



日本銀行ワーキングペーパーシリーズ

## 分布展開法の市場リスク計測への応用

丸茂 幸平\*

kouhei.marumo@boj.or.jp

日本銀行

〒103-8660 日本橋郵便局私書箱 30 号

No.08-J-9  
2008 年 6 月

---

### \* 金融機構局

日本銀行ワーキングペーパーシリーズは、日本銀行員および外部研究者の研究成果をとりまとめたもので、内外の研究機関、研究者等の有識者から幅広くコメントを頂戴することを意図しています。ただし、論文の中で示された内容や意見は、日本銀行の公式見解を示すものではありません。

なお、ワーキングペーパーシリーズに対するご意見・ご質問や、掲載ファイルに関するお問い合わせは、執筆者までお寄せ下さい。

商用目的で転載・複製を行う場合は、予め日本銀行情報サービス局までご相談下さい。転載・複製を行う場合は、出所を明記して下さい。

# 分布展開法の市場リスク計測への応用

丸茂 幸平\*

[要旨]

ポートフォリオの損益分布の導出は、市場リスク計測の大きな鍵である。損益分布を導出するために現在採用されている主な手法には、リスク・ファクターの分布を多変量正規分布を使って表わすものと、リスク・ファクターの経験分布を使うもの(ヒストリカル・シミュレーション法)の2つがある。しかし、これらの手法は、いずれも、3つの問題、すなわち、(1) リスク・ファクターの分布の特徴をどのように表現するか、(2) リスク評価期間が長期の場合のリスク・ファクターの分布をどのように求めるか、(3) リスク・ファクターの分布の表現からポートフォリオの損益分布をどのように求めるか、のうちの少なくとも1つへの対処に困難が伴う。

本稿では、分布展開法の利用によって、これらの3つの問題全てに対して対処法を提示し得ることを示す。分布展開法とは、ある未知の分布を、別の既知の分布と多項式の積で近似する手法である。分布展開法の最大の利点は、この近似が、目標とする未知の分布の積率のみから構成されることである。

また、本稿では、従来多用されてきた1変量の分布展開法を拡張して、多変量の同時密度関数の近似を得る手法も導入する。

分布展開法による近似は頑健性に欠け、多くの場合実用的でないという短所もしばしば指摘される。本稿では、この分布展開法の脆弱性を補うための工夫も提示する。

また、これらの解説とともに、市場で観測された標本を用いた数値計算例も示す。

キーワード: エルミート多項式; 期待ショートフォール; コピュラ; 多変量分布; 直交多項式系; ラゲール多項式; リスク指標.

\*日本銀行金融機構局リスクアセスメント担当

兼 金融高度化センター企画担当

Email: kouhei.marumo@boj.or.jp

本稿は、筆者が豪州クイーンズランド工科大学(Queensland University of Technology, Australia) 在籍中に行った研究内容の概説である。研究の指導を行った Rodney Wolff 教授(Queensland University of Technology) と、研究上有益な提言を頂戴した Steven Li 准教授(南オーストラリア大学, University of South Australia)、Dominique Guégan 教授(パリ第1・ソルボンヌ大学, Université Paris I la Sorbonne) に感謝したい。研究内容の詳細は Marumo (2007) 及び Marumo and Wolff (2007) にまとめられているので、本文中で適宜これらの文献を参照する。なお、本稿および Marumo (2007)、Marumo and Wolff (2007) の内容や意見は筆者個人に属し、日本銀行あるいはクイーンズランド工科大学の公式見解を示すものではない。

# 目次

1	はじめに	1
2	市場リスクの計測とその技術的な側面	3
2.1	リスク指標と損益分布	3
2.2	ポートフォリオの損益分布算出手順	4
2.3	本稿で扱う問題	5
2.4	現行手法の検討	6
3	積率と分布展開法及びその応用	9
3.1	積率・交差積率と確率分布	9
3.2	分布展開法	13
3.3	分布展開法の市場リスク計測への応用	15
4	数値計算例	19
4.1	リスク・ファクターの経験分布の近似	19
4.2	長期間のリスク計測への応用	27
4.3	複数のリスクの合算	32
4.4	数値計算例のまとめと考察	38
5	多変量分布展開法とその応用	38
5.1	2変量の分布展開	38
5.2	条件付期待値と分布展開法	42
5.3	コピュラ関数と分布展開法	44
5.4	一般の多変量への拡張	50
5.5	多変量分布展開法のまとめ	51
6	おわりに	51
	参考文献	52

# 1 はじめに

市場リスク計測とポートフォリオの損益分布 多くの金融機関が自らのポートフォリオにかかる市場リスクの計測を行っている。ここでいう市場リスクとは、将来の市場環境の変化によってポートフォリオに生じうる潜在的な損失であると定義することができる。したがって、ポートフォリオの市場リスクは、将来の市場環境の変化と、ポートフォリオの構成という2つの要素から成っていることがわかる。ポートフォリオの市場リスク計測は、これら2つの要素から、市場リスクを表す指標を算出する作業であるといえよう。

このような市場リスクを表す指標には、様々なものがあり得る。なかでも、現在注目されることが多いバリュー・アット・リスク (Value at Risk, VaR) や期待ショートフォール (Expected Shortfall, ES) 等は、ポートフォリオの損益分布に基づいて定義される指標である。ポートフォリオの損益分布は、将来の市場環境の変化を確率モデルで表現し、その変化の下でのポートフォリオ価値の変動の大きさと蓋然性を表したものである。

市場リスク計測の手順 このようなポートフォリオの損益分布を使った市場リスク計測は、次のような手順に沿って行われる<sup>1</sup>。

まず、将来のどの時点のリスクを計測するかを設定する。現時点からこの将来時点までの時間をリスク評価期間と呼ぶ。

次に、資産収益率や金利変化等の市場環境を表す変数のうち、ポートフォリオの損益に影響を与えるものを特定し、これらの変数とポートフォリオ損益との関係を定式化する。ポートフォリオの損益に影響を与える市場変数をリスク・ファクターと呼ぶ。

さらに、将来の不確実性を考慮するために、何らかの確率モデルをリスク・ファクターに当てはめ、過去の市場情報等を使って、確率モデルに必要なパラメータ等を推定する。

最後に、確率モデルで表わされたリスク・ファクターがポートフォリオ損益に与える影響を考慮することによって、ポートフォリオの損益分布が導出される。例えば VaR は、このポートフォリオの損益分布の確率点として与えられる<sup>2</sup>。

本稿で扱う問題 市場リスク計測が業務として広く行われている一方で、そこには多くの技術的な問題が未解決のまま存在している。特に、どのようなモデルがリスク・ファクターを表現するのにふさわしいか、という問題は最も活発に議論が行われている分野の1つである<sup>3</sup>。また、こうしたモデルの利用には、パラメータの推定が伴うが、この推定方法の選択に関しても多くの議論があり得る。このほか、ポートフォリオの市場リスクを表すのには、どのようなリスク指標がふさわしいのか、という議論も盛んである<sup>4</sup>。

ただし、本稿では、これらの議論に深く立ち入らない。本稿では、リスク・ファクターのモデルや標本が与えられたところから、ポートフォリオの損益分布を算出するところまでを議論の対象とし、次の3つの問題を考える。

第1に、与えられたモデルや標本から、リスク・ファクターの分布に関する情報を、ポートフォリオの損益分布算出が容易になるような形に要約する必要があるが、これをどのよう

<sup>1</sup>この手順に関しては、2.2でも解説する。

<sup>2</sup>2.1参照。

<sup>3</sup>例えば Duffie and Pan (1997) には、代表的な市場モデルが整理されている。

<sup>4</sup>Artzner, Delbaen, Eber and Heath (1999) によるリスク指標の一貫性 (coherency) の議論が代表的である。

に行うか、という問題を考える。

第2に、リスク評価期間が短い場合のリスク・ファクターのモデルや標本が与えられたときに、そこからリスク評価期間が長い場合のリスク・ファクターの分布をどのように求めるか、という問題を考える。

第3に、一般に複数あるリスク・ファクターの同時分布に関する情報から、ポートフォリオの損益分布をどのように求めるか、という問題を考える。

現在利用されている主な手法 ポートフォリオの損益分布を算出するために現在利用されている主な手法は、多変量正規分布を使ってリスク・ファクターをモデル化するものか、市場で観測されたリスク・ファクターの経験分布を利用するもの(ヒストリカル・シミュレーション法、HS法)か、の2つである。これらの手法を検討すると、どちらの手法も、上述の3つ問題のうち少なくとも1つへの対処に困難が伴っていることがわかる。例えば、多変量正規分布を利用する方法は、リスク・ファクターの分布のいわゆる重い裾や非対称性等、しばしば現実に観測される重要な性質を考慮しておらず、リスク計測の精度に問題が生じ得る。また、HS法は、利用可能な標本数の制約から、特にリスク評価期間が長い場合には、実用に足る経験分布が構成できない場合が多い。

本稿の目的と分布展開法 本稿の目的は、分布展開法という近似手法を使って、既存の手法の利点を継承しつつ上述の3つの問題全てに対処が可能な手法を提案することである。

分布展開法とは、ある未知の確率密度関数を、別の確率密度関数と多項式の積で近似する手法である。この手法を利用することの最大の利点は、確率密度関数の近似値が、目標とする未知の分布の積率のみから構成されることである。

すなわち、リスク・ファクターの分布の情報をその積率によって要約しておけば、分布展開法を使うことによって、もとの分布の近似が得られることがわかる。リスク・ファクターが複数ある場合には、リスク・ファクター間の相互依存関係の情報はそれらの交差積率で要約される。これが、上述の1番目の問題への対処法である。

リスク・ファクターの時系列等から自己交差積率が得られれば、リスク評価期間が長期の場合にもリスク・ファクターの積率を算出することができる。これが2番目の問題への対処法になる。

さらに、リスク・ファクターとポートフォリオ損益の関係が(テーラー近似等によって)多項式で表わされれば、ポートフォリオ損益の積率は、リスク・ファクターの積率と交差積率を使って表わされる。これに分布展開法を適用して、ポートフォリオの損益分布を得る、というのが3番目の問題への対処法である。

多変量分布展開法 こうした議論の背景にある発想は、リスク・ファクターの同時分布に関する主な情報が、それらの積率や交差積率に要約され得るということである。この考えをさらに一歩進めて、分布展開法を多変量に拡張すれば、リスク・ファクターの積率と交差積率からその同時分布の近似を得ることができる。本稿では、この多変量分布展開法とその応用についても述べる。

分布展開法の脆弱性 このように、分布展開法には、大きな潜在的有用性が期待されるが、実際に応用を試みると、以下の脆弱性が障害になる。すなわち、分布展開法による近似は多

項式を含んでいるため、確率密度が負値で近似されることを排除しきれない。この影響は、確率密度がゼロに近い、分布の裾の部分で特に深刻になり得る。このため、分布展開法による近似は、リスク計測を目的とした場合等には実用に足らない場合が多い。このような脆弱性が、分布展開法の実務的な利用があまり盛んでなかった背景であると考えられる。本稿では、こうした分布展開法の脆弱性を補うための技術的な工夫も紹介する。

本稿の構成 2節以降の本稿の構成は以下のとおりである。まず、2節で、市場リスク計測の技術的な背景について述べる。ポートフォリオの損益分布の導出手順を説明し、本稿で扱う問題を明らかにする。次に、現行の手法がこれらの問題にどのように対処しているのかを検討する。さらに、3節で、分布展開法と、それと関連の深い概念である積率について解説する。また、ここでは、分布展開法の欠点の考察を行ったうえで、これを補うための工夫を導入し、2節に挙げた問題への解法も示す。4節では、3節までに議論した手法に関する数値計算例を示す。5節では、分布展開法の多変量分布への拡張を検討し、その応用を紹介する。6節は、全体のまとめである。

## 2 市場リスクの計測とその技術的な側面

先に述べたように、ポートフォリオの市場リスク計測は、何らかのリスク指標を算出する作業と同義であるといえる。ここでは、まず 2.1 において主なリスク指標とポートフォリオの損益分布の関係について述べ、2.2 で、ポートフォリオの損益分布を導出する一般的な手順を解説する。次に、2.3 で、ポートフォリオの損益分布を導出する上で生じる 3 つの技術的な問題を提示し、2.4 では、現在利用されている主なリスク計測手法が、これらの問題にどのように対処しているのかを検討する。

### 2.1 リスク指標と損益分布

1959年に、ポートフォリオ収益率の分散を使ってポートフォリオのリスクを計るというアイデアがマーコビッツによって紹介されて<sup>5</sup>以来、現在までに幾つかのリスク指標が提案され、また金融実務で利用されている。

その中でも、1994年にJPモルガンが自らの市場リスク管理手法を公開したRiskMetrics(1994)の中で紹介されたVaRの考え方は、その後の業界標準となった<sup>6</sup>。VaRは、ポートフォリオの損益分布の確率点として定義される。すなわち、 $Z$ をポートフォリオの損益を表す確率変数、 $\alpha \in (0, 1)$ を確率水準を表すパラメータとして、VaRは

$$\text{VaR}_\alpha = \max\{-\inf\{z | P(Z \leq z) \geq \alpha\}, 0\} \quad (1)$$

<sup>5</sup>Markowitz (1959) 参照。

<sup>6</sup>Rogachev (2007) によると、VaRが最初に注目されたのはGroup of Thirty (1993)のレポートによってであるとされている。ただし、Szegö (2002)は、RiskMetrics (1994)の中でVaRが紹介されたことが業界全体で広く利用されるようになったきっかけであることを示唆している。

と表される。ただし、 $P$  はいわゆる観測確率と呼ばれる確率測度である<sup>7</sup>。(1) 式中のポートフォリオの損益  $Z$  は、例えば、ポートフォリオの現時点における価値と、ある将来時点でのありうべき価値の差で定義され、損失は負の利益として表現される。また、当該時点までのポートフォリオ構成の変化は、多くの場合考慮されない。実務における市場リスク計測では、 $\alpha = 0.01$  が利用される場合が多い<sup>8</sup>。

VaR の他、期待ショートフォール (ES) が学術論文等で頻繁に取り上げられる<sup>9</sup>。ES は、VaR を超える損失の期待値として定義され、

$$ES_{\alpha} = -E(Z|Z \leq -VaR_{\alpha}) \quad (2)$$

で与えられる。ただし、 $E$  は、 $P$  のもとでの期待値演算を表す。

これら主だったリスク指標は、ポートフォリオ損益  $Z$  の分布の統計量として与えられるため、ポートフォリオの損益分布を求めることがこれらのリスク指標を算出するための鍵となる (図 1 参照)。また、損益分布の確率密度関数が利用可能な場合、この確率密度関数自体が、ポートフォリオに発生し得る損失額とその蓋然性の視覚的イメージを与えるという意味で有用である<sup>10</sup>。

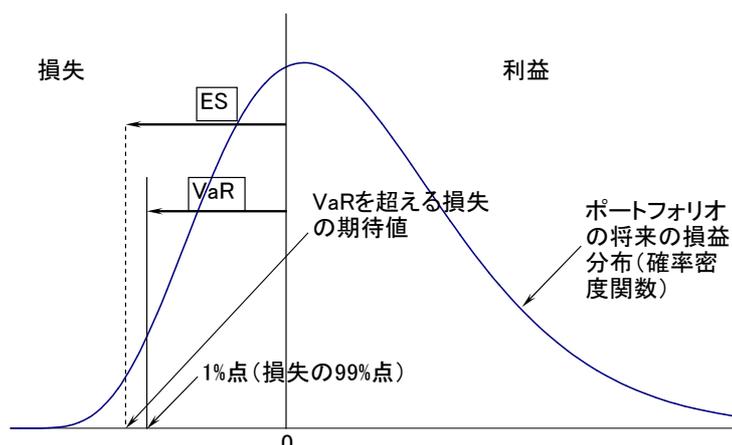


図 1: 損益分布とリスク指標 (VaR, ES) の関係

## 2.2 ポートフォリオの損益分布算出手順

ポートフォリオの損益分布を算出する一般的な手順は、以下のようにまとめられる。

<sup>7</sup>対比される概念として、リスク中立確率 (測度) あるいは同値マルチンゲール測度等と呼ばれる確率測度がある。この確率測度は、主に金融派生証券の価格付けに利用される。この点は、例えば、Shreve (2004) 等標準的なファイナンスの教科書を参照。

<sup>8</sup>(1) 式において  $\alpha = 0.01$  として算出した VaR は、損失分布の 0.99 確率点でもあるので、99%VaR とも呼ばれる。

<sup>9</sup>例えば、Acerbi and Tasche (2002), Rockafellar and Uryasev (2000) 参照。

<sup>10</sup>ポートフォリオの損益分布を利用しないようなリスク指標も実務では重要な役割を果たしている。なかでも basis point value (bpv, リスク・ファクターが 0.01% 変化したときのポートフォリオ価値の変化) はフロント部署等で広く使われている。また、VaR の算出とあわせて行われることが多いストレス・シナリオの分析も、損益分布を利用しないリスク計測手法である。ただし、本稿ではこれらの手法についての議論は行わない。

### i. リスク評価期間の設定

2.1 で述べたように、市場リスク計測において我々の関心は、将来の市場環境の変化によってポートフォリオに生じ得る潜在的な損失にある。市場リスクを計測するためには、将来のどの時点での損失を考えるのか、という時点をあらかじめ設定しておく必要がある。現在(あるいは他の基準日)から、この設定された将来時点までの時間をリスク評価期間と呼ぶ。実務では、目的や状況に応じて1日、あるいは10営業日、6ヶ月等に設定される。

### ii. リスク・ファクターおよびリンク関数の特定

ポートフォリオの損益に影響を与え得る市場変数(リスク・ファクター)を特定する。同時に、これらリスク・ファクターとポートフォリオの損益を関連付ける関数も特定する。ここでは、この関数をリンク関数と呼ぶ。すなわち、ポートフォリオの損益  $z$  が  $p$  個のリスク・ファクター  $x = (x_1, \dots, x_p)$  に依存するという状況を、リンク関数  $d$  を使って、 $z = d(x)$  と表現する。

### iii. リスク・ファクターのモデル化およびパラメータ推定

ii. で特定した  $p$  個のリスク・ファクター  $x$  を  $p$  変量の確率変数  $X = (X_1, \dots, X_p)$  によりモデル化し、その同時分布関数  $F_X(x_1, \dots, x_p) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_p \leq x_p)$  に含まれるパラメータを過去の市場情報等から推定する。なお、一般に  $X$  は、現在から、i. で設定した将来時点までの市場環境の変化を表すので、その分布はリスク評価期間に依存する。

### iv. ポートフォリオの損益分布の導出

以上 i. ~ iii. の設定及びモデル化のもと、ポートフォリオの損益は、確率変数  $Z = d(X)$  として与えられる。目的である  $Z$  の分布関数  $F_Z(z) = P(Z \leq z)$  は、リスク・ファクターの分布関数  $F_X$  とリンク関数  $d$  により決まる。

## 2.3 本稿で扱う問題

ポートフォリオ損益の分布関数を求める手順は、2.2 にまとめたとおり単純なものであるが、実際にこれを行おうとすると、幾つかの技術的な問題に行き当たる。本稿では、これらのうち、次の3つに焦点を当て、これらに対する解法の提示を試みる。

### 2.3.1 リスク・ファクターの分布の表現

2.2 の iii. では、リスク・ファクターを  $p$  変量の確率変数  $X$  を使ってモデル化するが、この  $X$  の分布に関する情報を iv. の計算過程に渡す必要がある。この際、 $X$  の分布に関する情報をどのように表現するのかという問題がある。iv. の計算過程では、個々のリスク・ファクターの周辺分布のほか、リスク・ファクター間の相互依存関係に関する情報も必要である。

リスク・ファクターの同時分布はこれらの情報を含んでいるので、これをそのまま次の計算過程に渡すことも考えられるが、一方で、そもそも扱いやすい多変量分布は、多変量正規分布等一部しかなく、この方法は柔軟性に欠けるともいえる。

