



日本銀行ワーキングペーパーシリーズ

## 切断安定分布による資産収益率のファットテイル性のモデル化と VaR・ES の計測手法におけるモデル・リスクの数値的分析

磯貝 孝\*

takashi.isogai@boj.or.jp

No.13-J-3  
2013年3月

日本銀行  
〒103-8660 日本郵便（株）日本橋支店私書箱第30号

\* 金融機構局

日本銀行ワーキングペーパーシリーズは、日本銀行員および外部研究者の研究成果をとりまとめたもので、内外の研究機関、研究者等の有識者から幅広くコメントを頂戴することを意図しています。ただし、論文の中で示された内容や意見は、日本銀行の公式見解を示すものではありません。

なお、ワーキングペーパーシリーズに対するご意見・ご質問や、掲載ファイルに関するお問い合わせは、執筆者までお寄せ下さい。

商用目的で転載・複製を行う場合は、予め日本銀行情報サービス局 (post.prd8@boj.or.jp) までご相談下さい。転載・複製を行う場合は、出所を明記して下さい。



# 切断安定分布による資産収益率のファットテイル性のモデル化と VaR・ES の計測手法におけるモデル・リスクの数値的分析\*

磯貝 孝<sup>†</sup>

2013年3月

## 【要 旨】

本稿では、資産収益率のテイルリスクをリスク指標によって把握する際の一般的な計測手法に関するモデル・リスク（損失発生の可能性を誤って評価してしまうリスク）について分析した。分析では、まず、日経平均株価の日次収益率のファットテイル性を確認し、その母分布を切断安定分布としてモデル化した。次に、推計した母分布からのランダム・サンプリングによりサイズの異なる複数のデータセットを得た。これらのデータセットについて、正規分布近似、一般化パレート分布近似、ヒストリカル法、カーネルスムージングの各手法により VaR、ES（期待ショートフォール）を計算し、母分布から計算した VaR、ES（ベンチマーク）からの乖離やばらつきについて信頼水準別に比較・分析した。また、VaR では捉えきれないテイルリスクを ES がどの程度捉えているかを示す尺度として、同一信頼水準における ES/VaR 比率にも注目した。

分析の結果、ファットテイルなデータに対する正規分布近似によるリスク量計測は精度が低く、特に ES でリスク量の過小推計の問題が目立った。一方、その他の手法では、概ねベンチマークに近い結果が得られた。ただし、小サンプル、高信頼水準では安定的なリスク量計算が難しくなるケースがみられた。ES/VaR 比率は、ヒストリカル法、カーネルスムージングについて概ねベンチマークの動き（信頼水準が上がるほど 1 に近づく）が再現された。

バーゼル自己資本比率規制の見直しにおける ES の新規採用の検討を契機に、リスク指標の比較分析の重要性が増している。本稿の分析を通じて、確率分布の想定、信頼水準、データサイズ、計算の容易さなどの観点に立ったリスク量の計測手法に関する多角的な比較分析の重要性が改めて確認された。

---

\* 本稿の作成の過程で、中川秀敏准教授（一橋大学大学院国際企業戦略研究科）・森本祐司氏（キャピタスコンサルティング）を始め、2013年2月28日に行われた「リスク計測の高度化」ワークショップの参加者などから多くの有益なコメントを頂戴した。記して感謝したい。ただし、ありうべき誤りは筆者に属する。本稿の内容と意見は、筆者個人に属するものであり、日本銀行および金融機構局の公式見解を示すものではない。

<sup>†</sup> 日本銀行金融機構局（takashi.isogai@boj.or.jp）

## 目 次

1. はじめに.....	3
2. 収益率変動の捉え方とリスク指標.....	4
(1) 収益率変動のファットテイル性.....	4
(2) 代表的なリスク指標としての VaR、ES.....	6
(3) リスク指標の計算アプローチ.....	8
3. 収益率変動のモデル化.....	11
(1) 安定分布によるファットテイル性のモデル化（特徴付け）.....	11
(2) 切断安定分布の推計.....	14
(3) 切断安定分布による VaR、ES の計算.....	18
4. ランダム・サンプルに基づくリスク量計算の数値シミュレーション.....	19
(1) 数値シミュレーションの概要.....	19
(2) 確率分布の近似に基づくリスク量計測手法の概要.....	22
(3) VaR、ES の推計結果と推計手法間の比較.....	26
5. おわりに.....	39
(1) シミュレーション分析のまとめ.....	39
(2) 実務におけるリスク量計算の手法選択の観点からの留意点.....	41
(3) 今後の分析の発展の方向性.....	42
別紙図表（シミュレーション結果）.....	43
補論 1 GARCH による日経平均株価のボラティリティ推計.....	57
補論 2 安定分布の特徴と裾の切断.....	60
補論 3 無条件モデルにおける独立性の前提.....	66
補論 4 確率分布の近似による VaR、ES の計算手法の詳細.....	68
参考文献.....	79

## 1. はじめに

株式や為替など、多くの金融資産について、価格が時に非常に大きな変動を示すこと（ファットテイル）は幅広く認識されている。リスク量の計算に際しては、テイルリスクの過小評価を回避するために、こうしたファットテイルな変動の可能性を十分に考慮する必要がある。テイルリスクの適切な計量化については、価格変動のモデル化のアプローチを含めて、多様な考え方・手法があり、実務でも様々な工夫が試みられている。

市場リスクを計測するリスク指標としては、VaR（Value at Risk、バリュー・アット・リスク）が一般的に用いられているが、リーマンショック以後、テイルリスクの把握がより重視されるようになり、ES（Expected Shortfall、期待ショートフォール）への関心が高まっている。ESは、VaRではカバーしきれない極端な損失が発生するリスクも同じ信頼水準の下で数値化できる指標とされている。バーゼル銀行監督委員会でも、バーゼル自己資本比率規制の見直しの中で、トレーディング勘定における新たなリスク指標として、ESの採用を検討している（Basel Committee on Banking Supervision [2012]）。

本稿の分析の主な目的は、VaRおよびESを計算する上で重要となる資産価格変動の確率分布に関する想定やその他の技術的な前提および留意点などについて整理するとともに、現実の株価変動を近似した分布から発生させた多数のランダム・サンプルを用いて、「モデル・リスク」（損失発生の可能性を誤って評価してしまうリスク）<sup>1</sup>の観点から一般的なリスク量計算の手法の精度について比較分析することである。比較分析の視点としては、サンプルサイズの違いおよび信頼水準による違いがリスク量計算にどのように影響するのかに注目した。なお、本稿では、テイルリスクの把握に焦点を絞っているため、単変量の1期間のリスク量に分析を限定している。このため、ポートフォリオのリスク量計算を行う上で必要となる複数資産の収益率の相関<sup>2</sup>、リスク量の積算・保有

---

<sup>1</sup> 「モデル・リスク」という用語は、実務では主に、①計量モデル自体の計算手法・前提などに関する技術的な問題、②モデルの各種前提・制約などに関する適切な理解がなされないまま利用されるなどの利用上の問題、から生じ得る経済的損失などを指す（Board of Governors of the Federal Reserve [2011]）というように幅広い概念として用いられることが多い。これに対して、上記①に焦点を絞ってモデル・リスクを主にリスクの計量化プロセスの問題として捉えることもある。例えば、Sibbertsen et al. [2008]では、モデル・リスクを想定されたデータ生成プロセスからの推計値と実際に観測されたデータとの乖離と捉えた上で、変数の選択・関連付け・推計の各段階で生じ得る問題とその影響について整理している。本稿でも、これと同様にモデル・リスクをVaR、ESを用いてリスク量を数値化する際の精度に関する問題として捉えており、上記②のような問題は含めていない。Alexander and Sarabia [2012]、Kerkhof et al. [2010]でも同様の観点からVaRやESの計算手法に関する精度についてモデル・リスクの分析を行っている。

