）で与えられる利子率ルールが、内生変数を通じてのみ歴史依存性を確保するために、名目金利の非負制約下でもその歴史依存性の強さを変えない（つまり、最適な歴史依存性の強さを保持し続けることができる）一方で、（式３３）で与えられるルールは名目金利の非負制約（つまり、$i_{t-1} = i_{t-2} = 0$）によって最適な歴史依存性の強さを失ってしまうことによる。こうした名目金利の非負制約では最適な歴史依存性の強さを失ってしまうという性質は、名目金利のラグを説明変数とする利子率ルール全般にも言える。

[12] こうした点は、Woodford (1999a)でも指摘されている。
[13] 推測の域を出ないが、確定的なショックではなく、確率的なショックの場合にも、内生変数を通じてのみ歴史依存性を確保するルールのみが、名目金利の非負制約が発生し得る状況では最適金融政策ルールになると考えられる。

ついて当てはまるため、（式１４）（もしくは（式１７））でも同様のことがおこる。

ここでの議論から示される、名目金利の非負制約下における最適金融政策ルールの形をまとめておくと、①名目金利の非負制約下においても、歴史依存性を有する政策運営が必要である、②ただし、どのような形で政策に歴史依存性を持たせるかが重要となり、過去の内生変数の動きを通じてのみ政策に歴史依存性を持たせることが望ましい、ということになる。

５． まとめ

近年、各国中央銀行は低インフレ下での金融政策運営を迫られており、名目金利の非負制約が、政策運営上無視できない要素となってきている。本稿では、こうした経済状況のもとで、中央銀行が金融政策運営を行う場合に、どのような金融政策運営方法が有効かを、名目金利の非負制約を考慮に入れた場合の最適な利子率ルールの性質を考察することを通して検証した。

その結果、確定的なショックのもとでは、名目金利の非負制約が発生し得る、発生し得ないに関わらず、常に最適金融政策を実現する最適な利子率ルールが存在することが確認された。こうしたルールは、名目金利の慣性項を排除して、内生変数（インフレ率、GDPギャップ）を通じてのみ歴史依存性を確保するという性質を有する。これは、こうしたルールが、名目金利の過去の値を参照しないため、名目金利の非負制約がバインディングとなる状況でも、非負制約がないときと歴史依存性の強さが変わらないためである。

本稿の議論では、確定的なショック、完全予見を前提として、名目金利の非負制約下における最適な利子率ルールを求めた。今後は、中央銀行、一般経済主体が不完全な情報を有する場合に有効となる金融政策（ルール）や、様々な経済構造に対して共通に有効となる頑健性の高い金融政策（ルール）の形を求めて行くことが必要になると考えられる。また、確率的なショックのもとでの最適な利子率ルールを探索していくことも、重要な研究課題の１つとして挙げられる。

参考文献

Aoki, Kosuke and Kalin Nikolov (2003), "Rule-based monetary policy under central bank learning," *mimeo*.

Calvo, Guillermo (1983), "Staggered prices in a utility-maximizing framework," *Journal of Monetary Economic*, Vol. 12, pp383-398.

Clarida, Richard, Jordi Gali, and Mark Gertler (1998), "Monetary policy rules in practice : Some international evidence," *European Economic Review*, Vol. 42, pp.1033-1067.

Clarida, Richard, Jordi Gali, and Mark Gertler (1999), "The science of monetary policy : A new keynesian perspective," *Journal of Economic Literature*, Vol. 37, pp1661-1707.

Eggertsson, Gauti, and Michael Woodford (2003), "The zero bound on interest rates and optimal monetary policy," *Brookings Panel on Economic Activity*, March.

Friedman, Milton (1969), "The optimal quantity of money," in Milton Friedman, *The Optimum Quantity of Money and Other Essays*, Chicago: Adline.

Giannoni, Marc P., and Michael Woodford (2002a), "Optimal interest-rate rules : Ⅰ. General Theory," *mimeo*.