### 2.3.2 長期間のリスク計測

リスク評価期間を(例えば10営業日<以下、10日>等)長く取る場合には、上述「リスク・ファクターの分布の表現」のほか、次の点に注意が必要である。すなわち、リスク評価期間を長く取るにつれ、標本数が少なくなり、リスク・ファクターの分布の特徴を捉えることが難しくなってしまうという問題がある。例えば、リスク評価期間を10日とした場合、市場変数の10日間の変動がリスク・ファクターとなる。10日間の変動を重複なしに(すなわち、市場変数を10日おきに)観測した場合、1年間で得られる標本数は25個程度であり、例えば500個の標本を得るためには20年分の観測値が必要になる。このような長期間の市場情報を利用することはあまり現実的ではない。

リスク評価期間が $T$ 日のリスク・ファクターを $X^T$ として、リスク評価期間が1日のリスク・ファクターの時系列を $X^1(t), t = 1, 2, \dots$ とすると、 $X^T = X^1(1) + \dots + X^1(T)$ と表すことができる。このような定式化のもとでは、この問題は、 $T$ 個の確率変数の和の分布を求めることに等しい。

### 2.3.3 複数のリスクの合算

最後に、仮に上述の2つの問題が解決して、リスク・ファクター $X$ の分布 $F_X$ に関する十分な情報が得られたとしよう。この場合に、 $Z = d(X)$ の分布 $F_Z$ をどのように導出するか、という問題を考える。

$F_Z$ は、形式的には、 $X$ の同時密度関数を $f_X$ として、

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = \int_{d(\mathbf{x}) \leq z} f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

を数値的に解くことによって与えられるが、そのためにはモンテカルロ法等の計算負荷が大きい手法に依らざるを得ない場合が多い。

## 2.4 現行手法の検討

ここでは、現在利用されている主な手法を振り返り、これらの手法が2.3に挙げた3つの問題にどのように対処しているのかを検討する。現在金融機関等では多様な手法が利用されていると考えられるが、大別すれば、殆どのものが、多変量正規分布を利用する手法か、経験分布を利用する手法(HS法)かのいずれかのグループになる<sup>11</sup>。

以下、これら2つの手法のグループと2.3に挙げた3つの問題の関連を検討する。

<sup>11</sup>例えば、RiskMetrics (1996), Mina and Xiao (2001), Jorion (2001), Duffie and Pan (1997), Linsmeier and Pearson (1996)等を参照。これら2つのグループ以外にも、実務での利用はあまり一般的でないが、学術論文等では、極値論(Extreme Value Theory, EVT)やコピュラの利用がしばしば議論される。これらについては、Marumo (2007)の2.2.2を参照。

### 2.4.1 多変量正規分布を利用する手法

リスク・ファクターが多変量正規分布を使ったモデルで表現される、と仮定する方法は、パラメトリックな手法の中で最も一般的であると思われる。この背景には、多変量正規分布の取扱いが、多変量分布の中では例外的に容易である、という事情もある。この手法には、幾つかのバリエーションが存在する。

リスク・ファクターの分布の表現 多変量正規分布を利用する手法の中で最も基本的な手法は、リスク・ファクターを多変量正規分布で表現するものである。この場合、市場からの情報は期待値ベクトルと分散共分散行列に集約され、簡便さという点では非常に優れている。

その一方で、多変量正規分布は、分布の重い裾や非対称な分布形等、しばしば現実に観測される、リスク・ファクターの重要な特性を無視してしまい、リスク計測の精度に問題が生じ得るという欠点がある。

重い裾を表現し、計測の精度を向上させるために、正規分布に従う変動に、ポアソン過程に従うショックを付加した、ジャンプ・ディフュージョン・モデルや、正規分布の分散が確率的に変動すると仮定する確率的ボラティリティ・モデルが提案されている<sup>12</sup>。これらの改良された手法の欠点は、扱う必要のあるパラメータの数が基本的な手法よりも多く、パラメータ推定に必要な計算負荷がより大きいことである。また、これらのモデルを仮定した場合、リスク・ファクターの分布が解析的に表現されないことがしばしばある<sup>13</sup>点も利便性に欠けるといえる。

長期間のリスク計測 多変量正規分布を利用する手法のなかで最も一般的であると思われる対処法は、リスク・ファクターが多変量正規分布に従い、かつ系列独立であると仮定することである。この仮定のもとでは、リスク評価期間1日のリスク・ファクターの期待値を  $E(X^1) = \mu^1$  として、リスク評価期間  $T$  日のリスク・ファクター  $X^T$  に対し、

$$X^T - T\mu^1 \stackrel{D}{=} \sqrt{T}(X^1 - \mu^1) \quad (3)$$

が成立する(いわゆる  $\sqrt{T}$  則)。ただし、 $\stackrel{D}{=}$  は、左辺と右辺が同じ分布を持つことを表す。

上述した確率的ボラティリティ・モデルは、系列依存関係を表現できるが、 $X^T$  の分布の導出が容易でない場合が多いという欠点も有する。

複数のリスクの合算 この問題への対処には大まかに2つの方向がある。1つは、リンク関数  $d$  のテーラー近似を考えることである。

リスク・ファクターが多変量正規分布に従うと仮定され、 $d$  のテーラー近似が線形項しか含まない場合は、特にデルタ-ノーマル法と呼ばれる。この場合、ポートフォリオの損益分布も、正規分布で近似されるため、利便性の点では非常に優れている。ただし、定義上、 $d$  の非線形性が無視されるため、非線形性の影響が大きいポートフォリオのリスクを計測する場合には精度に問題が生ずるといふ欠点がある。

<sup>12</sup>Duffie and Pan (1997) 参照。特に、確率的ボラティリティ・モデルの中で、分散の系列自己相関が表現可能な Generalised Autoregressive Conditional Heteroscedasticity (GARCH) モデルは頻繁に議論に採り上げられる。

<sup>13</sup>例えば、GARCH モデルに従う変数の無条件分布は、解析的に表現できない。Marumo (2007), Marumo and Wolff (2007) 参照。

$d$  のテーラー近似が 2 次の項まで含む場合は、デルタ-ガンマ-ノーマル法と呼ばれる。デルタ-ガンマ-ノーマル法は、 $d$  の非線形性の影響もある程度反映する、という点においてデルタ-ノーマル法よりも精度が高いと考えられる。ただし、ポートフォリオの損益がリスク・ファクターの 2 乗も含むために、損益分布が正規分布ではなくなってしまう。このため損益分布関数を導出するためにさらなる近似が必要となる、という欠点がある<sup>14</sup>。

もう 1 つの方向は、モンテカルロ法の利用である。これは、多変量の擬似正規乱数を多数発生させ、それぞれを  $d$  に代入して、ポートフォリオ損益の擬似標本を多数得る。その経験分布をポートフォリオ損益分布の推定値とするというものである。この手法は、リスク計測のように分布の裾に興味がある場合には計算負荷が特に大きいという欠点があるほか、使用する擬似乱数の系列に依存して結果が揺らぐことも問題視され得る<sup>15</sup>。

## 2.4.2 ヒストリカル・シミュレーション法

ヒストリカル・シミュレーション (HS) 法は、リスク・ファクターの経験分布を利用する手法である。過去の市場情報等から、リスク・ファクターの  $N$  個の標本  $x^{(i)}, i = 1, \dots, N$  が得られたとしよう。そこから、ポートフォリオの仮想的な損益の  $N$  個の標本が、 $z^{(i)} = d(x^{(i)}), i = 1, \dots, N$  のように得られる。HS 法は、この  $\{z^{(i)}, i = 1, \dots, N\}$  の経験分布を、ポートフォリオの損益分布の推定値として利用するものである。

リスク・ファクターの分布の表現 HS 法では、リスク・ファクターは一連の標本として表現され、そのまま、ポートフォリオの損益分布を計算する過程に渡される。この手法の利点は、もし、標本数が十分であれば<sup>16</sup>、リスク・ファクターの分布の特性が、リスク・ファクター間の相互依存関係も含めて、自然な形で表現され、ポートフォリオの損益分布の算出に取り入れられることである。

HS 法に特有の欠点としては、リスク・ファクターが標本でなくモデルとして与えられた場合への対処が困難であることや、分布が離散的であることが挙げられる。

長期間のリスク計測 長期間のリスク計測について、HS 法は、便宜的な対処に依らざるを得ない。すなわち、リスク評価期間が長い場合には、2.3 に述べたように、損益分布を得るために十分な数の標本を得ることが難しいことが多い。また、多変量正規分布を利用する方法では有効であった、 $X^T = X^1(1) + \dots + X^1(T)$  のような定式化の下でも、 $N$  個の標本  $x^{(i)}, i = 1, \dots, N$  から  $X^T$  の分布を導出する合理的な手法は未だ提案されていない<sup>17</sup>。

現在利用されている便宜的な手法は、(3) 式のように  $\sqrt{T}$  則による調整を行うか、あるいは、市場で観測された時系列から重複を許した標本を採取する、等である。

<sup>14</sup>デルタ-ガンマ-ノーマル法の近似については、Marumo (2007) の 2.2.2 参照。

<sup>15</sup>例えば、Jorion (2001) の 9.4.3 を参照。

<sup>16</sup>どの程度の標本数が十分であるか、という点も議論になり得る。例えば、分布の 1% 点に関心がある場合、100 以下の標本数は明らかに小さすぎると考えられる。標本数の議論も含め、HS 法の問題点に関しては Finger (2006) にまとめられている。

<sup>17</sup>例えば、Danielsson (2002), Finger (2006) 参照。

複数のリスクの合算 上述した HS 法の手順に従うと、十分な数のリスク・ファクターの標本があれば、ポートフォリオの損益分布の推定値は、ほぼ自動的に求められる。この手順を実行する際の困難さが、リスク・ファクターの分布の特性やリンク関数の形状に殆ど依存しないことは HS 法の大きな利点といえる。

欠点を挙げれば、損益分布の推定値が離散的であり、また裾の統計量が少数の標本に過度に依存してしまうこと等がある。

### 2.4.3 現行手法のまとめ

本節では、多変量正規分布を利用する方法と HS 法を振り返り、これらが 3 つの問題：リスク・ファクターの分布の表現、長期間のリスク計測、複数のリスクの合算、にどのように対処しているのかを検討した。要約すれば、リスク・ファクターの分布の表現と複数リスクの合算に対しては HS 法に優位性があるが、同時に、HS 法は長期間のリスク計測に対して合理的な対処法を持たないという欠点も持つ。また、得られる分布が離散的であることと、リスク・ファクターがモデルとして与えられている場合への対処が困難なことも HS 法の欠点となる可能性がある。多変量正規分布を利用する方法は、上述の 3 つの問題すべてに一応の対処法が存在するものの、リスクファクターの分布の表現や、複数のリスクの合算に関して、近似の精度に問題がある可能性がある。

本稿の目的の 1 つは、HS 法の利点のある程度受け継ぎつつ、HS 法が不得意とする、長期間のリスク計測や、リスク・ファクターがモデルとして与えられている場合への対処が可能な手法を提案することである。

## 3 積率と分布展開法及びその応用

本節では、分布展開法とその市場リスク計測への応用について解説する。分布展開法とは、数学的には、ある確率密度関数を別の確率密度関数と多項式の積で表す手法であるが、本稿では、この手法を未知の確率密度関数の近似値を得るために利用する。分布展開法を利用することの最大の利点は、確率密度関数の近似値が、目標とする分布の積率のみから構成されることである。この性質を利用すれば、前節で述べた現行手法の弱点を補強するようリスク計測手法が得られる可能性がある。

まず 3.1 で、積率やこれと関連する概念である交差積率の基本的な事項を確認し、次に 3.2 で分布展開法とその性質を解説する。最後に、3.3 で、分布展開法を市場リスク計測に応用するための工夫について述べる。

### 3.1 積率・交差積率と確率分布

#### 3.1.1 積率と確率変数、確率分布

定義 積率 (あるいはモーメント、moment) は、確率変数のべき乗の期待値として定義される。すなわち、確率変数  $X$  と自然数  $k = 1, 2, \dots$  に対し、 $X$  の  $k$  次積率は  $E(X^k)$  である。

$X$  が確率密度関数  $f_X$  を持つ場合

$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} u^k f_X(u) du \quad (4)$$

である<sup>18</sup>。

特徴 積率は、分布の形状を特徴付ける。例えば、4次までの積率は、次のように、分布の形状を表象する指標としてしばしば利用される。

- 1次： $\mu_X = E(X)$  — 期待値や平均と呼ばれ、しばしば分布の代表値として利用される。
- 2次まで： $\sigma_X^2 = E(X^2) - \mu_X^2$ ,  $\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}$  — それぞれ分散、標準偏差と呼ばれる、分布の散らばりの大きさを表す指標。
- 3次まで： $(E(X^3) - 3\mu_X\sigma_X^2 - \mu_X^3)/\sigma_X^3$  — 歪度と呼ばれる、分布の非対称性を表す指標。左右対称であれば、0になる。
- 4次まで： $(E(X^4) - 4\mu_X E(X^3) + 6\mu_X^2\sigma_X^2 + 3\mu_X^4)/\sigma_X^4$  — 尖度と呼ばれる、分布の裾の重さを表す指標。正規分布では3になり、裾がより重ければ、それよりも大きい値をとる。

算出方法 積率は、基本的な統計量であり、多くの場合算出が容易である。確率密度関数が利用可能である場合は(4)式が利用できるほか、積率母関数を使って求める方法もある<sup>19</sup>。 $N$ 個の独立な標本  $x^{(i)}, i = 1, \dots, N$  が与えられた場合

$$\hat{E}(X^k) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x^{(i)})^k \quad (5)$$

のように推定が可能である。

### 3.1.2 交差積率と確率変数間の相互依存関係

定義 交差積率は、複数の確率変数のべき乗の積の期待値として定義される。例えば、2つの確率変数  $X_1, X_2$  と自然数  $k = 1, 2, \dots, l = 1, 2, \dots$  に対し、 $E(X_1^k X_2^l)$  と定義される。 $X_1, X_2$  が同時密度関数  $f_{X_1 X_2}$  を持つ場合、積率と同様、

$$E(X_1^k X_2^l) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u^k v^l f_{X_1 X_2}(u, v) du dv \quad (6)$$

である。確率変数が3つ以上存在する場合も同様に定義される。

<sup>18</sup>例えば、 $t$ 分布等、裾の重い分布に対しては、(4)式右辺の積分が存在せず、積率が定義できない場合もある。こうした場合について本稿では詳しく扱わないが、Marumo (2007) の Appendix A.6 や Marumo and Wolff (2007) を参照。

<sup>19</sup>積率母関数については、蓑谷 (1998) 等標準的な数理統計学の教科書を参照。

特徴 交差積率には、確率変数間の相互依存関係に関する情報が含まれている。例えば、2つの確率変数の相互依存関係を表す指標として利用されることが多い、共分散 Cov や相関係数 Corr は、積率と交差積率を使って

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_1, X_2) &= E(X_1 X_2) - E(X_1)E(X_2), \\ \text{Corr}(X_1, X_2) &= \frac{E(X_1 X_2) - E(X_1)E(X_2)}{\sqrt{E(X_1^2) - \{E(X_1)\}^2} \sqrt{E(X_2^2) - \{E(X_2)\}^2}} \end{aligned}$$

と表される。また、 $X_1$  と  $X_2$  が独立な場合、 $k = 1, 2, \dots, l = 1, 2, \dots$  に対し、 $E(X_1^k X_2^l) = E(X_1^k)E(X_2^l)$  が成り立つという性質もある。

算出方法 積率と同様に、交差積率も基本的な統計量であり、算出が可能な場合が多い。同時密度関数が利用可能な場合は (6) 式を利用することができ、また  $N$  個の独立な標本  $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)})$ ,  $i = 1, \dots, N$  が与えられている場合には

$$\hat{E}(X_1^k X_2^l) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_1^{(i)})^k (x_2^{(i)})^l$$

のように推定が可能である。

### 3.1.3 確率変数の演算と積率・交差積率

確率変数の和や積の積率は、もとの確率変数の積率と交差積率を使って表すことができる。すなわち、例えば2変量の場合

$$\begin{aligned} E((X_1 + X_2)^k) &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} E(X_1^i X_2^{k-i}) \\ E((X_1 X_2)^k) &= E(X_1^k X_2^k) \end{aligned}$$

が成り立つ。ただし、 $\binom{k}{i}$  は2項係数を表わし、

$$\binom{k}{i} = \frac{k!}{i!(k-i)!}$$

で定義される<sup>20</sup>。

このことを利用すると、次のような応用が考えられる。

長期間のリスク計測 リスク評価期間  $T$  日の、ある1変量のリスク・ファクター  $X^T$  の  $k$  次積率は、

$$\begin{aligned} E((X^T)^k) &= E((X^1(1) + \dots + X^1(T))^k) \\ &= \sum_{k_1 + \dots + k_T = k} \frac{k!}{k_1! \dots k_T!} E(X^1(1)^{k_1} \dots X^1(T)^{k_T}) \end{aligned} \quad (7)$$

<sup>20</sup>2項係数は  ${}_k C_i$  と表記されることもある。

のように、リスク評価期間 1 日のリスク・ファクターの時系列  $\{X^1(t)\}$  の自己交差積率を使って表される。 $\{X^1(t)\}$  が独立で同一の分布に従っている場合には、(7) 式は

$$E((X^T)^k) = \sum_{k_1+\dots+k_T=k} \frac{k!}{k_1! \dots k_T!} E(X^1(1)^{k_1}) \dots E(X^1(1)^{k_T}) \quad (8)$$

のように  $X^1(1)$  の積率のみを使って表される。このことは、2.3 に挙げた問題「長期間のリスク計測」を考えるうえで示唆的である。多変量の場合にも同様の議論が可能である。

複数のリスクの合算 さらに、以上の議論に、テーラー近似を組み合わせると、確率変数に非線型の演算を作用させたものの積率も、もとの確率変数の積率と交差積率を使って近似することができる。これは、2.3 の「複数のリスクの合算」で議論したポートフォリオの損益  $Z$  の積率が、リスク・ファクター  $(X_1, \dots, X_p)$  の積率と交差積率を使って表され得ることを意味する。例として、ポートフォリオの損益  $Z$  が 2 つのリスク・ファクター  $X_1, X_2$  に  $Z = d(X_1, X_2)$  のように依存している場合を考えよう。リンク関数  $d$  が

$$\begin{aligned} d(x) &\simeq \sum_{i,j} \frac{1}{i!j!} \frac{\partial^{i+j}}{\partial x_1^i \partial x_2^j} d(0,0) x_1^i x_2^j \\ &= \sum_{i,j} D_{ij} x_1^i x_2^j \end{aligned}$$

のような有限和で近似されるとする。ただし、

$$D_{ij} = \frac{1}{i!j!} \frac{\partial^{i+j}}{\partial x_1^i \partial x_2^j} d(0,0)$$

は既知の定数である。このとき、ポートフォリオの損益は

$$Z \simeq \sum_{i,j} D_{ij} X_1^i X_2^j$$

で近似されるので、その  $k$  次積率も、

$$E(Z^k) \simeq E\left(\left(\sum_{i,j} D_{ij} X_1^i X_2^j\right)^k\right)$$

と近似される。この右辺を多項展開すれば、

$$E(Z^k) \simeq \sum_{i',j'} D'_{i',j'} E(X_1^{i'} X_2^{j'}) \quad (9)$$

のように  $X_1$  と  $X_2$  の積率と交差積率の有限線型和で近似される。ただし、 $D'_{i',j'}$  は既知の定数である。リスク・ファクターが 3 つ以上ある場合も同様の近似が可能である。

以上より、リスク・ファクターの積率及び交差積率がわかれば、2.3 で問題となった 2 つの確率変数、 $X^T$  と  $Z$  の積率が算出あるいは近似することができることがわかった。本稿では、このことを手掛りとし、次に解説する分布展開法を利用することによってこれらの確率変数の分布を導出することを目指す。

## 3.2 分布展開法

ここでは、分布展開法とその性質について概説する。さらなる詳細は Marumo (2007) の 2.2.3 に述べられているほか、より厳密な理論的背景に関しては、Szegő (1975), Jackson (1963), Freud (1971) に詳しい。

### 3.2.1 正規直交多項式系

$\{g_k; k = 0, 1, \dots\}$  を  $k$  次多項式の列とする。すなわち、各  $g_k$  は、 $k+1$  個の定数  $g_{k,0}, g_{k,1}, \dots, g_{k,k}$  を使って

$$g_k(x) = g_{k,0} + g_{k,1}x + \dots + g_{k,k}x^k$$

と表わされ、 $g_{k,k} \neq 0$  である。また  $w$  を、定義域  $S \subseteq \mathbf{R}$  を持つ非負の関数で、 $\int_S w(u)du = 1$  を満たすものとする。