<sup>2</sup> リスク量計算においては、相関構造の非線形性、特にストレス時における相関の変化は

期間の調整などについては扱っていない。また、VaR、ES はリスク指標として異なる性格を有するが、本稿では両者のリスク指標としての優劣の比較を論じてはいない。

以下では、2 節で金融資産の例として株式（日経平均株価<sup>3</sup>）に注目し、日次収益率のファットテイル性を確認するとともに、ボラティティ変動とリスク量計算の関係およびリスク計量に関する条件付きモデルと無条件モデルの考え方について整理する。3 節では、日経平均株価の日次収益率の変動の背景となる母分布として切断安定分布を想定し、推計した分布のパラメータを用いて VaR、ES を計算する。4 節では、切断安定分布からのランダム・サンプリングにより大小複数のサイズの仮想データを生成する。それらのデータセットに対して、正規分布近似、一般化パレート分布近似、ヒストリカル法、カーネルスムージングの 4 つの手法を用いて VaR、ES を計算し、3 節で計算したリスク量をベンチマークとして計算精度などに関する比較分析を行う。5 節では、本稿の分析のまとめ、今後の分析の発展の方向性について触れる。

## 2. 収益率変動の捉え方とリスク指標

### (1) 収益率変動のファットテイル性

金融資産の価格変動リスクを確率的アプローチのもとでリスク量として定量的に把握するには、まずは、価格変動がどのような動きをしているのか把握する必要がある。本稿では、金融資産の代表例として株式に注目した。図表 1 は、2008 年以降の日経平均株価の日次の動き<sup>4</sup>を示している。これをみると、2008 年のリーマンショックや 2011 年の東日本大震災時に特に大きな変動が生じた一方で、その他の時期では相対的に変動の幅が小さかったことがわかる。金融

---

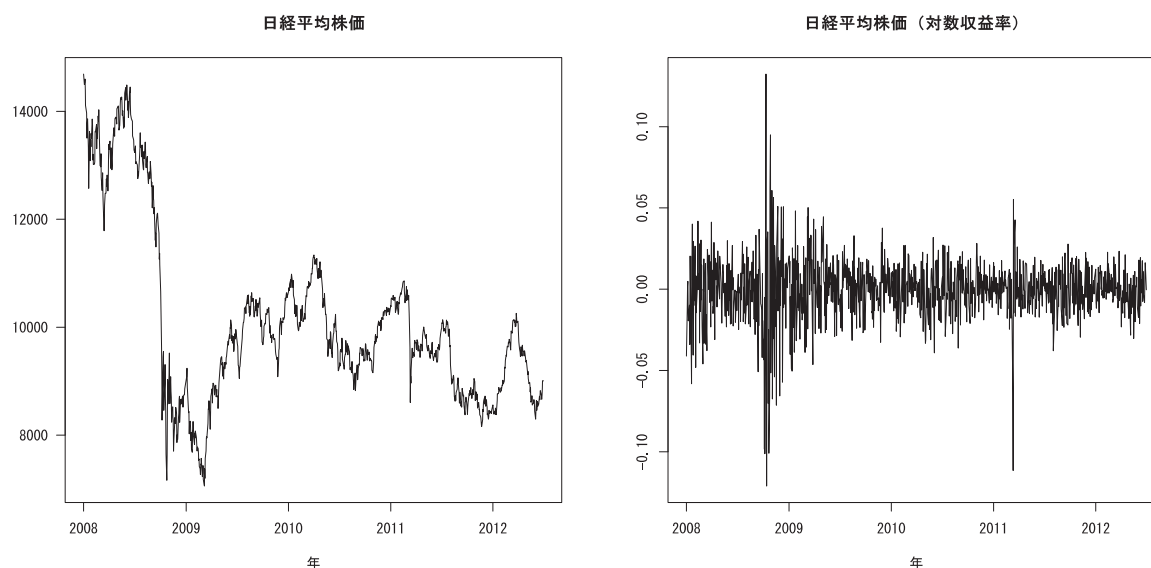
重要な論点の一つである。この点については、コンピュータを用いて相関構造を表現する手法がある。例えば、吉羽 [2013]では、ストレス状況を勘案した相関構造とポートフォリオのリスク量の合算について、相関構造の裾依存性や正負の相関を勘案できる様々なコンピュータを応用した手法の概念整理およびそれらを用いた実証分析を行っている。

<sup>3</sup> 本稿では、収益率変動にファットテイル性を有するとみられる一般的な金融資産の例として日経平均株価のデータを使用した。分析の焦点は収益率変動のファットテイル性をどうリスク計量に反映するかであり、株価変動の背景などについて詳しい分析を加えている訳ではない。4 節以降の数値シミュレーションも、サンプリングに日経平均から推計した母分布を用いているが、分析上はファットテイル性を有するサンプルデータとして扱っているに過ぎない。

<sup>4</sup> 金融資産の収益率変動は、対数収益率（自然対数の前日差）で示されるのが一般的であり、本稿でも株価変動を日次の対数収益率で表している（データ期間は、2008 年 1 月～2012 年 8 月）。

資産の価格変動については、このように変動幅が時期によって変化し、急激な変動が特定の時期に集中する現象が幅広くみられることが知られている。

図表 1 日経平均株価<sup>5</sup>の推移



図表 2 は、日経平均株価の日次の対数収益率に関するヒストグラムと正規分布に対する QQ プロット<sup>6</sup>である。図表 2 (左) に示した株価収益率データの確率密度の分布 (カーネルスムージングにより推計した経験分布) は、正規分布よりも中心部分が尖っており、裾<sup>7</sup>の部分はより厚いファットテイル<sup>8</sup>な分布となっている。図表 2 (右) の QQ プロットでも、両端の部分で正規分布との乖離がみられる。図表 3 に示した正規性に関する検定結果でも非正規性が示唆されている。株価変動のリスクを捉える上では、このファットテイル性を明示的に考慮する必要がある。

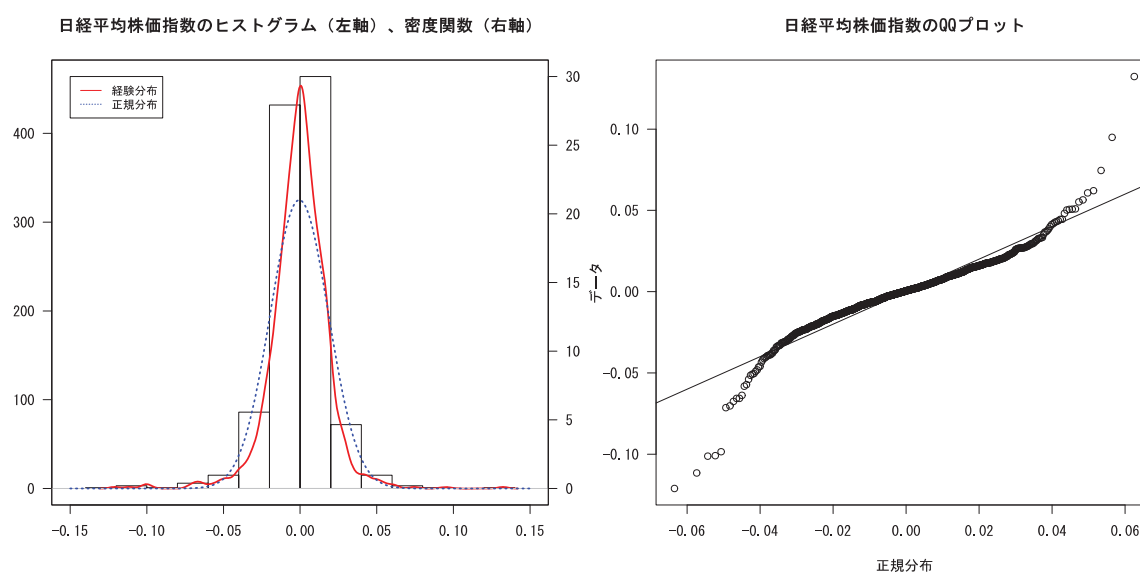
<sup>5</sup> ©日本経済新聞社 出所：日経電子版「日経平均プロフィール」