Giannoni, Marc P., and Michael Woodford (2002b), "Optimal interest-rate rules : Ⅱ. Applications," *mimeo*.

Jung, Taehun, Yuki Teranishi, and Tsutomu Watanabe (2003), "Optimal monetary policy at the zero-interest-rate bound," *Journal of Money, Credit and Banking*, forthcoming.

Nakov, Anton (2003), "Zero bound on interest rates, uncertainty and optimal monetary policy under discretion," *mimeo*.

Reifschneider, David, and John C. Williams (2000), "Three lessons for monetary policy in a low inflation era," *Journal of Money, Credit and Banking*, 32(4), pp936-966.

Svensson, Lars E.O., and Michael Woodford (2003), "Implementing optimal policy through inflation-forecast targeting," *NBER Working Paper* No. 9747.

Taylor, John B (1993), "Discretion versus policy rules in practice," *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, No. 39, pp.195-214.

Woodford, Michael (1999a), "Commentary : How should monetary policy be conducted in an era of price stability?" in *New Challenges for Monetary Policy*, Federal Reserve Bank of Kansas City.

Woodford, Michael (1999b), "Optimal monetary policy inertia," *NBER Working Paper* No. 7261.

Woodford, Michael (2001), "The Taylor rule and optimal monetary policy," *American Economic Review*, 91(2), pp232-237.

Woodford, Michael (2003), *Interest and Prices: Foundation of a Theory of Monetary Policy*, Princeton University Press.

（参考）

（式１０）、（式１１）より、

（式１．１）　$\phi_{1t} - \left(1+\beta^{-1}(\kappa\sigma+1)\right)\phi_{1t-1} + \beta^{-1}\phi_{1t-2} = -\kappa\pi_t - \lambda_x(x_t - x_{t-1})$

が求まる。さらに変形すると、

（式１．１）　⇔（式１．２）　$-\dfrac{\sigma}{\lambda_i}(1-\eta_1 L)(1-\eta_2 L)\cdot\phi_{1t} = \dfrac{\sigma\kappa}{\lambda_i}\pi_t + \dfrac{\sigma\lambda_x}{\lambda_i}\Delta x_t$

（式１．１）　⇔（式１．３）　$\phi_{1t} = \eta_1\phi_{1t-1} - \dfrac{\lambda_i}{\sigma}R(L)(\dfrac{\sigma\kappa}{\lambda_i}\pi_t + \dfrac{\sigma\lambda_x}{\lambda_i}\Delta x_t)$

（式１．１）　⇔（式１．４）　$\phi_{1t} = -\dfrac{\lambda_i}{\sigma}Q(L)(\dfrac{\sigma\kappa}{\lambda_i}\pi_t + \dfrac{\sigma\lambda_x}{\lambda_i}\Delta x_t)$

となる。ただし、$\eta_1+\eta_2 = \kappa\sigma\beta^{-1}+\beta^{-1}+1$、$\eta_1\cdot\eta_2 = \beta^{-1}$（$\eta_1>1$、$0<\eta_2<1$）となり、$R(L)$ はラグ・オペレータ L の関数で、$R(L) = 1+\eta_2 L+\eta_2^2 L^2+\eta_2^3 L^3+\cdots$ となる。また、$Q(L)$ は（式１．５）で与えられる。

（式１．５）　$Q(L) = 1+\dfrac{\eta_1^2-\eta_2^2}{\eta_1-\eta_2}L+\dfrac{\eta_1^3-\eta_2^3}{\eta_1-\eta_2}L^2+\cdots = 1+w_1L+w_2L^2+w_3L^3+\cdots$

ここで、$w_i = \dfrac{\eta_1^{i+1}-\eta_2^{i+1}}{\eta_1-\eta_2}>0$。最後に、（式１２）より、$\phi_{1t} = -\dfrac{\lambda_i}{\sigma}(i_t - i^*)$ となることから、これを（式１．３）、（式１．４）に代入すると、（式１４）、（式１５）の利子率ルールが得られる。