$\{g_k\}$  と  $w$  が、

$$\int_S w(u)g_k(u)g_l(u)du = \begin{cases} 0 & (k \neq l) \\ e_k > 0 & (k = l) \end{cases}$$

を満たすとき、 $\{g_k\}$  を直交多項式列、 $w$  を重み付け関数と呼び、これらの組  $(w, \{g_k\})$  を直交多項式系という。また、すべての  $k = 0, 1, \dots$  に対し  $e_k = 1$  の場合特に、 $(w, \{g_k\})$  を正規直交多項式系という。

$\{g_k\}$  を任意の直交多項式列とすると、 $\{g_k/\sqrt{e_k}\}$  は正規直交多項式列であるので、以下、一般性を失うことなく、正規直交多項式系のみを扱う。

### 3.2.2 分布展開法

定義域  $S$  を持つ、ある確率密度関数  $f$  が正規直交多項式系  $(w, \{g_k\})$  を使って

$$f(x) = w(x) \sum_{k=0}^{\infty} C_k g_k(x) \quad (10)$$

と表されたとしよう。ただし、 $C_0, C_1, \dots$  は実数の係数である。これらの係数は、正規直交性から

$$C_k = \int_S g_k(u)f(u)du, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (11)$$

を満たすことがわかる。確率変数  $X$  が確率密度関数  $f$  に従っているとすると、(11) 式より、 $C_k = E(g_k(X))$  であるが、これは、 $g_k$  が多項式であることから、

$$E(g_k(X)) = g_{k,0} + g_{k,1}E(X) + \dots + g_{k,k}E(X^k)$$

のように、 $X$  の  $k$  次までの積率の線型和である。ただし、 $k = 0$  の場合、 $g_0(x)$  は定数であり、 $\int_S f(u)du = 1$  より  $C_0 = g_0(X) = 1$  が導かれる。

正規直交多項式系を使った近似  $X$  の  $n$  次までの積率  $E(X), \dots, E(X^n)$  が与えられたとしよう。このとき、上の議論より、(10) 式の係数  $C_k = E(g_k(X))$  は、 $k = 0, \dots, n$  について計算可能である。このことから、(10) 式の無限和を、 $n$  までの有限和で、

$$f(x) \simeq \hat{f}(x) = w(x) \sum_{k=0}^n E(g_k(X))g_k(x) \quad (12)$$

のように近似することが考えられる。本稿では、この近似法を分布展開法と呼び、これの市場リスク計測への応用を考察する。

分布展開法は、利用する正規直交多項式系によって分類することができる。一般に、無限次までの積率が存在する任意の確率密度関数を重み付け関数として正規直交多項式系を構成することが可能であるが、議論に採り上げられることが特に多いのは次の 2 つである。

**エルミート展開** 定義域  $S = (-\infty, \infty)$  に対しては、エルミート多項式系が頻繁に利用される。エルミート多項式系とは、 $g_k$  が  $k$  次のエルミート多項式

$$g_k(x) = \text{He}_k(x) = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k!}} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^k}{dx^k} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (13)$$

で与えられ、重み付け関数

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

が標準正規分布の確率密度関数に等しいものである。このとき、(12) 式は、

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \sum_{k=0}^n E(\text{He}_k(X)) \text{He}_k(x) \quad (14)$$

となる。本稿では、これをエルミート展開と呼ぶ<sup>21</sup>。

エルミート展開を使うと、次のような便利な計算式を利用することができる。すなわち、(14) 式を積分する際に (13) 式を利用すると、分布関数が

$$\int_{-\infty}^x f(u) du \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du - e^{-\frac{x^2}{2}} \sum_{k=1}^n \frac{E(\text{He}_k(X))}{\sqrt{k}} \text{He}_{k-1}(x) \right\}$$

で近似されるほか、ES の計算に必要な積分の近似も

$$\int_{-\infty}^x u f(u) du \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ -e^{-\frac{x^2}{2}} + E(\text{He}_1(X)) \left( \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du - x e^{-\frac{x^2}{2}} \right) - e^{-\frac{x^2}{2}} \sum_{k=2}^n E(\text{He}_k(X)) \left( \frac{x \text{He}_{k-1}(x)}{\sqrt{k}} + \frac{\text{He}_{k-2}(x)}{\sqrt{k(k-1)}} \right) \right\}$$

のように得られ、数値積分の負荷が軽減される。

<sup>21</sup>導出の方法が異なるものの、エッジワース展開と呼ばれるものも、同様の数式で表される。詳細は、Hall (1992) 参照。

ラゲール展開 定義域  $S = [0, \infty)$  に対しては、ラゲール多項式系が多く利用される。ラゲール多項式系とは、 $g_k$  が  $k$  次のラゲール多項式

$$g_k(x) = L_k^{(\beta-1)}(x) = \sqrt{\frac{\Gamma(k+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(k+\beta)}} \sum_{l=0}^k \binom{k+\beta-1}{k-l} \frac{(-x)^l}{l!} \quad (15)$$

で与えられ<sup>22</sup>、重み付け関数

$$w(x) = \frac{x^{\beta-1}e^{-x}}{\Gamma(\beta)}$$

が標準ガンマ分布の確率密度関数に等しいものである。ただし、 $\beta$  は非負のパラメータで、 $\Gamma(\cdot)$  は

$$\Gamma(u) = \int_0^\infty v^{u-1}e^{-v}dv$$

で定義されるガンマ関数である。

このとき、(12) 式は、

$$\hat{f}(x) = \frac{x^{\beta-1}e^{-x}}{\Gamma(\beta)} \sum_{k=0}^n \mathbb{E}(L_k^{(\beta-1)}(X)) L_k^{(\beta-1)}(x) \quad (16)$$

となる。本稿では、これをラゲール展開と呼ぶ。

エルミート展開と同様に、次のような積分の近似値を利用することができる。すなわち、

$$\int_0^x f(u)du \simeq \frac{1}{\Gamma(\beta)} \left\{ \int_0^x u^{\beta-1}e^{-u}du + x^\beta e^{-x} \sum_{k=1}^n \frac{\mathbb{E}(L_k^{(\beta-1)}(X))}{\sqrt{\beta k}} L_{k-1}^{(\beta)}(x) \right\}$$

および

$$\begin{aligned} \int_0^x u f(u)du \simeq \frac{1}{\Gamma(\beta)} \left\{ \left( 1 - \frac{\mathbb{E}(L_1^{(\beta-1)}(X))}{\sqrt{\beta}} \right) \int_0^x u^\beta e^{-u}du \right. \\ \left. + x^{\beta+1} e^{-x} \left( \sum_{k=1}^n \frac{\mathbb{E}(L_k^{(\beta-1)}(X))}{\sqrt{\beta k}} L_{k-1}^{(\beta)}(x) \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_{k=2}^n \frac{\mathbb{E}(L_k^{(\beta-1)}(X))}{\sqrt{\beta(\beta+1)(k-1)k}} L_{k-2}^{(\beta+1)}(x) \right) \right\} \end{aligned}$$

が成り立つ。

### 3.3 分布展開法の市場リスク計測への応用

#### 3.3.1 分布展開法の性質

(12) 式による近似の優れている点は、これが、目標とする分布の積率のみから構成されることである。このことは、3.1の議論と組み合わせれば、2.3で問題となった確率変数の分布の近似が、もとのリスク・ファクターの積率と交差積率から得られることを示している。

<sup>22</sup>  $\binom{k+\beta-1}{k-l}$  は 2 項係数を表わす。脚注 20 参照。

分布展開法を使って、実際に確率変数の分布を近似することを考えよう。例えば、資産収益率をリスク・ファクターとした場合、資産収益率が取る値は正にも負にもなり得るので、この分布を近似するためには、定義域が  $(-\infty, \infty)$  であるエルミート展開を利用するのが自然である。同様に、ポートフォリオの損益も、正負どちらの値もとり得るので、これにもエルミート展開の利用が考えられる。実際、先行研究の多くが、エルミート展開か、そのバリエーションを利用している<sup>23</sup>。

一方で、エルミート展開を利用した近似法には大きな欠点があることが知られている。すなわち、(14) 式による近似は頑健性に欠ける (脆弱性を持つ) ことがしばしば指摘される<sup>24</sup>。(14) 式からは、 $n$  次方程式  $\sum_{k=0}^n E(g_k(X))g_k(x) = 0$  が重解以外の実数解を持つ場合、必ず  $\hat{f}(x) < 0$  となる区間が存在してしまうことがわかる。このことは、確率密度が 0 に近い、裾の部分での近似精度に特に大きな影響を与え得る。この負の確率密度の問題が、エルミート展開を利用する場合の最大の障害であるといえる。

このようなエルミート展開の脆弱性を補う 1 つの方法は、鞍点近似法<sup>25</sup>の利用である。これは、キュムラント母関数<sup>26</sup>が扱いやすい形をしている場合には利用可能であるが、例えば、リスク・ファクターがモデルではなく一連の標本として与えられている場合、キュムラント母関数の導出は容易ではなく、適用が難しいという問題点がある。

本稿では、エルミート展開を利用した近似法に頑健性を持たせるための工夫として、この鞍点近似法ではなく、次の 3 つ: 「基準化」「ラゲール展開の利用」「最適化」を考える。これらの工夫は、単体で利用するのみでなく、組合わせて使うことが可能である。

### 3.3.2 分布展開法に関する 3 つの工夫

ここでは、3 つの工夫: 「基準化」「ラゲール展開の利用」「最適化」を紹介する。これらのうち、「基準化」と「ラゲール展開の利用」の背景にある発想は、重み付け関数と目標とする分布を近づけることである。(12) 式は、 $E(g_0(X)) = 1$  より

$$f(x) \simeq \hat{f}(x) = w(x) + w(x) \sum_{k=1}^n E(g_k(X))g_k(x)$$

と書き換えることができるが、これは、 $f$  を  $w$  で近似したものに、多項式を伴った調整項を加えたもの、と解釈することができる。もし、 $f$  と  $w$  が互いに似ていれば、調整部分の影響は少なくなり、したがって、負の確率密度の影響が軽減され得る。

ここで紹介する「最適化」は、Hall (1983) で紹介されている離散分布の最適化を連続分布に応用したものである。

なお、「基準化」は既存の研究でも頻繁に利用されているが、「ラゲール展開の利用」と「最適化」のリスク計測への応用は、Marumo (2007), Marumo and Wolff (2007) での導入が最初であると思われる。

<sup>23</sup>Marumo (2007) の 2.2.2 参照。

<sup>24</sup>例えば、Gordy (2002), Jaschke (2002) 等参照。

<sup>25</sup>鞍点近似法については、Jensen (1995), Kolassa (1997) を参照。また、Gordy (2002) は、鞍点近似法の与信ポートフォリオのリスク計測への応用を検討している。

<sup>26</sup>キュムラント母関数については、養谷 (1998) 等標準的な数理統計学の教科書を参照。

基準化 近似の目標とする確率密度関数を  $f$  とし、 $X$  を  $f$  に従う確率変数とする。

目標の密度関数  $f$  を、分布展開の重み付け関数  $w$  に近づける最も簡単な方法は、両者の1次と2次の積率が一致するように、 $X$  を変換することである。この変換には、 $f$  の1次と2次の積率のみが必要であり、積率が利用可能であれば追加的な情報を必要としない。

エルミート展開については、 $\mu = E(X)$ ,  $\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$ ,  $X' = (X - \mu)/\sigma$  として、 $f_{X'}$  を  $X'$  の確率密度関数とする。この  $X'$  に (14) 式のエルミート展開を当てはめ、確率密度関数の近似  $\hat{f}_{X'}$  を得る。元の確率密度関数  $f$  の近似は  $\hat{f}(x) = \hat{f}_{X'}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$  で得られる。

ラゲール展開については、 $\beta = \frac{\mu^2}{\sigma^2}$ ,  $X'_L = \frac{\beta X}{\mu}$  と置いて、 $f_{X'_L}$  を  $X'_L$  の確率密度関数とする。  $X'_L$  に (16) 式のパラメータを  $\beta$  としたラゲール展開を当てはめ、 $X'_L$  の確率密度関数の近似  $\hat{f}_{X'_L}$  を得る。元の確率密度関数の近似は  $\hat{f}(x) = \hat{f}_{X'_L}\left(\frac{\beta x}{\mu}\right)$  で与えられる。

このような基準化のもとでは、 $C_1 = C_2 = 0$  が成り立つ。

ラゲール展開の利用 2.4 等で述べたように、資産収益率等のリスク・ファクターを市場で観察すると、その分布の裾が正規分布よりも重いという可能性がしばしば指摘される。このことが、エルミート展開による近似の頑健性に影響を与えている可能性が考えられる。ガンマ分布が、正規分布よりも重い右裾を持つことを考えると、少なくとも右裾付近に関してはラゲール展開の精度の方が優れていることが考え得る。ただし、ラゲール展開も、負の確率密度を完全に排除しているわけではないので、エルミート展開と同様の問題を持つ場合はあり得る。

ラゲール展開の定義域は非負の実数のみであるので、そのままでは、正負両方の値を取り得るリスク・ファクターや損益の分布に当てはめることはできない。ある定数  $M > 0$  に対し、 $X_L = X + M$  と置くと、 $M$  が十分に大きければ  $X_L$  は、ほぼ非負とみなせる。そこで、 $X_L$  にラゲール展開を当てはめ、その確率密度関数の近似  $\hat{f}_L$  が得られる。目標の確率密度関数は  $\hat{f}_L(x + M)$  で近似される。

さらに、 $X_{L^*} = (X + M)^2$  とすれば、 $X_{L^*}$  の非負性が保証される。これにラゲール展開を当てはめ、その確率密度関数の近似  $\hat{f}_{L^*}$  を得ることも考えられる。このとき、目標の確率密度関数は  $2(x + M)\hat{f}_{L^*}((x + M)^2)$  で近似される。本稿では、これを2乗ラゲール展開と呼び、以下では主にこれを検討する。

ラゲール展開の定義域の左端は閉じているため、左裾部分の近似精度はあまりよくない可能性がある。したがって、分布の左裾に興味がある場合には、 $-X$  にこの2乗ラゲール展開を当てはめるという対応が考えられる。

2乗ラゲール展開に含まれるパラメータ  $M$  の選択に関する議論は、Marumo (2007) の A.5 や Marumo and Wolff (2007) を参照。

最適化  $C_k = E(g_k(X))$  として、 $C_k$  および  $C_k^2$  の不偏推定量が  $k = 0, \dots, n$  について利用可能な場合を考える。このような場合の典型的な例としては、 $f$  に従う確率変数からの  $N$  個の独立な標本  $x^{(1)}, \dots, x^{(N)}$  が観測された場合があるので、これを基に説明を進める。

さらにもう1つ、3.2 で仮定したように、 $f$  が

$$f(x) = w(x) \sum_{k=0}^{\infty} C_k g_k(x) \quad (17)$$

のように展開されるものとする。

$\hat{C}_k = N^{-1} \sum_{i=1}^N g_k(x^{(i)})$  は  $C_k$  の不偏推定量であるので、これを (17) 式に代入して  $f$  の近似値を得ることが考えられるが、ここでは、係数  $\alpha_k \geq 0, k = 0, 1, \dots, n$  を使った近似

$$\hat{f}(x) = w(x) \sum_{k=0}^n \alpha_k \hat{C}_k g_k(x)$$

を考え、重み付けされた、期待 2 乗積分誤差 (Mean Integrated Squared Error, MISE)

$$\text{MISE} = E \left( \int_S \frac{\{\hat{f}(u) - f(u)\}^2}{w(u)} du \right) \quad (18)$$

が最小になるように係数  $\alpha_k \geq 0, k = 0, 1, \dots, n$  を調整する。ここで、(18) 式の分母の  $w$  には 2 つの役割がある。1 つは、裾の部分の誤差に相対的に大きい重み付けをすることである。もう 1 つは、期待 2 乗積分誤差を計算可能にすることである。すなわち、(18) 式は、

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k^2 E(\hat{C}_k^2) - 2 \sum_{k=0}^n \alpha_k C_k^2 + \sum_{k=0}^{\infty} C_k^2 \quad (19)$$

に等しい。

$\hat{B}_k^2 = N^{-1} \sum_{i=1}^N \{g_k(x^{(i)})\}^2$  と置くと、

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k^2 \hat{C}_k^2 - 2 \sum_{k=0}^n \alpha_k \frac{N\hat{C}_k^2 - \hat{B}_k^2}{N-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{N\hat{C}_k^2 - \hat{B}_k^2}{N-1} \quad (20)$$

は、(19) 式の不偏推定量である。

次に、諸々の条件を満たしつつ (20) 式を最小にする  $\{\alpha_k\}$  を考える。まず、 $\int_S \hat{f}(u) du = 1$  を満たすために、 $\alpha_0 = 1$  が必要である。また、近似の対象となる変数  $X$  が既に基準化されていれば、先に述べたように  $C_1 = C_2 = 0$  であるので、 $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  とすることができる。 $k = 3, \dots, n$  については、

$$\alpha_k = \begin{cases} \frac{N\hat{C}_k^2 - \hat{B}_k^2}{(N-1)\hat{C}_k^2} & (N\hat{C}_k^2 - \hat{B}_k^2 > 0) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

のとき、(20) 式が最小になる。

### 3.3.3 分布展開法の市場リスク計測への応用

3.2 で述べたように、分布展開法を利用すると、目標とする分布のある次数までの積率から、分布の近似値が得られる。3.1 によれば、リスク・ファクターの自己交差積率から、評価期間が長期の場合のリスク・ファクターの積率が計算され、また、リスク・ファクターの積率と交差積率から、ポートフォリオ損益分布の積率が近似される。分布展開法の実用への障害となっている近似の脆弱性については、上に挙げた 3 つの工夫によって軽減されることが期待される<sup>27</sup>。

<sup>27</sup>この点については、4 節の数値計算例で検討する。

これらの議論を組み合わせることで、2.3 で挙げた 3 つの問題に対し、解法を提示することができる。

1 番目の問題に関しては、リスク・ファクターの分布に関する情報をリスク・ファクターの積率と交差積率を使って表現することが可能である。積率には、リスク・ファクター各々の周辺分布に関する情報が含まれており、交差積率には、リスク・ファクター間の相互依存関係に関する情報が含まれている。また、何らかのモデル化のもとで、自己交差積率が与えられれば、これには系列依存関係に関する情報が含まれる。リスク・ファクターの分布の情報を積率と交差積率に要約できることの利点としては、積率や交差積率は、リスク・ファクターが一連の標本で与えられている場合でも、モデルとして与えられている場合でも、推定や算出が可能な場合が多い、ということも挙げられる。

2 番目の問題である長期間のリスク計測に関しては、リスク・ファクターの積率と自己交差積率が与えられれば、3.1 の (7) 式によってリスク評価期間を長期とした場合のリスク・ファクターの積率が算出される。

また 3 番目の問題である複数のリスクの合算についても、リスク・ファクターの積率と交差積率が与えられれば、3.1 の (9) 式によってポートフォリオの損益分布の積率が近似される。

このようにして、目的の分布の積率が与えられれば、3.2 の議論と、本節に示した工夫によって目的の分布の近似が得られる。

以上が、分布展開法を利用した市場リスク計測の概略である。

## 4 数値計算例

前節で、本稿で提案する手法の説明を行ったが、ここでは、この手法を使った幾つかの数値計算例を紹介する<sup>28</sup>。なお、3.3 で導入した 3 つの工夫のうち、「基準化」を行わなかった場合の近似の精度が著しく低いことが予備検証で判明したため、本稿では、これらの例を扱わない。すなわち、本稿で示す数値計算例には、すべて基準化がなされている。

まず、4.1 で、分布展開法を単一のリスク・ファクターの経験分布に当てはめた例を示す。ここでは、3.3 で示した工夫が実際に分布展開に頑健性を持たせているのか否かを検証する。次に、4.2 で、リスク評価期間が長期の場合のリスク・ファクターの分布を近似する例を示す。最後に、4.3 で、リスク・ファクターの積率と交差積率からポートフォリオの損益分布を近似する例を示す。