<sup>6</sup> QQ (quantile-quantile) プロットは、データセットが想定した分布に従うかどうかをみるために、y 軸にデータの分位点、x 軸に想定する分布の分位点をとってプロットした図。点が直線状に並んでいればデータはその分布に従っていると解釈される。

<sup>7</sup> 本稿では、確率密度関数の低密度領域を「分布の裾」と表現した (単峰型の密度関数の場合、密度関数の両側の端の領域に対応する)。リスク管理では、特に大きな損失 (負の収益率) の発生に対応する左側の裾に注目することが多い。

<sup>8</sup> 「ファットテイル」については、より厳密な定義も存在するが、本稿では一般的な用語として、「正規分布との対比で分布の裾が厚い」という趣旨で使用している。

図表 2 日経平均株価の密度関数と QQ プロット



図表 3 正規性に関する検定結果

Kolmogorov-Smirnov	Anderson-Darling	Jarque Bera	Shapiro-Wilk
D = 0.074	AD = 14.07	$X^2 = 2713.7, df = 2$	W = 0.915
p 値 = $9.12 \times 10^{-6}$	p 値 = $5.45 \times 10^{-7}$	p 値 < $2.2 \times 10^{-16}$	p 値 < $2.2 \times 10^{-16}$

(注) 帰無仮説  $H_0$  は「正規分布に従う」。p 値が低い場合、帰無仮説を棄却できる (正規分布ではない)。

## (2) 代表的なリスク指標としての VaR、ES

金融資産の価格変動リスクを表すリスク指標としては、VaR (Value at Risk、バリュー・アット・リスク) が金融機関を中心に幅広く用いられている。また、ES (Expected Shortfall、期待ショートフォール)<sup>9</sup>は、VaR を超える損失の平均であり、VaR では捉えきれないテイル部分のリスクも同じ信頼水準の下で捉えられるリスク指標として知られている。

VaR、ES は、 $X$  を金融資産の収益率、 $p$  を信頼水準<sup>10</sup>とすると、一般的に

<sup>9</sup> CVaR (Conditional Value-at-Risk)、Mean Excess Loss、Mean Shortfall、Tail VaR、Tail Conditional Expectation、Average VaR などと呼ばれることもある。これらの用語は、厳密にはリスク指標としての概念に若干の違いが存在する部分もあるが、実務では同義のものとして扱われることが多い。バーゼル銀行監督委員会が ES という用語を用いていること、日本でも ES という呼び方がなされることが比較的多いことから、本稿では ES という呼び方を用いることとした。

<sup>10</sup> 一般に、最大損失が VaR 以内に収まる確率を信頼水準と呼ぶ (例：95%の信頼水準)。



$$\begin{aligned} \text{VaR}_p[X] &= -\inf\{x \mid P[X \leq x] > 1-p\}, \quad 0 < p < 1 \\ \text{ES}_p[X] &= E[-X \mid -X \geq \text{VaR}_p[X]], \quad 0 < p < 1 \end{aligned} \tag{1}$$

と定義される<sup>11</sup>。

VaR は、収益率の変動について何らかの確率分布を想定した上で、一定の信頼水準に対応した分布上の分位点に相当する収益率（損失額）<sup>12</sup>として得られる。したがって、対象とするデータが同じでも、想定する確率分布が異なれば、分布の分位点、すなわち VaR は異なる値となる。

ES も、VaR と同様、想定する確率分布に依存する。ES の定義式(1)に含まれる期待値の計算には、想定した確率分布の密度関数<sup>13</sup>が用いられる。ES は、その定義により同一の信頼水準において常に VaR よりも大きな数値を取ることから、「より保守的なリスク指標」とされることが多い。また、ES は、一般には VaR が満たさないこともある劣加法性を含めて、リスク指標として望ましいとされる幾つかの性質<sup>14</sup>について、その多くを満たすとも言われている。バーゼル銀行監督委員会が 2012 年 5 月に公表した市中協議文書「トレーディング勘定

この場合、最大損失の発生確率は「1-信頼水準」（例：100-95=5%）となる。

<sup>11</sup> リスク量の定義に関するより詳細な説明は、Artzner et al. [1999]、山井・吉羽 [2001a]を参照されたい。

<sup>12</sup> VaR、ES などのリスク量は、実務では一般的に金額で表示されるが、本稿ではポートフォリオの損失額の計算を行わないため、便宜的に対数収益率のまま表示している。また、リスク量の符号については、損失額を示すので負の数値で示す場合もあるが、本稿では符号を変更して正の値で表示している。

<sup>13</sup> ES の計算における期待値は確率変数  $X$  の確率密度で重み付けされる（ここでは密度関数の存在を想定している）。例えば、密度関数が連続型の場合、

$$\text{ES}_p[X] = \frac{1}{1-p} \int_{-\infty}^{q_{1-p}} (-x)f(x)dx \quad f(x) \text{は } X \text{ の密度関数、 } q_{1-p} \text{ は } X \text{ の分布の } 1-p \text{ 分位点}$$

となり、リスク量の計算は密度関数  $f(x)$  に依存する。なお、ES は分布確率を用いた定義式

$$\text{ES}_p[X] = \frac{1}{1-p} \int_p^1 \text{VaR}_s[X] ds \quad \text{で表記されることもあるが、これら 2 つの式は同値の関係}$$

にある（Rau-Bredow [2004]、山井・吉羽 [2001a]）。

<sup>14</sup> 望ましいリスク指標の概念には複数の考え方が存在するが、その一つに、「コヒーレントなリスク指標」がある。これは、単調性、劣加法性、正の同次性、平行移動不変性の 4 つの性質を満たすリスク指標を指す（Artzner et al. [1999]）。劣加法性は、リスク量が  $\rho(X+Y) \leq \rho(X)+\rho(Y)$  を満たすことを指し、分散投資によるリスク量削減効果の存在を意味する。VaR は、必ずしも劣加法性を満たさないため、コヒーレントなリスク指標ではない。一方、ES は、コヒーレントなリスク指標である。VaR、ES のより詳細な特徴については、Acerbi and Tasche [2002]、山井・吉羽 [2001a]を参照されたい。

の抜本的見直し」<sup>15</sup>の中でも、VaR を代替するトレーディング勘定のリスク指標として ES を用いることが提案されている。

VaR、ES は、ともにある観測期間における対象資産のリスク量を単一の数値（損失額）として表すリスク指標であり、確率分布上の分位点を特定するための信頼水準を条件として計算される。リスク指標の計算においては、この信頼水準をどう設定するかがモデル化の際に用いる確率分布の選択と同様に非常に重要な要素となる。信頼水準の設定は、どの程度低い発生確率の損失までをリスクとして意識するかという側面を持つ。

### （3） リスク指標の計算アプローチ

金融資産の価格変動リスクを VaR や ES などの数値指標で測定するためには、収益率変動をモデル化する上で何らかの確率分布を想定する必要がある。株価の例で言えば、図表 2 でみたように、モデル化に際してファットテイルな分布をどう表現するかが重要となる。ここで、確率分布の選択に関しては、条件付きの損失分布と無条件の損失分布という 2 つの選択肢がある。条件付きの損失分布とは、収益率の変動に影響を及ぼす要因に関する過去から現在までの情報（履歴）を前提にして予想される翌期の損失分布を意味する（本稿では、条件付きの損失分布を用いたリスク量計算のアプローチを「条件付きモデル」と呼ぶ）。一方、無条件の損失分布とは、収益率変動の要因が定常分布に従い、時間のシフトに影響されないという前提の下での損失分布である（本稿では、無条件の損失分布を用いるアプローチを「無条件モデル」と呼ぶ）<sup>16</sup>。リスク計測の対象期間が比較的長い場合、無条件モデルが用いられることが少なくない。