### 4.1 リスク・ファクターの経験分布の近似

ここでは、リスク・ファクターの標本が与えられたときに、分布展開法が標本の経験分布をどのように近似するのかを観察する。

リスク・ファクターの例としては、日経平均の日次収益率 (N225) と、日経平均を原資産とするコールオプション (3ヶ月物、ATM) のインプライド・ボラティリティの日次変化率 (N225 IV) の 2 つを採り上げる。標本の概要は、表 1 にまとめた。表 1 の尖度を見ると、N225, N225

<sup>28</sup>本節で示す数値計算例は、Marumo (2007) で示したものの一部に簡単な解説を加えたものである。他の数値計算例や、より詳細な検討は Marumo (2007), Marumo and Wolff (2007) を参照。特に、これらの文献では、パラメトリックなモデルに分布展開法を当てはめた例として GARCH モデルへの適用を検討している。

IV の両者ともに正規分布よりも裾が厚いことがわかる (正規分布の尖度は3)。歪度の絶対値と尖度がともに N225 のものよりも N225 IV のものの方が大きく、N225 IV の方が正規分布からの乖離が大きいといえる。

	N225	N225 IV
観測期間	2004/10/25 日から 2006/11/06 日まで	
標本数	500	
期待値 ( $\times 10^{-4}$ )	8.57	-2.93
標準偏差 ( $\times 10^{-2}$ )	1.08	3.99
歪度 ( $\times 10^{-1}$ )	-2.27	3.13
尖度	4.01	4.96
最小値 ( $\times 10^{-2}$ )	-4.23	-13.75
最大値 ( $\times 10^{-2}$ )	3.52	19.96
相関係数	-0.361	

表 1: 標本の概要。

近似の適切性を検討するうえで、次の3つに注目する。

**分布関数の裾の形状** 市場リスクの計測を念頭に置くと、多くの場合、我々の関心は分布の裾の部分にある。目標とする分布関数と、それに対して分布展開法を当てはめた近似の裾の部分を図に表示して比較することによって、近似の精度を視覚的に評価することができる。

**適合度の指標** 裾の部分だけでなく、分布全体の適合度を表す指標を考える。すなわち、目標であるリスク・ファクターの経験分布を  $S$ 、それを近似する関数を  $\hat{F}$  として、平均2乗誤差の平方根 (Root Mean Squared Error, RMSE) を、

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{F}(x^{(i)}) - S(x^{(i)}))^2} \quad (21)$$

で定義する。ただし、 $\{x^{(i)}; i = 1, \dots, N\}$  はリスク・ファクターの標本である。この値が小さいほど、近似と目標の分布が近いことを示す。

**負の確率密度の総面積** 3.3 で述べたように、分布展開法による近似は、負の確率密度が生じる可能性を排除できない。この、負の確率密度の大きさを見るために、負の確率密度の総面積 (Total Area of Negative Density, TAND) を

$$\text{TAND} = - \int_{\hat{f}(x) < 0} \hat{f}(x) dx = \frac{1}{2} \left( \int_S |\hat{f}(x)| dx - 1 \right) \quad (22)$$

で定義する。この値が小さいほど、負の確率密度の影響が小さいことを示す。

#### 4.1.1 エルミート展開による近似

図 2, 3 に、N225 と N225 IV の経験分布と、エルミート展開および正規分布による近似を示した。また、表 2, 3 は、それぞれ、(21) 式で定義される RMSE と、(22) 式で定義される TAND の比較である。

エルミート展開の次数は  $n = 4, 8, 16$  とした。 $n = 2$  のエルミート展開は正規分布による近似と同値である。

これらからわかることをまとめると次のとおりである。

- 図 3 の  $n = 8, 16$  には、非単調性が見られる。これは、視覚的にも明らかな負の確率密度が存在することを示している。実際に表 3 を見ると、これらの TAND が最も大きく、 $10^{-3}$  のオーダーである。これらの例は、分布の近似としての実用性を欠いており、エルミート展開が脆弱であることを示す典型的な例であるといえる。
- 表 2 を見ると、上述の 2 例以外のものに関しては、エルミート展開による近似の方が正規分布による近似よりも経験分布に近いといえる。
- 表 2 と 表 3 を同時に検討すると、負の確率密度が小さい方がより目標の分布に適合しているとは、必ずしもいえないことがわかる (N225 の  $n = 8$  と  $n = 16$ )。

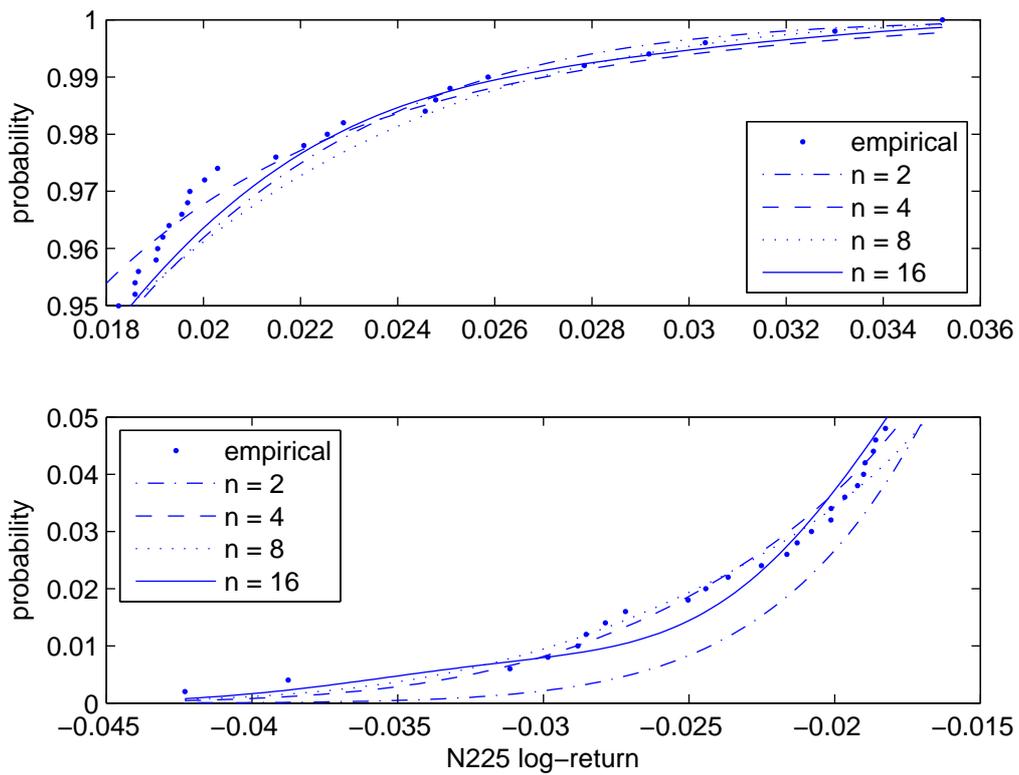


図 2: N225 の経験分布関数 ('empirical') とエルミート展開によるその近似。  $n$  は、(14) 式中の展開の次数を表す。なお、 $n = 2$  のエルミート展開は正規分布による近似と同値である。上図は右裾、下図は左裾を示す。分布全体の適合度や負の確率密度の影響に関しては、表 2, 3 を参照。

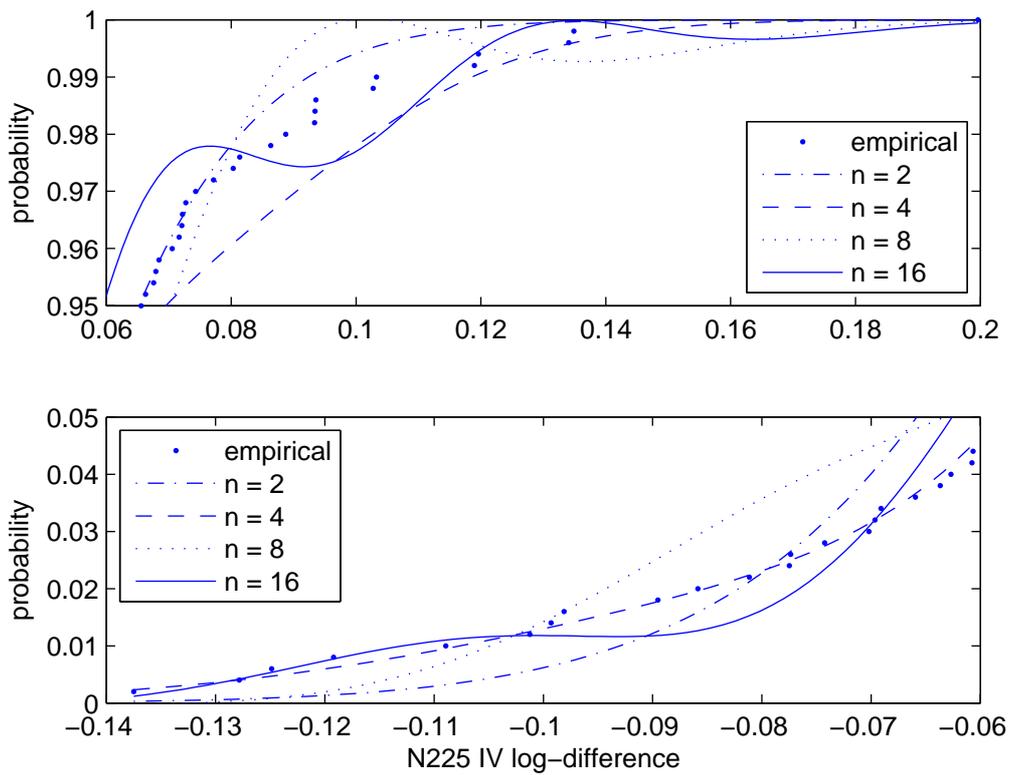


図 3: N225 IV の経験分布 ('empirical') とエルミート展開による近似。  $n$  は、(14) 式中の展開の次数を表す。なお、 $n = 2$  のエルミート展開は正規分布による近似と同値である。上図は右裾、下図は左裾を示す。分布全体の適合度や負の確率密度の影響に関しては、表 2, 3 を参照。

	( $\times 10^{-2}$ )	N225	N225 IV
$n = 2$ (正規分布)		2.916	2.271
$n = 4$		2.082	1.513
$n = 8$		1.643	2.965
$n = 16$		0.887	1.810

表 2: (21) 式で定義される RMSE。  $n$  は、(14) 式中の展開の次数を表す。RMSE は、目標とするリスク・ファクターの経験分布と近似の差の尺度と考えられるので、この値が小さいほど近似が目標に近いことを示す。分布の裾の部分の適合については、図 2, 3 を参照。

	N225	N225 IV
$n = 2$ (正規分布)	0	0
$n = 4$	0	0
$n = 8$	$1.106 \times 10^{-5}$	$8.010 \times 10^{-3}$
$n = 16$	$1.430 \times 10^{-4}$	$7.561 \times 10^{-3}$

表 3: (22) 式で定義される TAND。  $n$  は、(14) 式中の展開の次数を表す。TAND は、負の確率密度の影響の尺度と考えられ、この値が小さいほど負の確率密度の影響が小さい。分布の裾の部分の形状については、図 2, 3 を参照。

#### 4.1.2 各種分布展開法の比較

上の数値計算例で見たとおり、展開の次数  $n$  の選択によって、近似の精度には大きな違いが生じ得る。どのように  $n$  を決めるのかという点も議論になり得るが、この点に関して、現在までのところ、一般的な決定方法は存在しないと思われる<sup>29</sup>。

ここでは、図 4, 5 と表 4, 5 に、展開の次数を  $n = 8$  として、3.3 で述べた手法を適用した例を示す。図 3 や表 2, 3 で示されたように、 $n = 8$  の場合、N225 IV に当てはめたエルミート展開は、負の確率密度の影響が大きく、近似としての実用性を欠いていた。そこで、 $n = 8$  として、各種近似の結果を比べることによって 2 乗ラゲール展開や最適化がエルミート展開の脆弱性を補い得るのか否かを検討することができる。

これらの図表からわかることをまとめると次のとおりである。

- 図 5 を見ると、最適化されたエルミート展開と 2 乗ラゲール展開による近似はほぼ単調増加で、負の確率密度の影響は最適化していないエルミート展開よりも改善している。実際に、表 5 を見ると、N225 IV に対する TAND の大きさは  $1/1000$  程度小さい。
- 図 4, 5 と、表 4 を見ると、エルミート展開を N225 IV に当てはめた場合以外、各種分布展開法による近似の精度の方が正規分布による近似の精度を上回ることがわかる。

これらの事実から、2 乗ラゲール展開や最適化の利用が、エルミート展開の脆弱性を補ううえで有用であり得ることが示された。

<sup>29</sup>この議論に関しては、Marumo (2007) の 3.2.1 や Marumo and Wolff (2007) を参照。

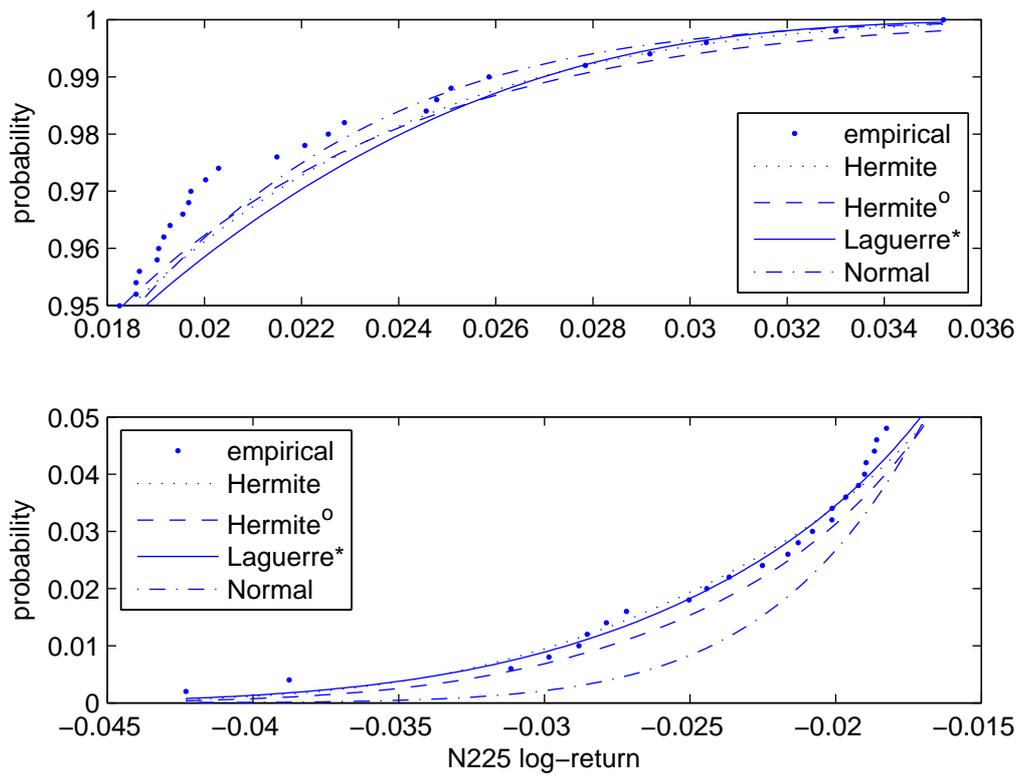


図 4: N225 の経験分布関数 ('empirical') と、エルミート展開 ('Hermite'), 最適化されたエルミート展開 ('Hermite<sup>o</sup>'), 2 乗ラゲール展開 ('Laguerre\*'), 正規分布 ('Normal') による近似の比較。展開の次数はすべて (12) 式中で  $n = 8$  とした。上図は右裾、下図は左裾を示す。分布全体の適合度や精度に関しては、表 4, 5 を参照。

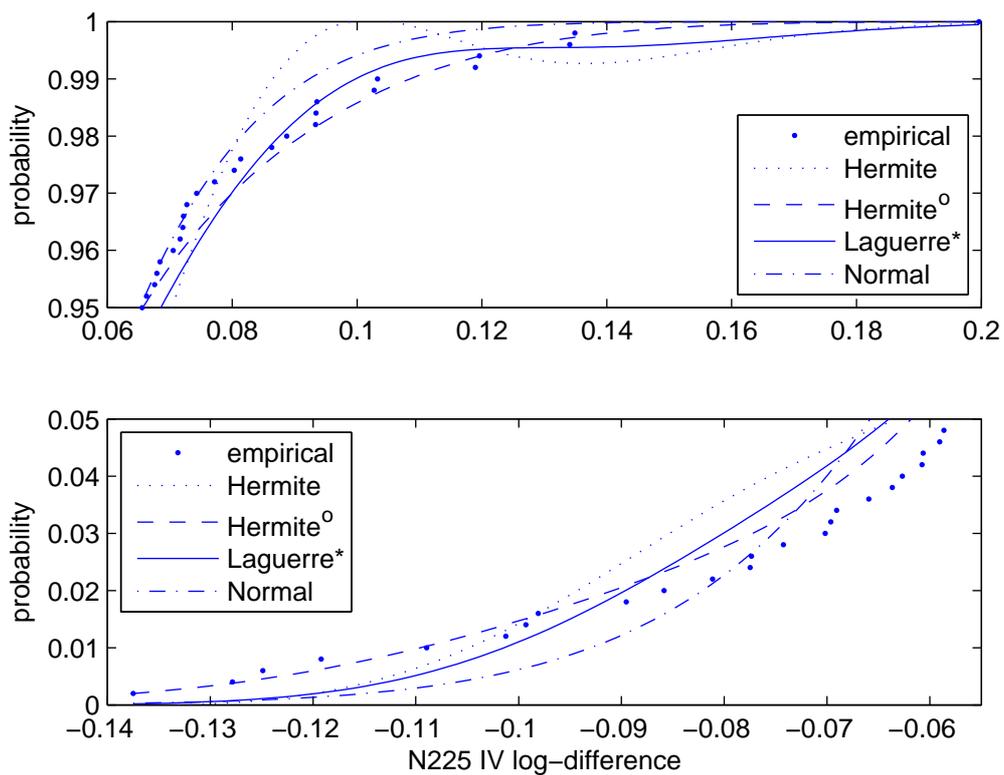


図 5: N225 IV の経験分布関数 ('empirical') と、エルミート展開 ('Hermite'), 最適化されたエルミート展開 ('Hermite<sup>0</sup>'), 2 乗ラゲール展開 ('Laguerre\*'), 正規分布 ('Normal') による近似の比較。展開の次数はすべて (12) 式中で  $n = 8$  とした。上図は右裾、下図は左裾を示す。分布全体の適合度や精度に関しては、表 4, 5 を参照。

( $\times 10^{-2}$ )	N225	N225 IV
Hermite	1.642	2.965
Hermite <sup>o</sup>	1.964	0.931
Laguerre*	1.579	1.359
正規分布	2.916	2.271

表 4: (21) 式で定義される RMSE。RMSE は、目標とするリスク・ファクターの経験分布と近似の差の尺度と考えられるので、この値が小さいほど近似が目標に近いことを示す。分布の裾の部分の適合については、図 4, 5 を参照。

	N225	N225 IV
Hermite	$1.106 \times 10^{-5}$	$8.010 \times 10^{-3}$
Hermite <sup>o</sup>	$6.504 \times 10^{-9}$	$1.046 \times 10^{-6}$
Laguerre*	$9.451 \times 10^{-6}$	$1.931 \times 10^{-6}$
正規分布	0	0

表 5: (22) 式で定義される TAND。TAND は、負の確率密度の影響の尺度と考えられ、この値が小さいほど負の確率密度の影響が小さい。分布の裾の部分の形状については、図 4, 5 を参照。

## 4.2 長期間のリスク計測への応用

まず、2.3 の議論を簡単に振り返る。リスク評価期間が長い場合のリスク・ファクターの分布の導出は容易ではない。一般的には、リスク評価期間が 1 日のリスク・ファクターの時系列  $\{X^1(t); t = 1, 2, \dots\}$  を使って、リスク評価期間  $T$  日のリスク・ファクター  $X^T$  を

$$X^T = X^1(1) + \dots + X^1(T) \quad (23)$$

表わすことができる。

$\{X^1(t)\}$  が、独立に同じ正規分布に従っていると仮定した場合には、 $X^T$  の分布を求めるために、

$$X^T - T\mu^1 \stackrel{D}{=} \sqrt{T}(X^1(1) - \mu^1) \quad (24)$$

を利用することができる。ただし、 $\mu^1 = E(X^1(1))$  である。

一方で、リスク・ファクターの経験分布を利用する HS 法に関しては、たとえ、 $\{X^1(t)\}$  が、独立に同じ分布に従っていると仮定した場合でも、(23) 式で表わされる  $X^T$  の分布を導出する合理的な手法は未だ提案されていないと思われる。

この問題に対して、分布展開法を利用すると、 $\{X^1(t)\}$  が、リスク・ファクターの経験分布に独立に従っていると仮定した場合の  $X^T$  の分布を近似し得る。3 節で示したように、 $\{X^1(t)\}$  が、独立に同じ分布に従う場合には、(8) 式によって  $X^T$  の積率は  $X^1(1)$  の積率を使って表わされるので、分布展開法により  $X^T$  の分布が近似される。この手法は、 $X^1(1)$  の分布に依存しないので、 $X^1(1)$  の分布を、リスク・ファクターの標本の経験分布と仮定することができるのである。

より具体的には、次のように説明される。リスク評価期間を 1 日とした場合のリスク・ファクターの一連の標本から、その積率を、例えば 3.1 の (5) 式を使って推定し、(8) 式によって

リスク評価期間を  $T$  日とした場合のリスク・ファクターの分布の積率が得られる。3.2 と 3.3 で解説した分布展開法をこの積率を当てはめると、リスク評価期間を  $T$  日とした場合のリスク・ファクターの分布の近似が得られる。

リスク・ファクターの系列独立を仮定しない場合には、その系列依存関係を、何らかのモデルを使う等して特定する必要がある。さらに、特定された系列依存関係から自己交差積率を算出し、(7) 式を使って  $X^T$  の積率を算出し、分布展開法を適用する。

以上が、分布展開法の、長期間のリスク計測への応用である。目標となる  $X^T$  の分布が利用可能でないため、この近似法の精度を、4.1 と同様の手法で検証することはできないが、積率が算出された後の計算過程に大きな違いはないので、4.1 で示した例と同程度の精度を持っていることを期待することができる。

ここでは、リスク・ファクターが経験分布に独立に従っていると仮定した場合に、 $X^T$  の分布を近似した数値計算例を示すとともに、次のような分析を試みる<sup>30</sup>。

2.4 では、現行の手法が採用している、 $X^T$  の分布を導出するための (必ずしも合理的でない) 便宜的な方法を幾つか紹介した。これらのうち、リスク・ファクターが正規分布に独立に従うと仮定する方法と、リスク・ファクターの経験分布を (24) 式のいわゆる  $\sqrt{T}$  則で調整する方法の 2 つに注目する。分布展開法を使った  $X^T$  の分布の近似の精度が、これら 2 つの便宜的な方法のものよりも高いと考えるならば、分布展開法による近似にどれだけ近いかによって、これらの便宜的な手法に優劣をつけることができる。

図 6, 7 に、 $X^T$  の分布に対する 3 つの近似の分布関数の裾の部分を示す。ただし、 $T = 10$  日とした。図中、‘Hermite<sup>o</sup>’ は、 $X^T$  の分布を、最適化されたエルミート展開で近似したものである。‘Hermite<sup>o</sup>(S)’ は、 $X^1(1)$  の経験分布を最適化されたエルミート展開で近似したものに、(24) 式の  $\sqrt{T}$  則を当てはめたもので、‘Normal’ は正規分布による近似である。

‘Hermite<sup>o</sup>(S)’ において、 $X^1(1)$  の経験分布に直接 (24) 式を当てはめない理由は、分布同士の比較を容易にするためである。すなわち、2 つの分布  $f_a$  と  $f_b$  がそれぞれ

$$\hat{f}_a(x) = \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \frac{1}{\sigma} \sum_{k=0}^n C_k^a \text{He}_k\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

と

$$\hat{f}_b(x) = \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \frac{1}{\sigma} \sum_{k=0}^n C_k^b \text{He}_k\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right),$$

のようにエルミート展開で近似されたとしよう。このときこれら 2 つの近似の距離 (Integrated Squared Error, ISE) を

$$\text{ISE} = \int_S \frac{\left\{ \hat{f}_a(u) - \hat{f}_b(u) \right\}^2}{\phi\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right) \frac{1}{\sigma}} du = \sum_{k=1}^n (C_k^a - C_k^b)^2. \quad (25)$$

で定義することができる。正規分布による近似が 2 次のエルミート展開と同値であることを考えると、この距離は、‘Hermite<sup>o</sup>’ と、‘Hermite<sup>o</sup>(S)’、‘Normal’、の 3 つ間すべてについて計算できる。‘Hermite<sup>o</sup>’ と ‘Hermite<sup>o</sup>(S)’ の距離と、‘Hermite<sup>o</sup>’ と ‘Normal’ の距離を比較す

<sup>30</sup> リスク・ファクターに系列依存を仮定する場合へ分布展開法を応用した数値計算例は、Marumo (2007) の Chapter 4 や Marumo and Wolff (2007) を参照。

ることで、 $\sqrt{T}$  則と正規近似のどちらが  $X^T$  の分布に近いのかを議論することができる。算出された距離を表 6 に示した。

これらの図表からわかることをまとめると以下のとおりである。

- 図 6, 7 からは、正規分布による近似の方が  $\sqrt{T}$  則による調整よりも  $X^T$  の分布に近いことがわかる。表 6 でも、正規分布による近似の方が  $X^T$  の分布に近いことが示唆されている。これは、系列独立を仮定したために中心極限定理が働いていることによるものと考えられる。
- $\sqrt{T}$  則による調整は、例えば 99%点や 1%点等、分布の裾の部分を過大評価している。

$X^T$  の分布が正規分布に近いことの理由としては、系列独立を仮定したことにより中心極限定理が働いたことが考えられる。すなわち、リスク・ファクターの系列独立を仮定すると、 $X^T$  は、 $T$  個の独立な確率変数の和であり、中心極限定理により  $T \rightarrow \infty$  において  $X^T$  の分布は正規分布に収束する。この数値計算例では、 $T = 10$  程度でも中心極限定理の影響が表れ、 $X^T$  の分布が正規分布に近くなったものと考えられる。

これらのことは、ここで述べてきた設定の下で得られた分析の例であり、一般的に正規分布による近似の方が、経験分布を  $\sqrt{T}$  則で調整する方法よりも正確であることを示すものではない。ただし、こうした分析手法自体は、この例で示した以外の場合にも有効であると思われる。

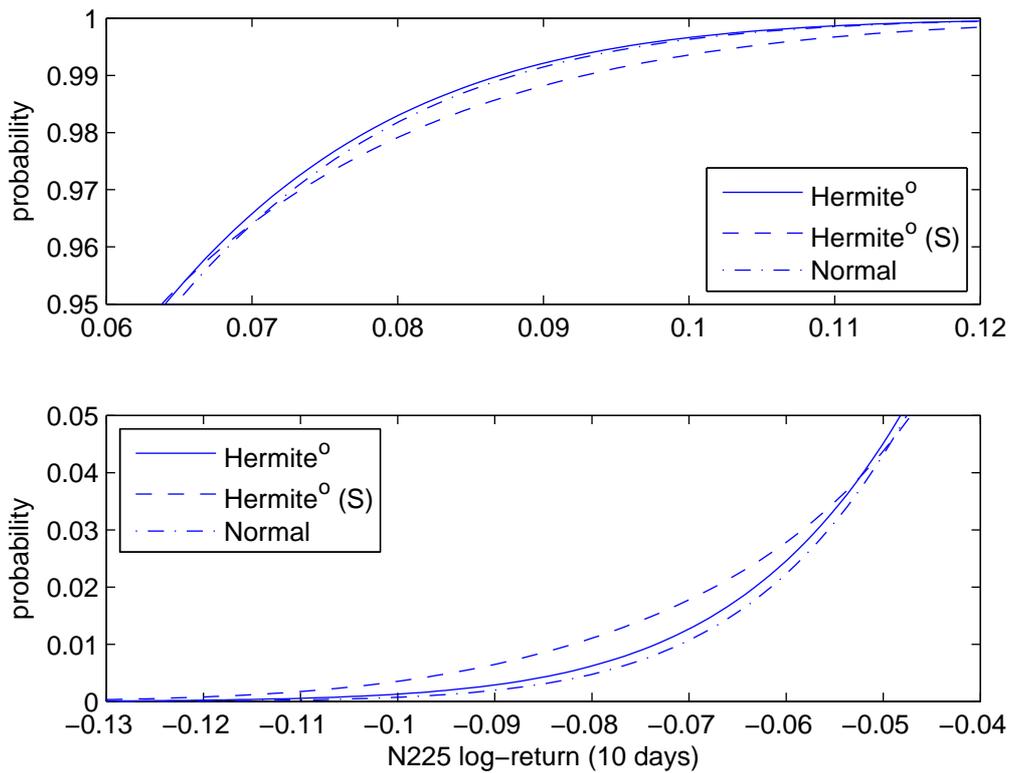


図 6: リスク評価期間を 10 日とした場合の N225 の分布関数の近似。‘Hermite<sup>0</sup>’ は、 $X^T$  の分布を最適化されたエルミート展開で近似したものである。‘Hermite<sup>0</sup>(S)’ は、 $X^1(1)$  の経験分布を最適化されたエルミート展開で近似したものに、(24) 式の  $\sqrt{T}$  則を当てはめたもので、‘Normal’ は正規分布による近似である。展開の次数は、(12) 式において  $n = 8$  とした。上図は右裾、下図は左裾を表わす。

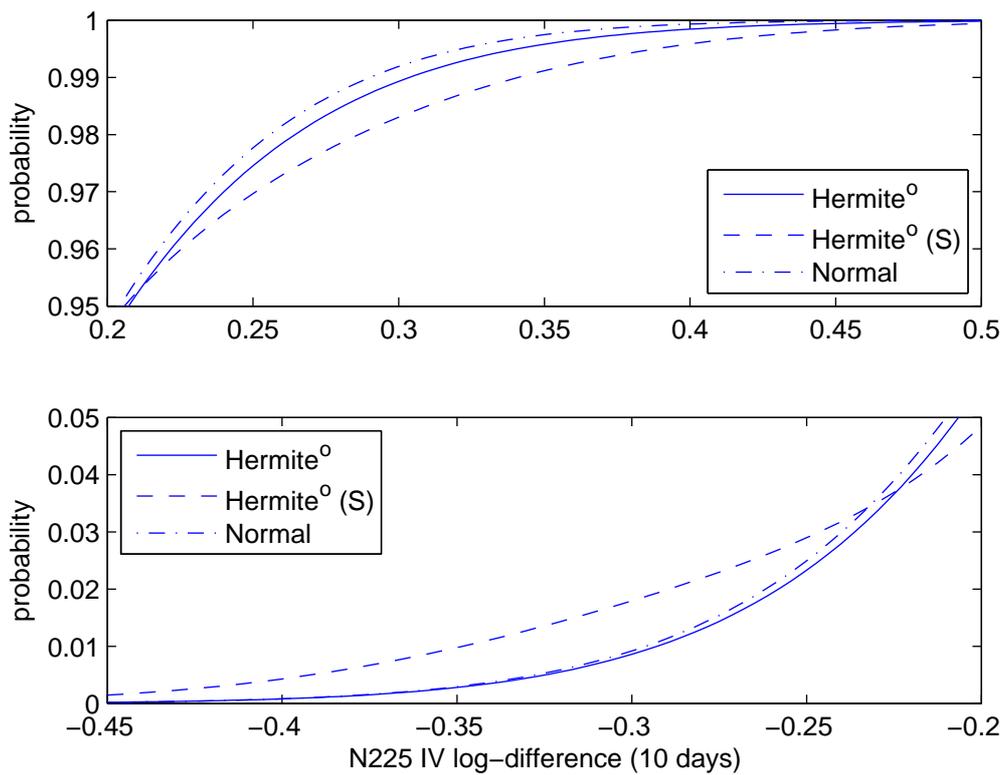


図 7: リスク評価期間を 10 日とした場合の N225 IV の分布関数の近似。‘Hermite<sup>0</sup>’ は、 $X^T$  の分布を最適化されたエルミート展開で近似したものである。‘Hermite<sup>0</sup>(S)’ は、 $X^1(1)$  の経験分布を最適化されたエルミート展開で近似したものに、(24) 式の  $\sqrt{T}$  則を当てはめたもので、‘Normal’ は正規分布による近似である。展開の次数は、(12) 式において  $n = 8$  とした。上図は右裾、下図は左裾を表わす。

( $\times 10^{-2}$ )	N225	N225 IV
$\sqrt{T}$ 則	2.360	6.656
正規近似	0.132	0.361

表 6: (25) 式で定義される ISE の比較。‘ $\sqrt{T}$  則’ は ‘Hermite<sup>o</sup>’ と ‘Hermite<sup>o</sup>(S)’ の距離を、‘正規近似’ は ‘Hermite<sup>o</sup>’ と ‘Normal’ の距離をそれぞれ示す。図 6, 7 参照。

### 4.3 複数のリスクの合算

3 節では、リスク・ファクターの積率と交差積率からポートフォリオの損益分布の近似を算出する方法を紹介した。ここでは、ヨーロピアン・コール・オプションのロング・ポジションに伴う市場リスクを例にとり、この方法を使った数値計算例を示す。

オプション自体は単一の金融資産と考えることができるが、そのポジションの現在価値は、原資産価格の変動のほか、インプライド・ボラティリティの変化等複数のリスク・ファクターの影響を受ける。加えて、リスク・ファクターとポジションの現在価値の関係が非線形であることが知られている。これらの特性から、ヨーロピアン・コール・オプションのリスク計測は、3 節で述べた方法を試すための好例といえる。

また、この数値計算例では、HS 法も利用可能となるようにリスク評価期間を 1 日とする。このように設定することにより、分布展開法がどの程度上手く HS 法による損益分布を近似することができるのかを観察することが可能になる。分布展開法による近似が HS 法による損益分布に近ければ、その分だけ分布展開法は HS 法の利点を受け継いでいるといえる。3 節や 4.2 では、分布展開法の適用可能な範囲が HS 法のものより広いことを示したが、ここで行うような HS 法との比較は、分布展開法による近似の精度を検討するという意味がある。

#### 4.3.1 ブラック・ショールズの公式

Black and Scholes (1973) によると、満期  $\tau > 0$  のヨーロピアン・コール・オプションのロング・ポジションの現在価値  $c$  は

$$c = S\Phi(d_1) - Ke^{-r\tau}\Phi(d_1 - \sigma\sqrt{\tau}) \quad (26)$$

と表わされる。ただし、 $\Phi$  は標準正規分布の分布関数、

$$d_1 = \frac{\log(S/K) + r\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} + \frac{\sigma\sqrt{\tau}}{2},$$

$S \geq 0$  は原資産価格、 $K \geq 0$  はオプションの権利行使価格、 $r \geq 0$  は連続複利の無リスク金利、 $\sigma \geq 0$  は原資産のインプライド・ボラティリティ (IV) である。これをブラック・ショールズの公式と呼ぶ。

ブラック・ショールズの公式に関連して、次の 3 つの定数を定義する。

デルタ (26) 式の  $S$  による 1 階微分をデルタと呼び、

$$\delta = \frac{\partial c}{\partial S} = \Phi(d_1)$$

と表記する。

ガンマ デルタと同様に、(26) 式の  $S$  による 2 階微分をガンマと呼び、

$$\gamma = \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} = \phi(d_1) \frac{1}{\sigma S \sqrt{\tau}}$$

と表記する。ただし、 $\phi$  は標準正規分布の確率密度関数である。

ベガ (26) 式の  $\sigma$  による 1 階微分をベガと呼び、

$$\kappa = \frac{\partial c}{\partial \sigma} = S \sqrt{\tau} \phi(d_1)$$

と表記する。

#### 4.3.2 ヨーロピアン・コール・オプションの損益分布

リスク計測の対象となるポートフォリオが、ヨーロピアン・コール・オプション (3ヶ月物, ATM) のロング・ポジションのみからなっていると考えよう。このポートフォリオの損益分布を求めるために、2.2 の手順を当てはめる。

##### i. リスク評価期間の設定

$T = 1$  日とする。4.2 の議論を適用すれば、分布展開法を利用することによって、より長いリスク評価期間を考えることもできるが、 $T = 1$  日とすることにより分布展開法による近似と HS 法の比較が可能となる。

##### ii. リスク・ファクター及びリンク関数の特定

原資産収益率と、IV の変化率の 2 つをリスク・ファクターとする。すなわち、現在の原資産価格を  $S_0$ 、1 日後の原資産価格を  $S_1$  として、

$$X = \log S_1 - \log S_0$$

で定義される  $X$  と、IV の現在の値と 1 日後の値  $\sigma_0, \sigma_1$  について同様にして

$$\nu = \log \sigma_1 - \log \sigma_0$$

で定義される  $\nu$  をリスク・ファクターとする<sup>31</sup>。

これらのリスク・ファクターと、ポートフォリオの損益の関係は、(26) 式を使って

$$z = d(X, \nu) = c(S_0 e^X, \sigma_0 e^\nu) - c(S_0, \sigma_0) \quad (27)$$

で定式化される。

##### iii. リスク・ファクターのモデル化及びパラメータ推定

$(X, \nu)$  の標本から得られる経験分布を利用する。リスク・ファクターの標本は、4.1、4.2 で利用したものと同じである。標本の概要は表 1 参照。

##### iv. ポートフォリオの損益分布の導出

分布展開法と、正規分布による近似、HS 法で算出し、これらを比較する。

<sup>31</sup>厳密には、無リスク金利の変動や時間の経過もオプションの損益に影響を与えるが、この計算例では無視する。

### 4.3.3 リンク関数のテーラー近似とその精度

3節で述べたように、リスク・ファクターの積率と交差積率から分布展開法による近似を構成するためには、リンク関数のテーラー近似が必要である。

なお、ポートフォリオの損益分布の連続な近似を得ることだけが目的であれば、このようなテーラー近似を考える必要はない。すなわち、近似する前の  $d$  に標本  $(X^{(i)}, \nu^{(i)})$ ,  $i = 1, \dots, N$  を代入して得られた  $N$  個の損益の標本から、(5) 式を使って損益分布の積率を求め、これに分布展開法を当てはめることができる。ただし、ここで行うようにテーラー近似を考えることによって、分布展開法による近似が、リスク・ファクターの積率と交差積率から構成され、分布展開法の適用可能な範囲が広がることになる。リスク・ファクターがモデルで与えられている場合や、4.2 で議論した、リスク評価期間が長い場合等がこの例である。

ここでは、まず次の3つの近似:

- デルタ-ガンマ近似

$$d_{\delta\gamma}(X, \nu) = \delta S_0 X + \frac{1}{2}(\delta S_0 + \gamma S_0^2) X^2$$

- デルタ-ベガ近似

$$d_{\delta\kappa}(X, \nu) = \delta S_0 X + \kappa \sigma_0 \nu$$

- デルタ-ガンマ-ベガ近似

$$d_{\delta\gamma\kappa}(X, \nu) = \delta S_0 X + \frac{1}{2}(\delta S_0 + \gamma S_0^2) X^2 + \kappa \sigma_0 \nu$$

を考える。

これらの近似の精度を検討するために、2乗平均誤差を

$$\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (d(X^{(i)}, \nu^{(i)}) - d_*(X^{(i)}, \nu^{(i)}))^2} \quad (28)$$

で定義する。ただし、 $(X^{(i)}, \nu^{(i)})$ ,  $i = 1, \dots, N$  は観測された標本、 $d$  は、(27) 式で定義されるリンク関数、 $d_*$  は上述の3つのテーラー近似のうちの1つである。

日経平均を原資産とするヨーロピアン・コール・オプション(3ヶ月物, ATM) についてこの2乗平均誤差を算出した結果を表7に示す。図8は、(27) 式の  $d$  に  $(X^{(i)}, \nu^{(i)})$ ,  $i = 1, \dots, N$  を代入して得られた損益の経験分布('full evaluation') と、 $d$  の代わりにテーラー近似を用いて同様に得られた損益の経験分布の裾の部分の比較である。

これらの図表から、デルタ-ガンマ-ベガ近似は、元のリンク関数をよく近似しており、より高次の項を追加しても、近似精度の大幅な向上は見込めないことがわかる。したがって、この数値計算例では、分布展開法を適用するためにデルタ-ガンマ-ベガ近似を用いる。