2 つのモデルの根本的な違いは、資産収益率の変動に係る「環境変化」の捉え方にある。条件付きモデルでは、時間経過に伴う環境変化を明示的に扱うが、無条件モデルでは環境変化はないものとして扱う。このモデル化における前提の違いは、リスク量の計算方法および計算結果に大きな差をもたらす。このため、リスク量の計算手法の比較分析においても、対象とするモデルが条件付きモデル、無条件モデルのいずれであるかによって分析の観点は大きく異なる。以下では、条件付きモデル、無条件モデルのそれぞれの特徴・留意点を整理した上で、両モデルの選択とリスク量計測の目的との関係、本稿の分析で無条件モデルを選択した背景などについても説明する。

<sup>15</sup> Basel Committee on Banking Supervision [2012]

<sup>16</sup> 条件付きの損失分布、無条件の損失分布に関するより厳密な定義については、McNeil et al. [2005] の 2.1.2 節を参照されたい。

### ①条件付きモデル

株価のリスクを条件付きモデルで計測する場合、収益率変動に影響する要因としてボラティリティ<sup>17</sup>の変動履歴を考慮する必要がある。ボラティリティの変動を明示的に扱うモデルの例としては、GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) モデルが挙げられる。

GARCH モデルでは、株価収益率を

$$r_t = \mu + \sigma_t \varepsilon_t \quad (2)$$

$r_t$  は  $t$  期の収益率、 $\mu$  は収益率の平均、 $\sigma_t$  は  $t$  期のボラティリティ、

各期の残差  $\varepsilon_t$  は  $\varepsilon_t \sim N(0,1)$  など分散が 1 の独立同一分布 (i.i.d.)<sup>18</sup> に従う

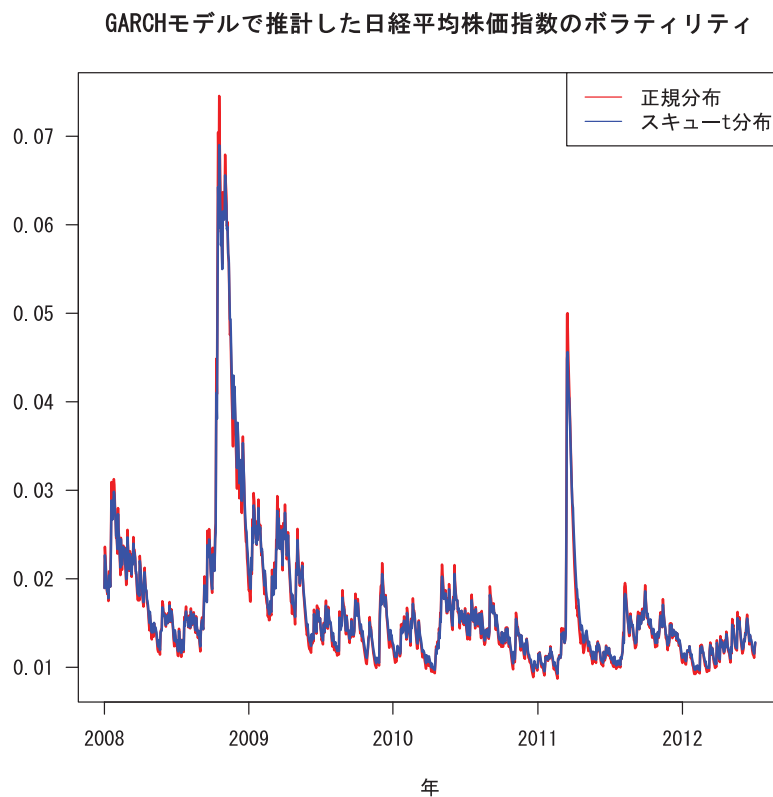
のようにモデル化し、ボラティリティの大きさと残差の確率分布の 2 つの情報を用いてリスク量が計算される。図表 4 は、日経平均株価のボラティリティの動きを GARCH(1,1) モデルで推計したものである (推計結果の詳細および GARCH モデルに基づくリスク量計算の方法については、「補論 1 GARCH による日経平均株価のボラティリティ推計」を参照されたい)。標準化された収益率変動  $\varepsilon_t$  の確率分布としては、正規分布とスキュー  $t$  分布を用いた。これをみると、リーマンショックや東日本大震災時にボラティリティ  $\sigma_t$  が急激に高まっていること、ボラティリティが高まる時期が特定の時期に集中していること (ボラティリティ・クラスタリング) がわかる。この時、正規分布とスキュー  $t$  分布の比較では、ボラティリティの大きさは、正規分布の方がより大きいことがみてとれる。これは、正規分布では、スキュー  $t$  分布に比べてテイル事象の発生確率が低いため、価格急変時に  $r_t$  が拡大した場合、ボラティリティ  $\sigma_t$  の変動が相対的に大きく、 $\varepsilon_t$  の変動が相対的に小さいという寄与度構成になるためである。

---

<sup>17</sup> 一般的なポートフォリオのリスク量を考える場合、ボラティリティ以外にも個別資産の収益率の相関を含めて様々な要因が存在する。

<sup>18</sup> i.i.d. : independent and identically distributed

図表4 日経平均株価のボラティリティの推移



## ②無条件モデル

これに対して無条件モデルの考え方では、ボラティリティの変動も含めて単一の確率分布で収益率変動を表現する。この場合、GARCHモデルなどでは可能であったボラティリティ・クラスタリングなどの収益率変動に関する時系列的な特徴を表現することは困難になる。一方で、リスク量計算においてボラティリティ変動の推計・予測を行う必要はない。

こうした無条件モデルによるリスク量計算で最も重要なことは、収益率変動をモデル化する際にある確率分布でファットテイル性を特徴付けることである。仮に、ファットテイル性を適切に特徴付けられない確率分布を用いた場合、リスク量の過小推計をもたらすなど、深刻な問題が発生することが予想される。

## ③条件付きモデルと無条件モデルの選択

リスク量計算に際して、条件付き、無条件のどちらのアプローチをとるべきかについては明確な基準はないが、リスク量計算の目的との関連でどちらがより適しているかが一つの判断基準となり得る。例えば、条件付きモデルを使えば、短期のボラティリティ変動を捉えられるので、より弾力的なリスク管理に

応用しやすい。一方、無条件モデルでは、短期の変動よりもより中長期的なタイムスパンでリスクを捉えることができ、自己資本比率の計算の前提になるリスク資産の計算やストレステストなどとの整合性も考えやすい。自己資本比率の計算やストレステストにおいては、リスク枠の限度管理やヘッジ取引を含む日常のリスク管理などよりも長い目でみた議論が中心になることが多いと考えられる。そうした場合、日々のボラティリティの変動などの影響を細かくみる必要はないという考え方もあり得る (Alexander and Sheedy [2008]、Danielsson and DeVries [2000])。もちろん、短期的なリスク管理に無条件モデルを使うことも、自己資本比率計算やストレステストで条件付きモデルを使うことも可能であるが、そうした場合には、それぞれのモデルの特徴を踏まえた上でモデル選択が行われているかについての検討が重要となる。

本稿では、金融機関における分散共分散法やヒストリカル法などによる一般的なリスク量計算が無条件モデルを前提としていることが比較的多いとみられる点を考慮し、無条件モデルを用いたリスク量計算について分析する。3節では、無条件モデルを用いる際に最も重要となるファットテイルな確率分布の選択という観点から、実際にどのような分布が適しているのかについて整理する。

### 3. 収益率変動のモデル化

#### (1) 安定分布によるファットテイル性のモデル化 (特徴付け)

無条件モデルによるリスク量計算においては、現実の収益率変動、特にそのテイル部分をモデル化のための確率分布を選択することによって特徴づけることが何よりも重要となる。ここでは、収益率変動がなぜファットテイルになるのかという問題は明示的に扱わずに、観察されたデータで示された損益の発生頻度のみから将来の損益の発生状況を予想することを考える。正規分布など、パラメトリックな確率分布を考える場合には、同一の金融資産であっても、観測頻度 (日次・週次など) や対象とする時期 (観測期間) が異なれば、データへの当てはまりは異なることもある。その意味で、無条件モデルでリスク量計算を行う際には、想定する分布の当てはまりの良さを常に確認しておく必要がある。