2乗平均誤差	
$\delta\gamma$	20.02
$\delta\kappa$	10.71
$\delta\gamma\kappa$	0.93

表 7: (27) 式のリンク関数と、3つのテーラー近似の2乗平均誤差。2乗平均誤差の定義は(28)式を参照。ギリシャ文字は、各近似に含まれる項を表わす。

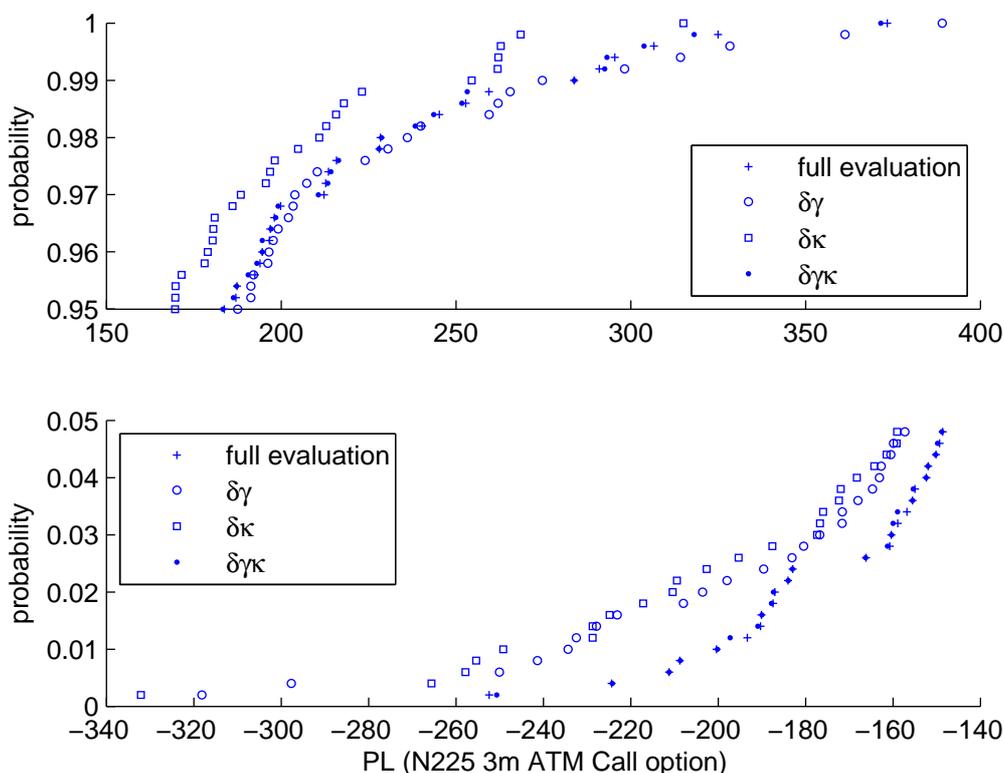


図 8: (27) 式の  $d$  に  $(X^{(i)}, \nu^{(i)})$ ,  $i = 1, \dots, N$  を代入して得られた損益の経験分布 ('full evaluation') と、 $d$  の代わりにテーラー近似を用いて同様に得られた損益の経験分布の裾の部分の比較。リスク・ファクター  $(X, \nu)$  はそれぞれ、日経平均の日次収益率と、日経平均を原資産とするヨーロッパン・コール・オプション (3ヶ月物, ATM) の IV の日次変化率とした。ギリシャ文字は、近似に含まれる項を表わす。上図は右裾、下図は左裾を示す。なお、'full evaluation' は、HS 法による損益分布である。

#### 4.3.4 損益分布の近似

以上の議論をまとめて、日経平均を原資産とするヨーロッパ・コール・オプション (3ヶ月物, ATM) の、リスク評価期間1日の損益分布を算出した。図9に分布関数の裾の部分を、表8に分布の裾の統計量をそれぞれ示す。表9には、(21)式で定義される RMSE と、(22)式で定義される TAND を示す。

これらの図表からは以下のことがわかる。

- 図9からは、各種分布展開による近似の裾の部分は互いに近く、かつHS法による損益分布を正規分布による近似よりも上手く近似している様子がわかる。表8で確率点や条件付期待値を比べても、分布展開法による近似の方が正規近似よりもHS法による損益分布に近い。
- 表9のRMSEを見ると、分布全体の適合度も分布展開法による近似の方が高いことがわかる。また、TANDは大きいものでも $10^{-4}$ のオーダーで、負の確率密度の影響は大きくないといえる。

以上のことから、分布展開法は、HS法による損益分布を近似するための有効な手段であるといえる。正規分布による近似よりも精度が高いことから、分布展開法が、正規分布では捉えきれないようなリスク・ファクターの分布の特性や、ポートフォリオの非線形性を捉えていることもわかる。

	確率 0.01		0.99	
	Q	CE	Q	CE
full evaluation	-178.2	-193.1	267.8	286.5
$\delta\gamma\kappa$ approx.	-177.3	-190.1	265.6	284.3
Hermite	-176.9	-200.8	249.5	281.7
Hermite <sup>o</sup>	-172.0	-192.1	247.5	281.5
Laguerre*	-176.0	-207.7	250.1	284.3
Normal	-191.0	-220.6	216.1	245.7

表8: 日経平均を原資産とするヨーロッパ・コール・オプション (3ヶ月物, ATM) の、HS法による損益分布関数 ('full evaluation') と、デルタ-ガンマ-ベガ近似を利用した経験分布関数 (' $\delta\gamma\kappa$ ') およびこれに対する4つの近似 ('Hermite', 'Hermite<sup>o</sup>', 'Laguerre\*', 'Normal'); 凡例の意味は図4, 5と同じ) の確率点(Q)とそれを超える条件付期待値(CE)。分布展開の次数は、(12)式において $n=8$ とした。Qの絶対値はVaRに対応し、CEの絶対値はESに対応する

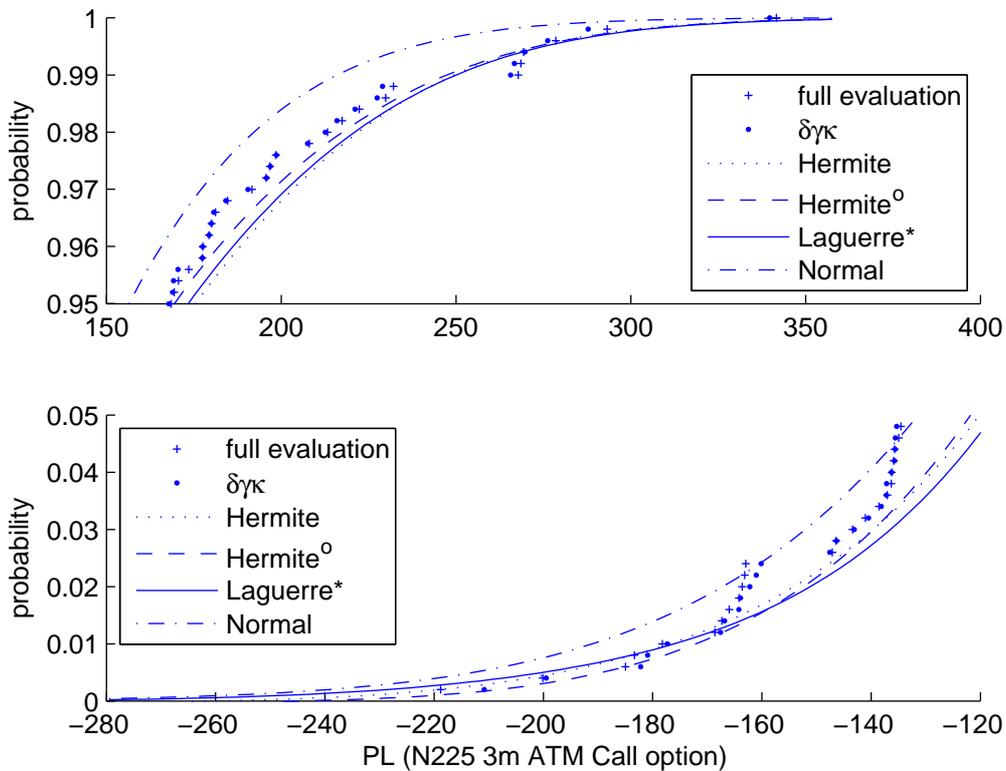


図 9: 日経平均を原資産とするヨーロッパン・コール・オプション (3ヶ月物, ATM) の、HS 法による損益分布関数 ('full evaluation') と、デルタ-ガンマ-ベガ近似を利用した経験分布関数 (' $\delta\gamma\kappa$ ') およびこれに対する 4 つの近似 ('Hermite', 'Hermite<sup>0</sup>', 'Laguerre\*', 'Normal'; 凡例の意味は図 4, 5 と同じ) の裾の部分。なお、2 つの経験分布は図 8 と同じ。分布展開の次数は、(12) 式において  $n = 8$  とした。上図は右裾、下図は左裾を示す。

	RMSE ( $\times 10^{-2}$ )	$f^-$ ( $\times 10^{-4}$ )
Hermite	1.721	1.671
Hermite <sup>0</sup>	2.255	2.048
Laguerre*	1.841	0.022
Normal	3.425	0

表 9: (21) 式 で定義される RMSE と、(22) 式 で定義される TAND( $f^-$ )。分布は、図 9 のものと同じ。分布展開の次数は、(12) 式において  $n = 8$  とした。

## 4.4 数値計算例のまとめと考察

4.1で、分布展開法がリスク・ファクターの経験分布を近似し得ることを示し、4.2で、分布展開法がリスク評価期間が長い場合にも対処することができることを示した。また、4.3では、分布展開法が、HS法による損益分布を近似し得ることがわかった。また、各数値計算例を通して、3.3で導入した工夫が、エルミート展開の脆弱性を補う上で有効であることも示された。

以上のことから、分布展開法は、HS法の長所も受け継ぎつつ、HS法による対処が困難な場合にも適用可能な手法であることがわかった。

4.3の例では、分布展開法が、HS法による損益分布をある程度の精度で近似できた。これは、遡って考えれば、リスク・ファクターの同時分布の主な情報がリスク・ファクターの積率と交差積率に含まれていることを示唆している。この考えをもう一步進めれば、リスク・ファクターの積率と交差積率から、同時分布の近似を得る多変量分布展開法の可能性へのヒントになる。次節では、多変量分布展開法とその応用について述べる。

## 5 多変量分布展開法とその応用

2.2で述べたように、ポートフォリオが複数のリスク・ファクターを含むような場合には、リスク計測にそれらの同時分布の情報を取り入れる必要がある。ただし、2.3で見たように、同時分布のこうした扱いは容易ではない。2.4で主な現行手法を振り返ったが、これらは、扱いが比較的容易である多変量正規分布を利用するものか、リスク・ファクターの標本が与えられた場合にその経験分布を利用するものか、のいずれかであった。多変量正規分布の利用は、簡便さの面で利点が多いものの、分布の重い裾や、共分散以外の相互依存関係といった、市場でしばしば観測されるような、リスク・ファクターの分布が持つと思われる性質を無視してしまう。リスク・ファクターの経験分布を利用すると、リスク・ファクターの同時分布の性質を自然な形でリスク計測に取り入れることが可能であるが、定義により経験分布は離散的であり、リスク・ファクターの同時密度関数が利用可能でない。

3節で解説した方法では、ポートフォリオの損益分布を算出する際に、リスク・ファクターの交差積率の演算と分布展開法を利用することによって、リスク・ファクターの同時密度関数を直接扱うことを避けることが可能であった。ただし、リスク・ファクターの同時密度関数は、リスク・ファクター間の相互依存関係の視覚的イメージを与える等、それ自身有用である場合がある。本節では、分布展開法が多変量への拡張を考え、同時密度関数を近似する方法を検討し、その応用例を示す<sup>32</sup>。

まず、5.1から5.3で2変量の場合の分布展開法とその応用について解説し、数値計算例を示す。5.4で、一般の多変量の分布展開について解説する。

### 5.1 2変量の分布展開

4節までの議論によれば、積率には、個々の確率変数の周辺分布の情報が含まれており、交差積率には複数の確率変数間の相互依存関係の情報が含まれている。3.2では、1つの確率変

<sup>32</sup>この分野では、Mauleón and Perote (2000) が、共分散を取り入れた2変量のエルミート展開を紹介しているが、より一般的な多変量の分布展開法が最初に導入されたのは Marumo (2007) においてであると思われる。

数の積率からその確率密度関数の近似を得る方法を解説したが、ここでは、2つの確率変数の積率と交差積率からそれらの同時密度関数を近似する方法を検討する。

### 5.1.1 基本形

定義域  $S \times S$  を持つ2つの確率変数  $(X, Y)$  の同時密度関数を  $f$  とする。実数  $y \in S$  に対し、 $Y = y$  という条件の下での  $X$  の確率密度関数は

$$f(x|Y = y) = \frac{f(x, y)}{\int_S f(u, y) du}$$

で定義される。これは、1変量の確率密度関数であるので、3.2の議論が適用可能である。この条件付確率密度関数が、(10)式, (11)式を使って

$$f(x|Y = y) = w(x) \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x) \int_S f(u|Y = y) g_k(u) du$$

のように表わされたと仮定しよう。この両辺に  $\int_S f(u, y) du$  を乗じると

$$f(x, y) = w(x) \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x) \int_S f(u, y) g_k(u) du \quad (29)$$

が得られる。これは、 $f(x, y)$  の  $x$  に関する展開である。同様にして、 $f(x, y)$  を  $y$  に関して展開すると

$$f(x, y) = w(y) \sum_{l=0}^{\infty} g_l(y) \int_S f(x, v) g_l(v) dv \quad (30)$$

が得られる。(29)式の右辺の積分の中に(30)式を代入すると、同時密度関数の展開が

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x) \int_{u \in S} w(y) \sum_{l=0}^{\infty} g_l(y) \int_{v \in S} f(u, v) g_l(v) dv g_k(u) du \\ &= w(x) w(y) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} E(g_k(X) g_l(Y)) g_k(x) g_l(y) \end{aligned} \quad (31)$$

のように得られる。 $g_k$  が多項式であることから、 $E(g_k(X) g_l(Y))$  は、 $X$  と  $Y$  の積率および交差積率の線形和である。

3.2と同様に、 $X$  と  $Y$  の積率および交差積率  $E(X^p Y^q)$ ,  $p = 0, \dots, n$ ,  $q = 0, \dots, n$  が与えられた場合に、(31)式の無限和を有限和

$$\hat{f}(x, y) = w(x) w(y) \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n E(g_k(X) g_l(Y)) g_k(x) g_l(y) \quad (32)$$

で近似することが考えられる。 $X$  と  $Y$  の展開の次数は必ずしも一致している必要がないが、本稿では、単純のために同一の値  $n$  とする。また、(32)式を得るために、単一の正規直交多項式系  $(w, \{g_k\})$  を使ったが、 $X$  と  $Y$  に当てはめる展開法が必ずしも同一である必要がな

いことも明らかである。例えば、 $(w', \{g'_k\})$  を  $(w, \{g_k\})$  とは別の正規直交多項式系として、必ずしも  $n = n'$  でない  $n'$  に対し

$$\hat{f}(x, y) = w(x)w'(y) \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{n'} E(g_k(X)g'_l(Y))g_k(x)g'_l(y)$$

等のような近似を考えることもできるが、本稿では扱わない。

### 5.1.2 2変量分布展開法に関する工夫

(32) 式は、2変量の同時密度関数に、(12) 式の1変量の分布展開法を2回適用することで得られた。したがって(32) 式は、3.3 で述べた、(12) 式による近似の脆弱性という問題をそのまま引き継いでいる。そこで、1変量の場合と同様に、2変量の近似に対しても、(32) 式による近似の脆弱性を補うための3つの工夫: 「基準化」、「ラゲール展開の利用」、「最適化」を考えることができる。ただし、本稿では2変量の場合の「ラゲール展開の利用」に関しては述べないので、これについては Marumo (2007) の Chapter 6 を参照されたい。

**基準化** 3.3 と同様に、2次までの積率が重み付け関数のものと一致するように変数  $(X, Y)$  を変換する。1変量の場合との大きな違いは、ここでは交差積率項  $E(XY)$  が存在することである。(32) 式を見ると、2変量の展開の重み付け関数は  $w(x)w(y)$  であるが、これは、独立な2つの確率変数の同時密度関数と考えることができる。このことから、変換後の変数の共分散が零になるように  $(X, Y)$  の変換を行うべきであることがわかる。例えば、

$$\gamma = -\frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{E(X^2) - \{E(X)\}^2}$$

として、 $Z = \gamma X + Y$  と置くと、 $\text{Cov}(X, Z) = 0$  であるので、 $(X, Z)$  の2変量を考えればよい。

残りの積率は、1変量の場合と同様にして一致させることができる。すなわち、エルミート展開については、 $\mu_X = E(X)$ ,  $\sigma_X^2 = E(X^2) - \mu_X^2$ ,  $\mu_Z = E(Z)$ ,  $\sigma_Z^2 = E(Z^2) - \mu_Z^2$  として、 $X' = (X - \mu_X)/\sigma_X$  と  $Z' = (Z - \mu_Z)/\sigma_Z$  に対して2変量の展開法を当てはめ、 $(X', Z')$  の同時密度関数の近似  $\hat{f}_{X'Z'}$  を得る。 $f$  の近似は

$$\hat{f}(x, y) = \hat{f}_{X'Z'} \left( \frac{x - \mu_X}{\sigma_X}, \frac{\gamma x + y - \mu_Z}{\sigma_Z} \right) \frac{1}{\sigma_X \sigma_Z}$$

で与えられる<sup>33</sup>。

このような基準化の下では、 $k + l = 1, 2$  に対し、 $E(g_k(X)g_l(Y)) = 0$  が成り立つ。

**最適化** 3.3 と同様に、 $N$  個の独立な標本  $(x^{(i)}, y^{(i)})$ ,  $i = 1, \dots, N$  が観測された場合を考える。さらに、 $(X, Y)$  の同時密度関数  $f$  が

$$f(x, y) = w(x)w(y) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} C_{kl}^{XY} g_k(x)g_l(y)$$

<sup>33</sup>ラゲール展開の基準化については Marumo (2007) の Chapter 6 を参照。

のように表わされると仮定する。ただし、 $C_{kl}^{XY} = E(g_k(X)g_l(Y))$  と置いた。

$\hat{C}_{kl}^{XY} = N^{-1} \sum_{i=1}^N g_k(x^{(i)})g_l(y^{(i)})$  とすると、 $E(\hat{C}_{kl}^{XY}) = C_{kl}^{XY}$  である。ここでも、係数  $\alpha_{kl} \geq 0, k = 0, 1, \dots, n, l = 0, 1, \dots, n$  を使った近似

$$\hat{f}(x, y) = w(x)w(y) \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n \alpha_{kl} \hat{C}_{kl}^{XY} g_k(x)g_l(y)$$

を考え、重み付けされた期待 2 乗積分誤差 (MISE)

$$E \left( \int_S \int_S \frac{\{\hat{f}(u, v) - f(u, v)\}^2}{w(u)w(v)} dudv \right) \quad (33)$$

が最小になるように係数  $\alpha_{kl} \geq 0$  を調整する。(33) 式は

$$\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n \alpha_{kl}^2 E \left( (\hat{C}_{kl}^{XY})^2 \right) - 2 \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n \alpha_{kl} (C_{kl}^{XY})^2 + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} (C_{kl}^{XY})^2$$

と等しく、この不偏推定量は

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n \alpha_{kl}^2 (\hat{C}_{kl}^{XY})^2 - 2 \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n \alpha_{kl} \frac{N(\hat{C}_{kl}^{XY})^2 - (\hat{B}_{kl}^{XY})^2}{N-1} \\ + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{N(\hat{C}_{kl}^{XY})^2 - (\hat{B}_{kl}^{XY})^2}{N-1} \end{aligned} \quad (34)$$

で与えられる。ただし、 $(\hat{B}_{kl}^{XY})^2 = N^{-1} \sum_{i=1}^N (g_k(x^{(i)})g_l(y^{(i)}))^2$  と置いた。ここでも、3.3 と同様、 $\int_S \int_S \hat{f}(u, v) dudv = 1$  が満たされるために、 $\alpha_{00} = 1$  が必要となる。また、 $k+l = 1, 2$  では  $\alpha_{kl} = 0$  とすることができる。 $k+l \geq 3$  では、 $N(\hat{C}_{kl}^{XY})^2 - (\hat{B}_{kl}^{XY})^2 > 0$  の場合は、

$$\alpha_{kl} = \frac{N(\hat{C}_{kl}^{XY})^2 - (\hat{B}_{kl}^{XY})^2}{(N-1)(\hat{C}_{kl}^{XY})^2},$$

それ以外の場合は、 $\alpha_{kl} = 0$  とすると (34) 式が最小になる。

### 5.1.3 数値計算例

基準化および最適化が施されたエルミート展開を、2 変数のリスク・ファクター (N225, N225 IV) に当てはめた例を図 10 に示す。展開の次数は、(32) 式中で  $n = 8$  とした。これらのリスク・ファクターは、4 節で利用したものと同じである<sup>34</sup>。

これを見ると、観測値が集中している部分の確率密度が高くなっている等、確率密度関数の近似として、2 変数のエルミート展開には違和感がないことがわかる。また、分布の非対称性等、多変量正規分布では捉えきれない観測値の特徴を、エルミート展開による近似が捕らえている点も興味深い。

<sup>34</sup>詳細は表 1 参照。

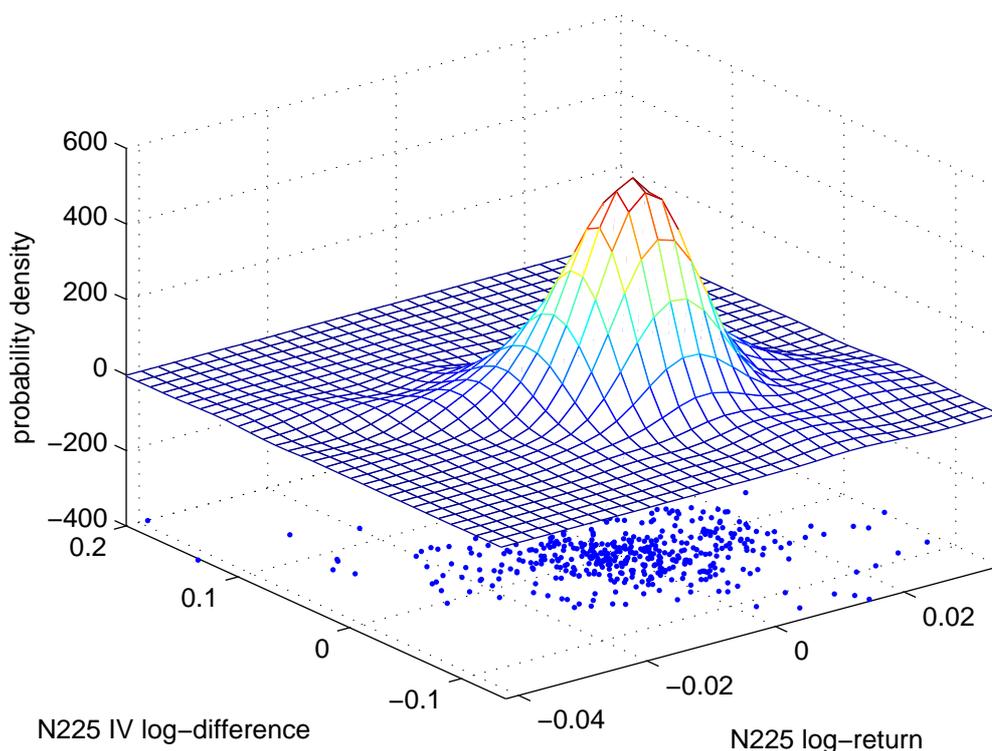


図 10: 2 変量のエルミート展開を (N225, N225 IV) の標本に当てはめたもの。基準化および最適化が施されている。展開の次数は、(32) 式中で  $n = 8$  とした。観測された (N225, N225 IV) の標本は、高度  $-400$  の平面に散布されている。標本に関しては、4 節の表 1 を参照。

## 5.2 条件付期待値と分布展開法

ここでは、分布展開法を応用して、2 変量の確率変数の条件付期待値が有理関数で近似できることを示す。ここでいう条件付期待値とは、2 変量のうち片方の変数の値が決められたという条件の下での他方の変数の期待値を意味する。

ここでの近似も、もとの確率変数の積率と交差積率から得られる。

### 5.2.1 基本形

5.1 から引き続き、2 変量  $(X, Y)$  を考える。 $q = 0, 1, \dots$  に対し、 $X = x$  で条件付けした  $g_q(Y)$  の期待値を  $E(g_q(Y)|X = x)$  とすると、これは

$$E(g_q(Y)|X = x) = \frac{\int_{\mathcal{S}} g_q(y) f(x, y) dy}{\int_{\mathcal{S}} f(x, y) dy}$$

で定義される。この右辺の  $f$  に (31) 式の展開を当てはめると、

$$\begin{aligned} E(g_q(Y)|X = x) &= \frac{\int_{\mathcal{S}} g_q(y)w(x)w(y) \sum_{k,l=0}^{\infty} C_{kl}^{XY} g_k(x)g_l(y)dy}{w(x) \sum_{k=0}^{\infty} C_k^X g_k(x)} \\ &= \frac{\sum_{k=0}^{\infty} C_{kq}^{XY} g_k(x)}{\sum_{k=0}^{\infty} C_k^X g_k(x)} \end{aligned} \quad (35)$$

が得られる。ただし、 $C_{kl}^{XY} = E(g_k(X)g_l(Y))$ ,  $C_k^X = E(g_k(X))$  である。(35) 式の注目すべき点は、条件付期待値が有理関数で表現されていることである。また、この表現を構成するために必要な情報は、 $X, Y$  の積率と交差積率のみである。

$E(Y^q|X = x)$  のような条件付の積率は、 $E(g_l(Y)|X = x)$ ,  $l = 0, \dots, q$  に関する  $q$  元 1 次方程式を解くことで得られる。

数値計算を行う場合には、これまでと同じように、(35) 式の無限和を、ある  $n$  までの有限和で近似することが可能である。

### 5.2.2 条件付期待値の近似に関する工夫

2 変量分布展開法の場合と同様に、(35) 式の近似に関しても、その脆弱性を補うための 3 つの工夫: 「基準化」、「ラゲール展開の利用」、「最適化」を考えることができる。ただし、ここでは、「ラゲール展開の利用」に関しては述べないので、これについては Marumo (2007) の Chapter 6 を参照されたい。

**基準化** 基準化は、2 変量分布展開法の場合と同様に行うことができる。すなわち、エルミート展開については、

$$\gamma = -\frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{E(X^2) - \{E(X)\}^2},$$

$Z = \gamma X + Y$ ,  $\mu_X = E(X)$ ,  $\sigma_X^2 = E(X^2) - \mu_X^2$ ,  $\mu_Z = E(Z)$ ,  $\sigma_Z^2 = E(Z^2) - \mu_Z^2$  として、 $X' = (X - \mu_X)/\sigma_X$  と  $Z' = (Z - \mu_Z)/\sigma_Z$  に対して (35) 式を使って、条件付積率  $E(Z'^i|X' = x') = E(Z^i|X = x)$ ,  $q = 0, \dots, q$  が得られる。ただし、 $x' = (x - \mu_X)/\sigma_X$  とした。これらの条件付積率は

$$E(Z'^i|X = x) = \frac{1}{\sigma_Z^i} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} E(Y^j|X = x)(x - \mu_X)^{i-j}$$

のように展開されることから、 $q$  元 1 次方程式を解くことによって  $E(Y^i|X = x)$ ,  $i = 0, \dots, q$  が計算される。

**最適化** 2 変量分布展開法のお最適化と同様の場合について考える。すなわち、 $N$  個の独立な標本  $(x^{(i)}, y^{(i)})$ ,  $i = 1, \dots, N$  が観測され、 $(X, Y)$  の同時密度関数  $f$  が

$$f(x, y) = w(x)w(y) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} C_{kl}^{XY} g_k(x)g_l(y)$$

のように展開されると仮定する。また、 $X$  の周辺分布の確率密度関数を

$$f_X(x) = w(x) \sum_{k=0}^{\infty} C_k^X g_k(x)$$

と置く。ただし、 $C_{kl}^{XY} = E(g_k(X)g_l(Y))$ ,  $C_k^X = E(g_k(X))$ ,  $k = 0, 1, \dots, l = 0, 1, \dots$  である。非負の整数  $q$  に対して関数  $h_q(x)$  を

$$h_q(x) = \int_S g_q(v)f(x, v)dv = w(x) \sum_{k=0}^{\infty} C_{kq}^{XY} g_k(x)$$

で定義すると、 $E(g_q(Y)|X = x) = h_q(x)/f_X(x)$  である。この  $h_q(x)$  に対しても、 $\alpha_{kq} \geq 0$ ,  $k = 0, \dots, n$  を使った近似

$$\hat{h}_q(x) = w(x) \sum_{k=0}^n \alpha_{kq} \hat{C}_{kq}^{XY}$$

を考えることができる。ただし、 $\hat{C}_{kq}^{XY} = N^{-1} \sum_{i=1}^N g_k(x^{(i)})g_l(y^{(i)})$  である。この近似について、重み付けされた期待 2 乗積分誤差 (MISE)

$$E \left( \int_S \frac{\{\hat{h}_q(u) - h_q(u)\}^2}{w(u)} du \right)$$

の最小化を考えると、2 変量分布展開法の場合と全く同じ  $\alpha_{kq}$ ,  $k = 0, \dots, n$  が最適であることがわかる。

### 5.2.3 数値計算例

図 10 と同様、(N225, N225 IV) の標本に (35) 式を使ったエルミート展開を当てはめて得られた条件付期待値と条件付標準偏差の数値計算例を、図 11 に示す。基準化と最適化が施されている。

これを見ると、N225 の値の両端で、条件付標準偏差の近似が消滅していることがわかる。これは、この付近での分布展開があまり上手く行っていないことを示唆している。図 12 は、図 10 で示した同時密度関数の、図 11 において右端付近に相当する部分を拡大したものである。これを見ると、(N225, N225IV) = (0.035, -0.05) 付近では同時密度が負値で近似されていることがわかる。この負の確率密度が、図 11 における条件付標準偏差の近似に影響したものと考えられる。なお、この確率密度の近似値から最小値を数値的に求めると -8.84 であったが、この絶対値の大きさは、最大値 595.67 の 1.4% である。

この点以外に関しては、図 11 の条件付期待値と条件付標準偏差は、散布されている標本に見られる、N225 と N225 IV の間の非線形な相互依存関係を大きな違和感なく捉えているといえる。

## 5.3 コピュラ関数と分布展開法

ここでは、分布展開法を利用することにより、2次元のコピュラ密度関数が有理関数で近似できることを示す。

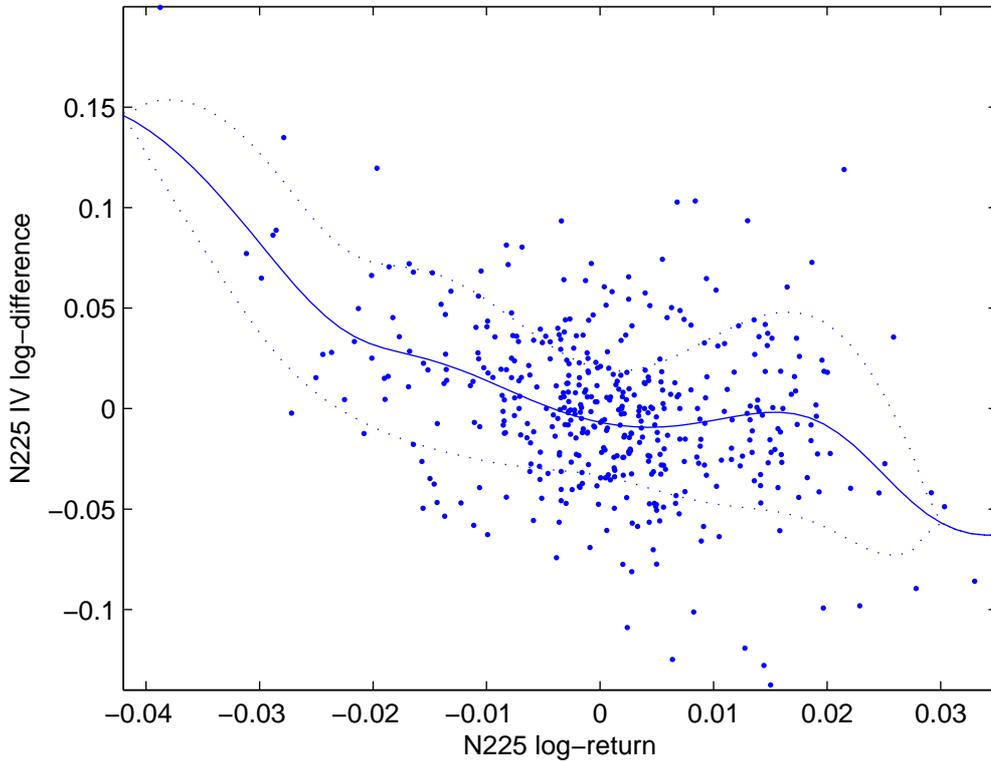


図 11: N225 の値で条件付けされた N225 IV の期待値 (実線) と、同じく条件付けされた期待値 ± 条件付けされた標準偏差 (点線)。両者とも、基準化および最適化が施されたエルミート展開を利用して算出した近似。展開の次数は、(35) 式において  $n = 8$  とした。観測された (N225, N225 IV) の標本は背景に散布されている。標本に関しては、4 節の表 1 を参照。

### 5.3.1 コピュラと密度関数

2 つの変数を持つ関数  $C : [0, 1]^2 \mapsto [0, 1]$  が、 $0 \leq t \leq 1, 0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1, 0 \leq v_1 \leq v_2 \leq 1$  に対し

$$\begin{aligned} C(t, 0) &= C(0, t) = 0 \\ C(1, t) &= C(t, 1) = t \\ C(u_1, v_1) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_2, v_2) &\geq 0 \end{aligned}$$

を満たすとき、 $C$  を 2 次元のコピュラ関数と呼ぶ。 $F$  を  $X, Y$  の同時分布関数とし、 $F_X, F_Y$  をそれぞれの周辺分布関数とする。スクラーの定理<sup>35</sup>によると、あるコピュラ  $C$  を使って

$$F(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y)) \quad (36)$$

のような表現が可能である。また、(36) 式を満たす  $C$  は一意に決まる。 $F$  が  $x, y$  の両方について微分可能であるとすると、(36) 式から、

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)c(F_X(x), F_Y(y)) \quad (37)$$

<sup>35</sup>スクラーの定理や、その他のコピュラの性質については、Nelsen (1999) を参照。

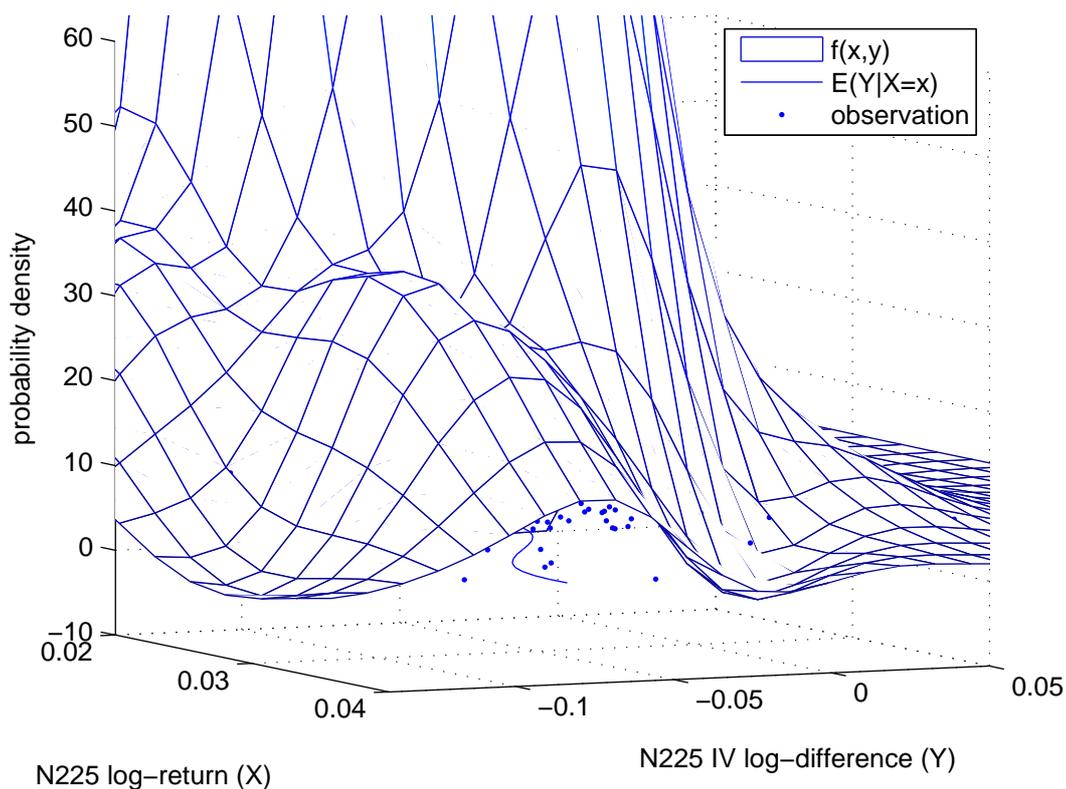


図 12: 図 10 の裾の一部を拡大したもの。

のような、同時密度関数に対する表現が求まる。ただし、 $f_X, f_Y$  はそれぞれ  $X, Y$  の周辺分布の確率密度関数で、

$$c(u, v) = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u, v)$$

はコピュラ密度である。

### 5.3.2 コピュラ密度と分布展開法

(37) 式に分布展開法を適用すると、コピュラ密度  $c$  は

$$\begin{aligned} c(F_X(x), F_Y(y)) &= \frac{f(x, y)}{f_X(x)f_Y(y)} \\ &= \frac{\sum_{k,l} C_{kl}^{XY} g_k(x)g_l(y)}{\sum_{k,l} C_k^X C_l^Y g_k(x)g_l(y)} \end{aligned} \quad (38)$$

あるいは、

$$c(u, v) = \frac{\sum_{k,l} C_{kl}^{XY} g_k(F_X^{-1}(u))g_l(F_Y^{-1}(v))}{\sum_{k,l} C_k^X C_l^Y g_k(F_X^{-1}(u))g_l(F_Y^{-1}(v))}$$

のように有理関数を使って表わすことができる。

これらの表現についても、有限和を用いた近似が考えられ、この近似を構成するために必要なのは、 $X$  と  $Y$  の積率と交差積率のみである。

この近似に対する基準化や最適化については、次のように考えることができる。すなわち、(35)式と(38)式を使うと、コピュラ密度は、

$$c(F_X(x), F_Y(y)) = \frac{\sum_{l=0}^{\infty} E(g_l(Y)|X=x)g_l(y)}{\sum_{l=0}^{\infty} C_l^Y g_l(y)}$$

のように条件付期待値を使って表わすことができる。したがって、先に述べた基準化や最適化を条件付期待値に施してコピュラ密度を算出することが可能である。

### 5.3.3 数値計算例

図 10, 11 と同様、(N225, N225 IV) の標本に (39) 式を使ったエルミート展開を当てはめて得られたコピュラ密度関数の近似を図 13 に示す。基準化と最適化が施されている。