ここでは、日経平均株価を例に無条件モデルによるリスク量計算を行う<sup>19</sup>。

---

<sup>19</sup> 個別銘柄のリスク量計算も基本的に同じ手法を用いることができる。日経平均株価やTOPIXには、市場ポートフォリオとしての株価という側面もあるが、本稿では代表的な銘柄の価格という意味で日経平均株価を用いた。

図表 1、図表 2 で示したように日経平均株価の日次収益率変動の確率分布は、ファットテイルなものとなっている。こうしたファットテイル性を有する収益率変動をモデル化するための確率分布については、数多くの分布が提案されているが、中でも安定分布 ( $\alpha$ - stable distribution<sup>20</sup>) の応用については、Mandelbrot [1963] 以来、多くの研究がなされてきた<sup>21</sup>。安定分布は、ファットテイル性を扱う上で便利な性質を有するため、金融資産の収益率変動の近似に使われることが多い。そこで、本稿でもこの安定分布を用いて日経平均株価の日次収益率変動をモデル化する。以下では、安定分布の特徴点、留意点などについて簡単にまとめておく。安定分布の詳細は、「補論 2 安定分布の特徴と裾の切断」にまとめている。

### ①金融資産の収益率変動と安定分布

金融資産の収益率変動をモデル化する場合、モデル化が容易になるなどの技術的なメリットがあることから、正規分布が用いられることが多い<sup>22</sup>。しかし、実際には正規分布によるモデル化では、現実のデータの動きをうまく説明できないことも少なくない。その理由としては、収益率の分布に有限の分散が存在しないことや分布の形状が同一でないことなどが考えられる。収益率を独立同一分布に従う確率変数とすれば、データ数が無限大に近づくにつれて収益率の平均は正規分布に収束する（中心極限定理）。ただし、正規分布への収束が成り立つには、「有限の分散の存在」という条件が必要であり、この条件が成立しない場合、収益率の平均は正規分布ではなく安定分布に収束する（一般化中心極限定理）ことが知られている。こうした理論的背景に加えて、安定分布が正規分布に比べて裾が厚く、非対称な分布も容易に表現できるという柔軟性、さらには収益率のスケーリング（期間調整）が容易であることなどから、ファットテイル性を有する金融資産の収益率のモデル化に安定分布が選ばれることも少なくない。

### ②安定分布の定義、特徴、留意点

ある自然数  $n$  が存在して、独立同一分布に従う  $n$  個の確率変数  $X_1, \dots, X_n$  の和を  $S_n$  とする。  $S_n$  に関し以下の条件を満たす定数  $C_n (C_n > 0)$ 、  $D_n$  が存在する時、  $X$  は安定な確率変数であるといい、安定分布に従う。

<sup>20</sup> Lévy alpha stable、Pareto Lévy stable などと表記されることもある。

<sup>21</sup> 国内における金融分野の先行研究としては、Kunitomo and Owada [2006]、山井・吉羽 [2001b] などがある。

<sup>22</sup> わかりやすい例では、ブラックショールズモデルでは、株価収益率をモデル化する場合、幾何ブラウン過程（株価の対数収益率が正規分布に従う）が前提となっている。

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n, \quad S_n \stackrel{d}{=} C_n X + D_n \quad (3)$$

$X_1, \dots, X_n$  は独立同一分布に従う (i.i.d.) な確率変数

$\stackrel{d}{=}$  は確率分布が同一であることを示す

これは、 $X$  を収益率とすると、例えば、日次データを合計して週次データにするなどの保有期間調整を行っても、その結果は、スケールと位置は異なるが、元の分布と同じ種類の分布に従うことが保証されていることを意味する。一般に、安定分布の密度関数を具体的な関数形を与えて表現することはできないが、特性関数の一般形は知られている<sup>23</sup>。特性関数を用いて表わされる安定分布の密度関数は、 $\alpha$  (安定指数)、 $\beta$  (歪度パラメータ)、 $\gamma$  (尺度パラメータ)、 $\delta$  (位置パラメータ) の4つのパラメータを持つ<sup>24</sup>。このうち、 $\alpha$  と  $\beta$  が安定分布の形を決める形状パラメータであり、特に安定指数  $\alpha$  は分布の裾の形状を左右する重要なパラメータである<sup>25</sup>。パラメータ  $\alpha, \beta, \gamma$  は、以下のような値の範囲をとる。

$$0 < \alpha \leq 2, \quad -1 \leq \beta \leq 1, \quad \gamma \geq 0 \quad (4)$$

安定分布の密度関数の形状は、 $\alpha$  が小さいほど裾が厚く (ファットテイル)、 $\beta$  がゼロで左右対称 (マイナスで左に、プラスで右に歪む) となり、尺度・位置パラメータで拡大縮小・移動が可能であるなど、ファットテイルな分布を柔軟に表現するのに適している。安定分布は、裾部分での密度の減衰がべき乗則に従う<sup>26</sup>ため、発生頻度の低い事象を捉えやすい。

また、安定分布は正規分布をその一形態として包含している。すなわち、安定分布は、安定指数が  $\alpha=2$  かつ  $\beta=0$  のとき、正規分布となる。真の分布が正規分布の場合、データを安定分布にフィットすれば、推計されたパラメータの値はそれが正規分布であることを示す。安定分布は正規分布を拡張した分布と

<sup>23</sup> 特性関数の形状や安定分布の各種の特徴などに関するより詳細な説明は、「補論2 安定分布の特徴と裾の切断」を参照されたい。

<sup>24</sup> 安定分布のパラメータ表記には複数の表示方法が存在する。本稿では、数値計算時に便利とされる形式  $S(\alpha, \beta, \gamma, \delta; k=0)$ 、略して  $S(0)$  形式で記載している。実証分析における安定分布の推計パラメータを比較する際には、どの形式で表記されているかについて注意が必要である。

<sup>25</sup> なお、位置パラメータ  $\delta$  は必ずしも安定分布の平均を意味するものではなく、同様に尺度パラメータ  $\gamma$  も安定分布の標準偏差という訳ではない。これらのパラメータの解釈、表記上の注意点等については、「補論2 安定分布の特徴と裾の切断」を参照されたい。

<sup>26</sup> 変数の発生確率がパラメータのべき乗に比例するという想定。株価や為替レートの変動など、多数の要因が複雑に関係して生じ得る変動の発生確率については、べき乗則で表現できることが多いことが知られている (詳細は、補論2 (B 10) 式を参照されたい)。

捉えることができる。

このように、安定分布はファットテイル性を表現できているが、安定指数が  $0 < \alpha < 2$  の場合、「有限の分散が存在しない」という性質も有する。

### ③安定分布の裾の切断（切断安定分布）

安定指数の値によっては収益率の分散が存在しないという安定分布の特性は、現実のデータや市場参加者の認識などと必ずしも整合的でない面がある。また、分散が存在しない場合には、リスク量計算のモデルが複雑化し、実務的な応用が難しくなってしまうこともある。こうした事情から、金融資産の収益率を安定分布で近似する場合、分布の裾に対して何らかの加工を施すことが多い。

本稿では、安定分布の裾を加工する方法としては最も単純な「切断 (truncate)」を選んだ<sup>27</sup>。分布の裾を切断した安定分布は、切断安定分布 (truncated stable distribution、Mantegna and Stanley [2000]) と呼ばれ、確率変数が一定の範囲にある場合に安定分布の密度関数で発生確率を計算し、範囲外では発生確率をゼロとする。切断点の設定に関しては、根拠となる制度的な要因や金融商品の特性など何らかの事前知識が必要になる。例えば、日次の個別銘柄の株価の場合、分布の切断をストップ高・安というサーキットブレーカーの発動に対応して考えれば、一定水準以上の変動が生じる確率をゼロとする根拠として一定の合理性が存在する。

分布の裾の切断により、安定指数の値によらず有限の分散が存在することになり、ファットテイルな事象を捉えやすいという安定分布の性質を維持したままリスク量の計算処理を容易にすることができる。

## (2) 切断安定分布の推計

### ①切断安定分布のパラメータ推計

本稿では、日中の株取引に関するストップ高・安のサーキットブレーカーの存在やパラメータ推計の容易さ<sup>28</sup>などを考慮して、日経平均株価の日次の収益率のモデル化には、母分布として切断安定分布を用いることとした<sup>29</sup>。データは、

---

<sup>27</sup> 安定分布の裾の加工については、他の手法も存在する。詳細は、「補論2 安定分布の特徴と裾の切断」を参照されたい。また、切断安定分布に従う独立な確率変数の和が従う分布についても同補論を参照されたい。

<sup>28</sup> 単純な裾の切断ではなく、より高度な手法による裾の加工も可能であるが、安定分布のパラメータ推計には複雑な計算処理が必要なこともあり、切断安定分布の単純な構造には数値計算上のメリットが多い点も考慮した。

<sup>29</sup> i.i.d.な分布の前提との関連では、分布の独立性が確保されているかについての検討も本来必要となる。この点については、「補論3 無条件モデルにおける独立性の前提」を参照されたい。



リーマンショック、東日本大震災という2つの大きなショックを含む2008年1月～2012年8月の日経平均株価（日次、終値）の対数収益率を用いた。切断点については、個別銘柄における値幅制限などを参考に±20%程度<sup>30</sup>の前日比に対応する対数収益率を切断点とした（左右対称の切断点）<sup>31</sup>。

パラメータの推計は、(4)式で示されたパラメータの制約条件に上記の裾の切断に関する制約を加えて最尤法で計算した<sup>32</sup>。推計結果（図表5）をみると、安定指数は正規分布を示す2を下回っており、ファットテイルな分布であることがわかる<sup>33</sup>。歪度については、マイナス方向の歪みとなっており、リーマンショック、東日本大震災に伴う株価下落が影響しているとみられる。

図表5 切断安定分布のパラメータの推定結果

	$\alpha$ 安定指数	$\beta$ 歪度	$\gamma$ 尺度	$\delta$ 位置
推計値 (標準誤差)	1.6555 (0.0460)	-0.2005 (0.1218)	0.0100 (0.0302)	0.0006 (0.0005)

左切断点：-0.2、右切断点：+0.2

データ期間：2008年1月初～2012年8月末

<sup>30</sup> 日経平均株価9,000円を前提に前日比±20%を超える領域の確率密度をゼロとした。

<sup>31</sup> ストップ高安は、基本的に個別銘柄に対する値幅制限（最大変動率）であって、日経平均株価自体には存在しない。また、個別銘柄に関する制限値幅は各銘柄の株価水準にも依存する。こうした取引制限の仕組みは、取引市場の仕組みに依存するため、その存在の有無も含めて金融資産毎に異なる。日経平均株価の最大変動率を前日比±20%にしたのは、あくまでも便宜的な設定に過ぎないが、日経平均株価を構成する全銘柄で20%の価格変動が同時に生じる可能性は極めて小さいと考えられるため、この切断点の設定はかなりの程度保守的なものと言える（ストレステスト的な設定）。

<sup>32</sup> 切断安定分布の尤度関数は、「補論2 安定分布の特徴と裾の切断」の(B3)式および(B4)式から構成される安定分布の密度関数をもとに作成し、R (<http://cran.r-project.org/>) の環境で最尤推定した。具体的には、`stabledist` パッケージ (<https://www.rmetrics.org/>) の安定分布の密度計算モジュールを元に切断安定分布の密度計算を行うモジュールを作成し、これを用いてパラメータ制約の下で尤度の条件付き最大化計算を行って推計値を得た。初期値依存性については、複数の初期値の下での収束の一致を確かめた。

<sup>33</sup> この推計結果は、Kunitomo and Owada [2006] (TOPIXの安定指数を推計) に近い。なお、図表5に示したパラメータの推計値の標準誤差は、安定指数 $\alpha$ 以外は大きな値となっている。推計値の信頼性という面では、必ずしも良好な結果とは言えないが、分布の形状に影響する安定指数には大きな問題はないとみて、この推計値を採用した。

図表 6 切断安定分布に対する当てはまり

Kolmogorov-Smirnov 検定	D 値 0.016	$p$ 値 0.924
Anderson-Darling 検定 <sup>34</sup>	A-D 値 0.230	$p$ 値 0.979
(帰無仮説 $H_0$ はいずれも「データが切断安定分布に従う」)		
(参考) 正規分布に対する当てはまり		
Kolmogorov-Smirnov 検定	D 値 0.0748	$p$ 値 $9.129 \times 10^{-9}$
Anderson-Darling 検定	A-D 値 14.076	$p$ 値 $5.455 \times 10^{-7}$
(帰無仮説 $H_0$ はいずれも「データが正規分布に従う」)		

(参考) 先行研究における安定分布の安定指数の推計例<sup>35</sup>

	$\alpha$	推計対象のデータ	推計期間
Kunitomo and Owada [2006]	1.6747	TOPIX・日次	1990年3月～2005年8月
Borak et al. [2005]	1.6411	NY ダウ(DJIA)・日次	1987年2月～1994年12月
Donalti [2010]	1.51	S&P500・日次	1928年3月～2010年10月
	1.56	Nasdaq100・日次	1985年10月～2010年8月

## ②切断安定分布のデータへの当てはまり

推計した切断安定分布のデータへの当てはまりについては、図表 6 の K-S 検定、A-D 検定とも正規性が棄却された一方、切断安定分布に従うという仮説は棄却されないという結果であった。図表 7 は、日経平均株価の対数収益率の経験分布と推計した切断安定分布および正規分布の分布関数を表示したものである。正規分布は全体的にデータ（経験累積分布関数、ECDF<sup>36</sup>）とのずれが目立つのに対し、切断安定分布は裾部分も含めて全体的に当てはまりがよい。裾部分を拡大した図表 7（右）をみると、裾部分で正規分布が ECDF を大きく下回

<sup>34</sup> Kolmogorov-Smirnov 検定よりも分布のテイル部分での当てはまりを相対的により重視した分布の当てはまりをみる検定。Anderson-Darling 検定では、

$$A_n^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |F_n(x) - F(x)|^2 \psi(x) f(x) dx, \quad \psi(x) = \frac{n}{F(x)\{1 - F(x)\}}, \quad F_n(x) = \frac{i}{n}$$

( $n$  はデータ数、 $F(x)$ 、 $f(x)$  はフィットした分布の分布関数および密度関数、 $F_n(x)$  は ECDF、 $i$  はデータの累積ランク)

で定義される A-D 距離を用いて、分布の本体および裾の両方で当てはまり度合いを判断する。K-S 検定では、 $D_n = \max(|F_n(x) - F(x)|)$  で定義される単一の最大距離のみで当てはまりを判断するため、発生確率の低い裾部分での当てはまりは考慮されにくい。安定分布のフィットをみる際には、A-D 検定が比較的良好に用いられる。