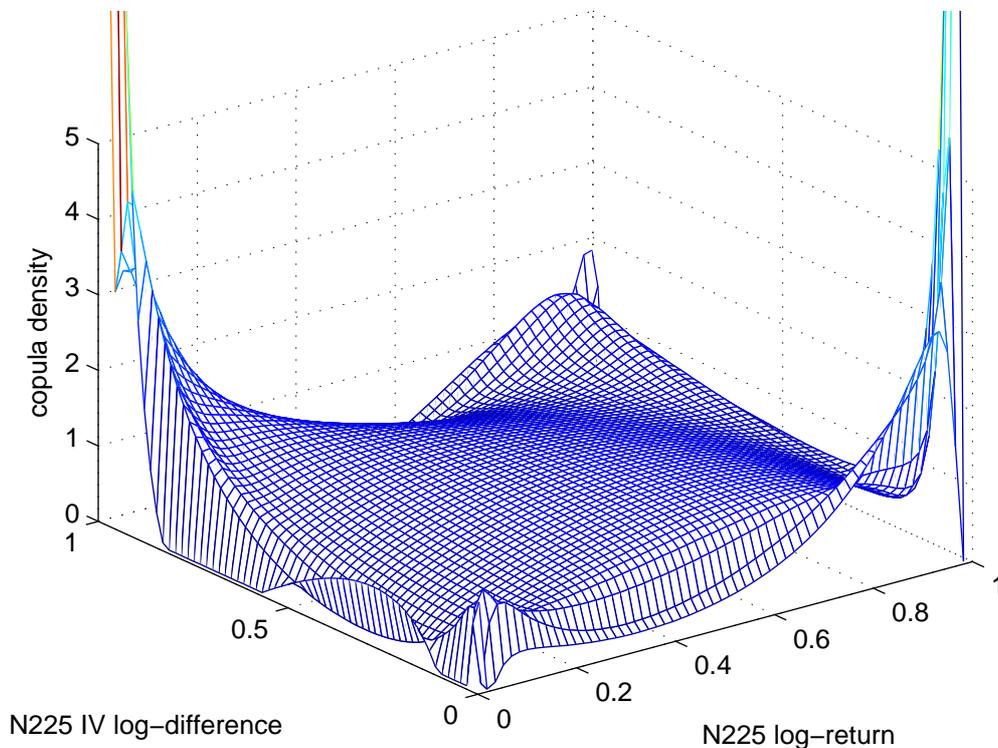


図 13: (N225, N225 IV) の標本に、2 変量のエルミート展開を当てはめて得られたコピュラ密度関数の近似。基準化および最適化が施されている。(39) 式中、展開の次数は  $n = 8$  とした。標本に関しては、4 節の表 1 参照。

図 13 のみからこの近似の妥当性を論じることは必ずしも容易ではないが、仮に、この近似が適切なものであるとすると、分布展開法による近似は、(N225, N225 IV) の複雑な相互依存関係を捉えていることがわかる。

分布展開法によるコピュラ密度関数の近似の妥当性について調べるために、擬似乱数を使った実験を行った。標準正規分布を周辺分布として、2次元のクレイトン・コピュラ (パラ

メータ  $\theta = 2.882$ ) に従う 2 変量擬似乱数を 500 組発生させ、(39) 式を使ったエルミート展開を当てはめてコピュラ密度関数の近似を得た (図 14)。なお、パラメータ  $\theta$  を持つ 2 次元のクレイトン・コピュラ関数は  $C(u, v) = (u^\theta + v^\theta - 1)^{\frac{1}{\theta}}$  で与えられる。これと、2 次元のクレイトン・コピュラの理論値をプロットした図 15 を比較することで、近似の妥当性がある程度は評価し得る。

図 14 と図 15 を比較すると、近似の周辺部では不規則な変動が見られるものの、近似は、理論値の大まかな形状を再現していることがわかる。

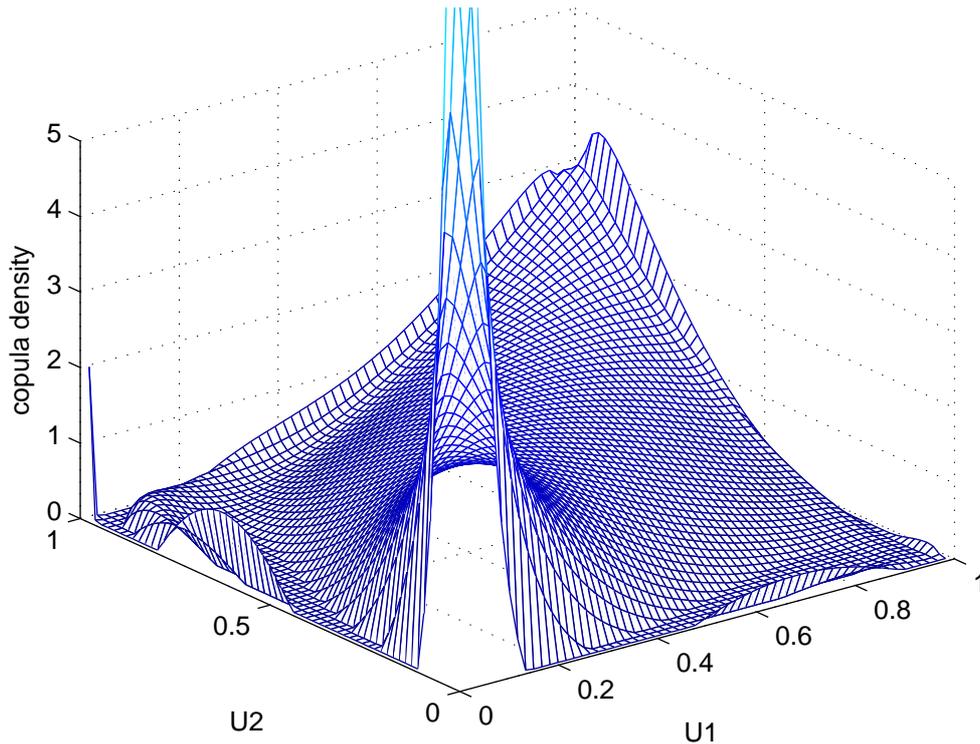


図 14: パラメータ  $\theta = 2.882$  を持つ 2 次元のクレイトン・コピュラと、周辺分布として標準正規分布を利用して、500 個の擬似標本を発生させ、それに 2 変量のエルミート展開を当てはめて得られたコピュラ密度関数の近似。基準化および最適化が施されている。(39) 式中、展開の次数は  $n = 8$  とした。パラメータ  $\theta = 2.882$  を持つ 2 次元のクレイトン・コピュラの理論値は、図 15 に示した。

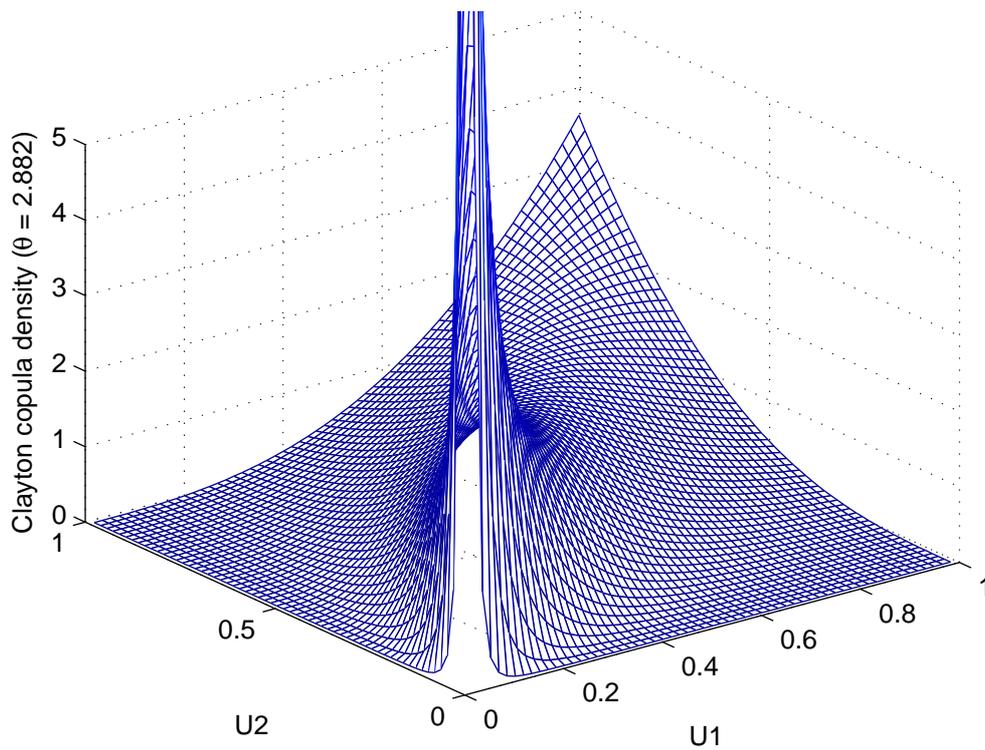


図 15: 2次元のクレイトン・コピュラ密度関数 ( $\theta = 2.882$ )。パラメータ  $\theta$  を持つ2次元のクレイトン・コピュラ関数は  $C(u, v) = (u^\theta + v^\theta - 1)^{\frac{1}{\theta}}$  で与えられる。

## 5.4 一般の多変量への拡張

5.1 から 5.3 まででは、主に 2 変量の分布展開法について解説してきた。これら 2 変量の場合の結果のうち主なものは、一般の多変量への拡張が可能である。

一般の多変量の場合の議論の流れは、2 変量の場合と本質的に変わらないので、ここでは、結果のみを記す。

### 5.4.1 $p$ 変量の分布展開法

$p \geq 3$  として、 $f(x_1, \dots, x_p)$  を、 $p$  変量の確率変数  $(X_1, \dots, X_p)$  の同時密度関数とする。5.1 と同様に、

$$f(x_1, \dots, x_p) = w(x_1) \cdots w(x_p) \times \sum_{k_1, \dots, k_p} E(g_{k_1}(X_1) \cdots g_{k_p}(X_p)) g_{k_1}(x_1) \cdots g_{k_p}(x_p) \quad (39)$$

が得られる。

基準化は、もとの確率変数  $(X_1, \dots, X_p)$  を線形変換することによって、互いに共分散がゼロになるような  $p$  変量の確率変数  $(Z_1, \dots, Z_p)$  を得ることである。このような線形変換は、例えば、元の確率変数の分散共分散行列をコレスキー分解することで得られる。なお、コレスキー分解によって得られる線形変換を利用すると、 $i = 1, \dots, p$  について、 $Z_i$  は  $X_1, \dots, X_i$  の線形結合になる。

最適化に関しては、1 変量および 2 変量の場合と同様の議論が可能である。

### 5.4.2 条件付期待値

$X_1 = x_1, \dots, X_i = x_i$  という条件の下での  $g_{k_{i+1}}(X_{i+1}) \cdots g_{k_p}(X_p)$  の期待値は、(39) 式を使って、

$$E(g_{k_{i+1}}(X_{i+1}) \cdots g_{k_p}(X_p) | X_1 = x_1, \dots, X_i = x_i) = \frac{\sum_{k_1, \dots, k_i} E(g_{k_1}(X_1) \cdots g_{k_p}(X_p)) g_{k_1}(x_1) \cdots g_{k_i}(x_i)}{\sum_{k_1, \dots, k_i} E(g_{k_1}(X_1) \cdots g_{k_i}(X_i)) g_{k_1}(x_1) \cdots g_{k_i}(x_i)} \quad (40)$$

と計算される<sup>36</sup>。ただし  $i = 1, \dots, p$  とする。

例えば、 $E(X_{i+1}^{k_{i+1}} \cdots X_p^{k_p} | X_1 = x_1, \dots, X_i = x_i)$  のような条件付交差積率は、5.2 と同様に、多元 1 次方程式を解くことで求めることができる。

基準化は、上述の  $p$  変量の分布展開法と同様に行うことができ、また、最適化に関する議論も、1 変量および 2 変量と同様である。

<sup>36</sup>(40) 式右辺の分母と分子は、期待値の中の積のみが違うことに注意。

### 5.4.3 コピュラ密度

(39) 式を使うと、 $p$  次元のコピュラ密度は、

$$\begin{aligned} c(F_1(x_1), \dots, F_p(x_p)) &= \frac{f(x_1, \dots, x_p)}{f_1(x_1) \cdots f_p(x_p)} \\ &= \frac{\sum_{k_1, \dots, k_p} E(g_{k_1}(X_1) \cdots g_{k_p}(X_p)) g_{k_1}(x_1) \cdots g_{k_p}(x_p)}{\sum_{k_1, \dots, k_p} E(g_{k_1}(X_1)) \cdots E(g_{k_p}(X_p)) g_{k_1}(x_1) \cdots g_{k_p}(x_p)} \end{aligned} \quad (41)$$

と計算される。(40) 式と (41) 式から、これは

$$\begin{aligned} c(F_1(x_1), \dots, F_p(x_p)) &= \\ &= \frac{\sum_{k_2} E(g_{k_2}(X_2) | X_1 = x_1) g_{k_2}(x_2)}{\sum_{k_2} E(g_{k_2}(X_2)) g_{k_2}(x_2)} \times \cdots \\ &= \frac{\sum_{k_p} E(g_{k_p}(X_p) | X_1 = x_1, \dots, X_{p-1} = x_{p-1}) g_{k_p}(x_p)}{\sum_{k_p} E(g_{k_p}(X_p)) g_{k_p}(x_p)} \end{aligned}$$

のように条件付交差積率で表わすことができるので、基準化や最適化に関しては、上に述べた条件付期待値のものを利用することができる。

## 5.5 多変量分布展開法のまとめ

本節では、1 変量の分布展開法の自然な拡張によって多変量の分布展開法が構築されることを示した。また、多変量の分布展開法を応用することで、条件付期待値やコピュラ密度を有理関数で近似することができることも示された。

1 変量の場合有効であった、分布展開法の脆弱性を補うための工夫は、多変量の分布展開法へも適用が可能であった。ただし、図 11, 12 の数値計算例に見られたように、これらの工夫を施してもなお、負の確率密度の影響は無視し得ない場合もあった。こうした点の改善は今後の課題としたい。

## 6 おわりに

本稿では、ポートフォリオの市場リスク計測に関連する 3 つの問題: リスク・ファクターの分布をどのように表現するか、リスク評価期間が長い場合にリスク・ファクターの分布をどのように求めるか、リスク・ファクターの分布からどのようにポートフォリオの損益分布を導出するか、を考え、分布展開法による近似を使ってこの問題に対する解法を提案し、その数値計算例を示した。

現在、市場リスク計測手法としては、多変量正規分布を利用するものと、リスク・ファクターの経験分布を利用する HS 法の 2 つが主に利用されている。しかし、仔細に検討すると、両者ともに 3 つの問題のうち 1 つか 2 つへの対処には困難が伴うことがわかった。HS 法は、リスク・ファクターの分布の特性を自然な形で取り入れることが可能で、リスク・ファクターに対して非線型なポートフォリオの損益分布も無理なく導出することができるという大きな利点を持つ一方で、リスク評価期間が長い場合への対処が困難である。また多変量正規分布

による方法は、リスク・ファクターの分布の特性の表現に限界があり、また、ポートフォリオがリスク・ファクターに対して非線型である場合にはさらなる近似が必要であった。

これに対し分布展開法は、HS法が利用可能な場合にはHS法に対する近似を与え、さらには、リスク評価期間が長い場合や、リスク・ファクターがモデルで与えられているような、HS法の適用が困難である場合でも利用可能であることが示された。

分布展開法による近似には、頑健性に欠けるという大きな欠点があり、これが、分布展開法を広く利用するための障害となっている。本稿ではこの欠点を補うために、基準化、ラゲール展開の利用、最適化、という3つの工夫を導入し、数値計算例によりその有効性を確認した。

また、分布展開法を多変量に拡張することにより、複数のリスク・ファクターの同時密度関数を近似することができることも示された。この、多変量分布展開法を応用することによって、条件付期待値やコピュラ密度関数を有理関数で近似する手法が得られた。これらの近似は、1変量の場合と同様に、リスク・ファクターの積率と交差積率のみから構成することができた。一般に、多変量の確率分布の扱いは容易でない場合が多いので、この多変量分布展開法は簡便な近似法として活用されることが期待される。

ただし、本稿や Marumo (2007), Marumo and Wolff (2007) で検討した数値計算例は限られたものであり、本手法が実用化されるまでには、より多くの数値計算例や、より多様な側面から分析を行い、必要に応じた改善を加えることが不可欠であろう。例えば、エルミート展開の脆弱性を補うための工夫は、負の確率密度の影響を軽減はしたが、完全に排除したわけではない。実際に、2変量の分布展開においては、負の確率密度が無視し得ない影響を持っていた。この点は改善の余地があるといえる。

このほか、分布展開法の信用リスク計測への応用も考えられる。信用リスク計測の分野では、鞍点近似法の利用が Gordy (2002) や菊池 (2007) によって提案されているが、本稿で検討したような分布展開法の適用が可能であれば、リスク計測に伴う数値計算の負荷は一層軽減され得るであろう。

## 参考文献

- Acerbi, C. and D. Tasche. 2002. "On the coherence of expected shortfall." *Journal of Banking and Finance* 26:1487–1503.
- Artzner, P., F. Delbaen, J. M. Eber and D. Heath. 1999. "Coherent Measures of Risk." *Mathematical Finance* 9(3):203–228.
- Black, F. and M. Scholes. 1973. "The pricing of options and corporate liabilities." *Journal of Political Economy* 81:637–659.
- Daniélsson, J. 2002. "The emperor has no clothes: Limits to risk modelling." *Journal of Banking and Finance* 26:1273–1296.
- Duffie, D. and J. Pan. 1997. "An Overview of Value at Risk." *Journal of Derivatives* Spring:7–48.

- Finger, C. C. 2006. "How historical simulation made me lazy." *RiskMetrics Group Research Monthly*.
- Freud, G. 1971. *Orthogonal Polynomials*. Pergamon Press.
- Gordy, M. B. 2002. "Saddlepoint approximation of CreditRisk+." *Journal of Banking and Finance* 26:1335–1353.
- Group of Thirty. 1993. "Derivatives: Practices and Principles."
- Hall, P. 1983. "Orthogonal Series Methods for Both Qualitative and Quantitative Data." *The Annals of Statistics* 11(3):1004–1007.
- Hall, P. 1992. *The Bootstrap and Edgeworth Expansion*. Springer.
- Jackson, D. 1963. *Fourier Series and Orthogonal Polynomials*. Vol. 6 The Mathematical Association of America.
- Jaschke, S. R. 2002. "The Cornish-Fisher-Expansion in the Context of Delta-Gamma-Normal Approximations." *Journal of Risk* 4(4):33–52.
- Jensen, J. L. 1995. *Saddlepoint Approximations*. Oxford: Clarendon Press.
- Jorion, P. 2001. *Value at Risk, Second Edition*. McGraw-Hill.
- Kolassa, J. E. 1997. *Series Approximation Methods in Statistics, 2nd edition*. Springer.
- Linsmeier, T. J. and N. D. Pearson. 1996. "Risk Measurement: An Introduction to Value at Risk." Office for Futures and Options Research Working Paper.
- Markowitz, H. 1959. *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. John Wiley.
- Marumo, K. 2007. Expansion Methods Applied to Distributions and Risk Measurement in Financial Markets PhD thesis School of Economics and Finance, Queensland University of Technology, Australia.
- Marumo, K. and R. Wolff. 2007. "Expansion methods applied to asset return distributions." *Journal of Risk* 10(2):3–24.
- Mauleón, I. and J. Perote. 2000. "The Ability of Multivariate Edgeworth-Sargan Density Capturing Financial Data Behaviour." SSRN.
- Mina, J. and J. Y. Xiao. 2001. Return to RiskMetrics: The Evolution of a Standard. Technical report RiskMetrics.
- Nelsen, R. B. 1999. *An Introduction to Copulas*. Springer.
- RiskMetrics. 1994. *RiskMetrics Technical Document*. 1 ed.

- RiskMetrics. 1996. *RiskMetrics Technical Document*. 4 ed.
- Rockafellar, R. T. and S. Uryasev. 2000. “Optimisation of conditional value-at-risk.” *Journal of Risk* 2(3):21–41.
- Rogachev, A. 2007. “Value-at-Risk concept by Swiss private banks.” *The Journal of Risk Finance* 8(1):72–78.
- Shreve, S. E. 2004. *Stochastic Calculus for Finance II Continuous-Time Models*. Springer.
- Szegő, G. 1975. *Orthogonal Polynomials*. 4 ed. American Mathematical Society.
- Szegő, G. 2002. “Measures of Risk.” *Journal of Banking and Finance* 26(7):1253–1272.
- 菊池, 健太郎. 2007. “与信ポートフォリオ VaR の解析的な評価法: 条件付鞍点法による近似計算の理論と数値検証.” *金融研究* 26(2):137–186.
- 蓑谷, 千鳳彦. 1998. *すぐに役立つ統計分布*. 東京図書.