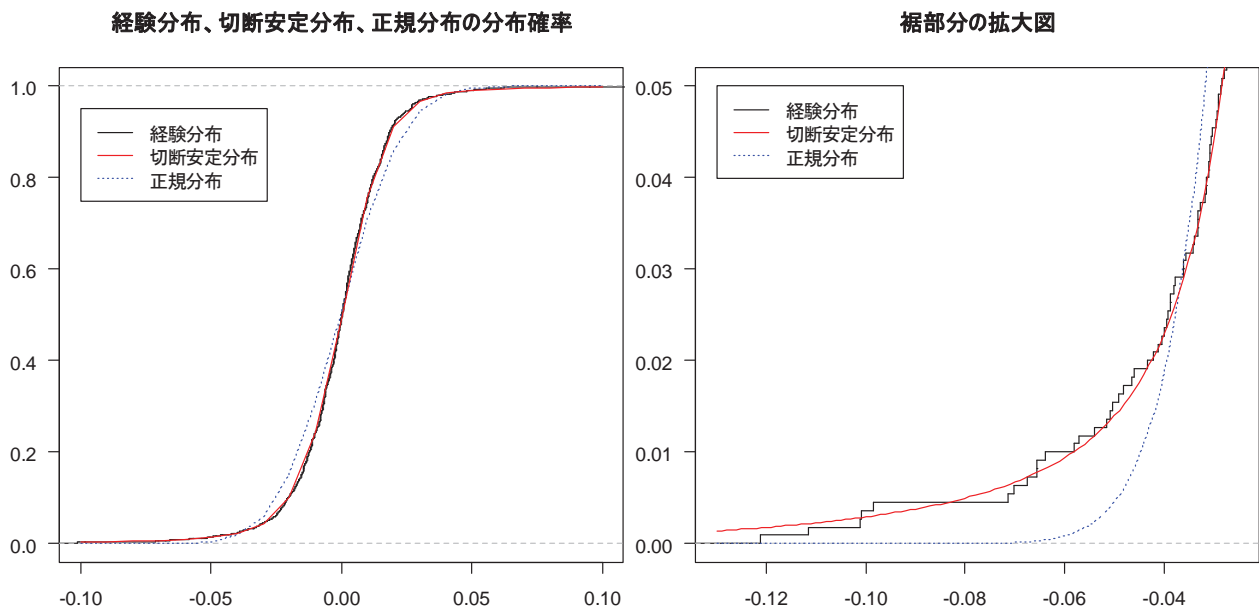
<sup>35</sup> 安定指数については、パラメータの表記法による差異はないので直接比較が可能。

<sup>36</sup> ECDF: empirical cumulative distribution function

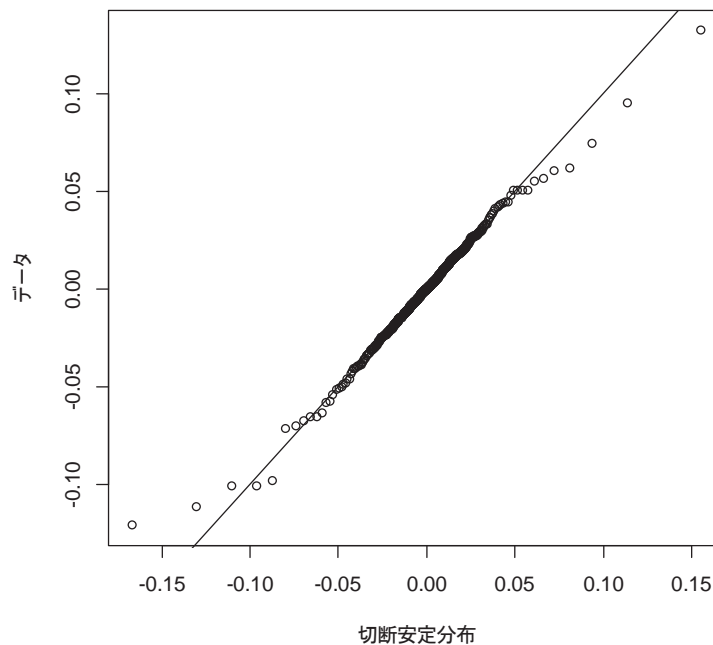
っているのに対し、切断安定分布はほぼ ECDF に沿ったものとなっている。

同様に、図表 7 (下図) の QQ プロットでも、切断安定分布の裾部分における当てはまりは図表 2 (右) の正規分布よりも改善している。

図表 7 切断安定分布による日経平均株価 (日次収益率) の分布関数の近似



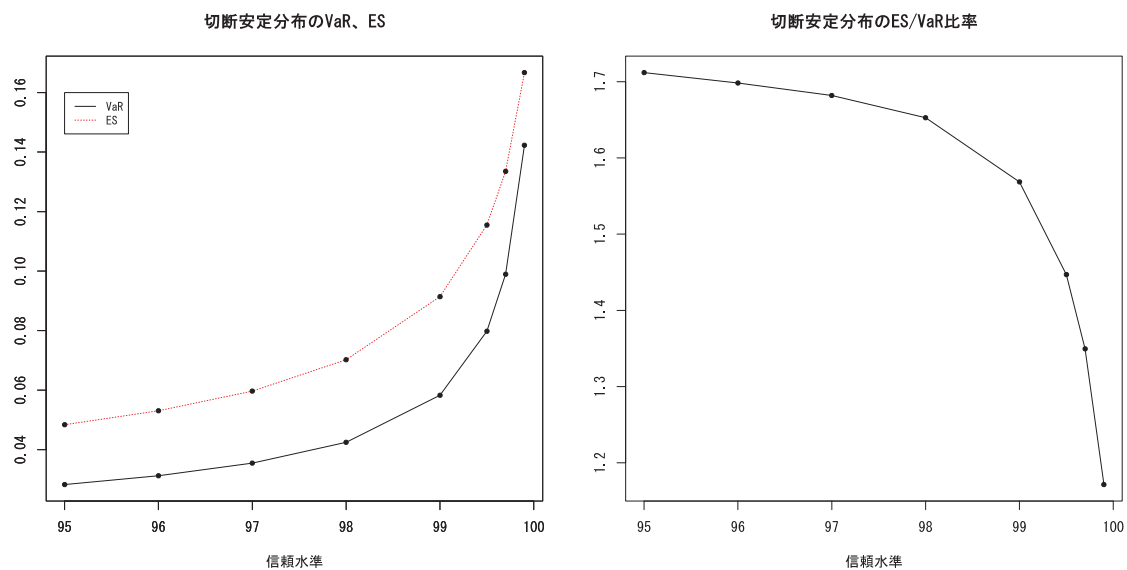
切断安定分布で近似した場合のQQプロット



### (3) 切断安定分布による VaR、ES の計算

切断安定分布で収益率を近似した場合、正規分布の場合のように VaR、ES の解析的な計算式を示すことは困難なため、いずれも数値計算により算出した<sup>37</sup>。図表 8 は、切断安定分布の VaR、ES および ES/VaR の比率を複数の信頼水準に関して計算した結果である。信頼水準は、95%~99%について 1%毎、99%を超える水準について、99.5%、99.7%、99.9%の 3 水準（合計 8 水準）に設定した。

図表 8 推計した切断安定分布から計算した VaR・ES、ES/VaR 比率



「ES は VaR よりも保守的なリスク指標である」（Basel Committee on Banking Supervision [2012]）とされるように、(1)式の定義により ES は同一の信頼水準において常に VaR よりも大きい値を取る。図表 8（左）でも全ての信頼水準において ES の方が VaR よりも大きい。信頼水準が上がるほど、VaR、ES ともに値が大きくなり、推計した切断安定分布の場合は、特に信頼水準が 99%を超えると VaR、ES とも急激に大きくなっている。一方、図表 8（右）で示したように、ES/VaR 比率は信頼水準が上がるほど小さくなり、1 に近づく。

VaR は、「VaR を超えるテイルリスクの情報が含まれない」点が短所の一つとされ、ES はその点をカバーするリスク指標とされることが多い。ES/VaR 比率は、その値が大きいほど、VaR では表せないテイルリスクが存在し、それが ES によって捉えられていると解釈できる。反対にその比率が 1 に近いほど、VaR

<sup>37</sup> 具体的には、切断安定分布の推計時に用いた密度関数（脚注 32）を用いて、(1)式および脚注 13 に示したリスク量の定義式の通りに数値積分により計算した。

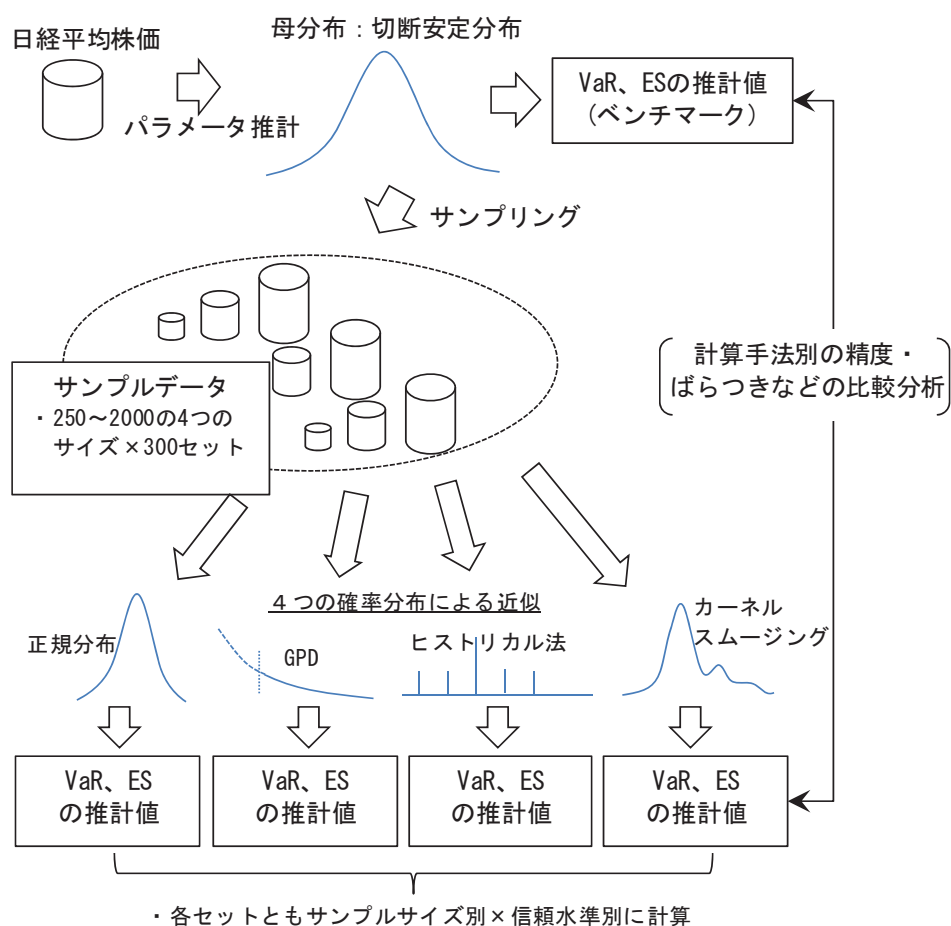
と ES が持つ情報には差がないことになる (VaR では表せないテイルリスクは小さい)。日経平均株価データから推計した切断安定分布の場合、図表 8 (右) に示したように、98%の信頼水準までは ES/VaR 比率は比較的緩やかに低下し、99%を超える信頼水準では急激に低下している。すなわち 99%を超えるような高い信頼水準では、ES が VaR に対して有するテイルリスクに関する追加的な情報は相対的に小さくなっている。

#### 4. ランダム・サンプルに基づくリスク量計算の数値シミュレーション

##### (1) 数値シミュレーションの概要

3 節では、日経平均株価の日次収益率から無条件モデルの母分布として切断安定分布を推計した。本節では、推計した切断安定分布を用いて、一般的なリスク量計測手法に関して、いわゆる「モデル・リスク」(損失発生の可能性を誤って評価してしまうリスク)の観点からシミュレーション分析を行う。具体的には、まず、推計した切断安定分布を「真の分布」とみなして、3 (3) で計算した切断安定分布の VaR、ES をベンチマーク (正しいリスク量) と位置づける。次に、母分布からのランダム・サンプリングによりファットテイル性の強い複数のサンプルデータセットを生成する。そのデータセットに対して一般的に用いられる 4 つのリスク計測手法 (異なる確率分布による近似) によりサンプルサイズ・信頼水準別に VaR、ES を計算する。計算したリスク量のベンチマークとの比較や推計値の計測手法間の相互比較を通じて、各計測手法の特徴点や計算上の留意点などを明らかにする。シミュレーション分析の大まかな流れを図表 9 に示した。

図表 9 数値シミュレーションの概要



本シミュレーションでは、日経平均株価を近似した確率分布を用いたサンプリングを行っているため、現実に近い<sup>38</sup>サンプルデータが複数生成されることができる。通常、ヒストリカルシミュレーションでは、重複せずにデータ数を増やすには過去へ遡って観測期間を延ばすしかないが、この方法では比較的最近のデータから推計した確率分布から異なるサイズのサンプルデータを自由に生成することができる（図表 10）。こうしたサンプリングにより、複数のサンプルデータを用いてリスク量計算を行うことで、計算手法による推計値の差異や推計値のばらつきを観察することができる。

また、本シミュレーションでは、切断安定分布の切断点を推計時と同様（前日比±20%相当）に設定した<sup>39</sup>。この切断点は、図表 10 に示したように観測さ

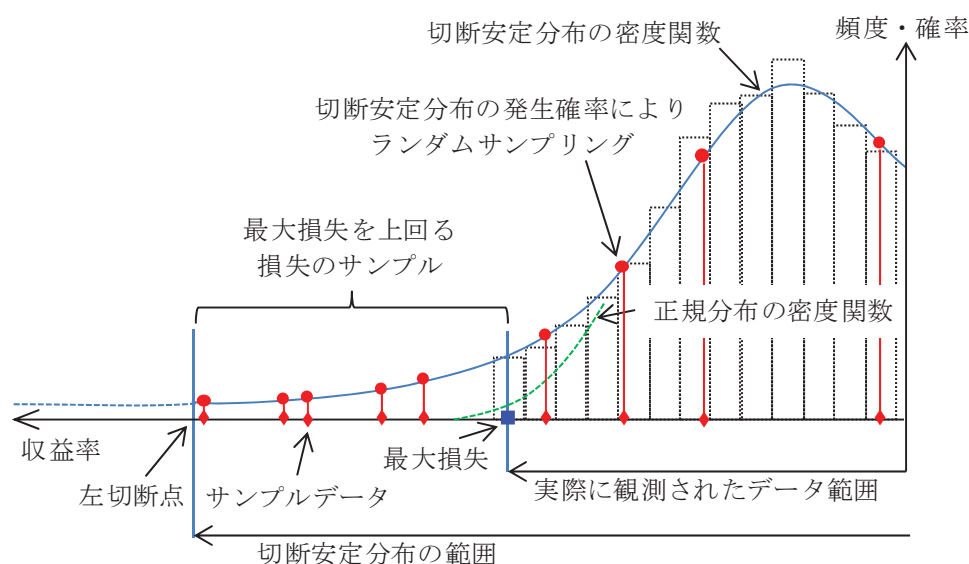
<sup>38</sup> 「現実に近い」とは、あくまでも無条件分布における日次収益率のサンプルの発生頻度が現実のデータに近いという意味であり、サンプルの日次収益率から計算して得られる株価のサンプルパスが「現実（日経平均株価のパス）に近い」ことを意味しない。

<sup>39</sup> 本稿のデータでは、切断した裾部分（図表 10 に示した切断点の外側部分＜左右合計＞）の確率は、切断しない安定分布の確率で 1%程度に相当した。切断安定分布では、左切断

れたデータの最大損失を大幅に超える点に位置している。したがって、切断安定分布からのサンプリングにおいては、実際に観測された最大損失を超える損失<sup>40</sup>が発生する。この時、最大損失から切断点までの領域における損失の発生確率は、正規分布より高く見積もられている<sup>41</sup>。

このように、本シミュレーションでは、観測期間中の最大損失を超えるストレスシナリオが含まれ、その発生頻度は推計した確率分布（切断安定分布）を根拠に一定の合理性を持って設定されている。これは、実データを用いたヒストリカルシミュレーションでは困難な設定である。

図表 10 切断安定分布からのサンプリングのイメージ



シミュレーションに使用するデータとして、推計した切断安定分布から棄却法 (rejection sampling) によるランダム・サンプリングで、250、500、1000、2000のサイズのサンプルを各 300 セット用意した。サンプルサイズは、250 が 1 年程度の時系列データに相当し、サイズの差は観測期間の差に対応すると考えた。

リスク量計算における信頼水準については、実務では VaR の信頼水準は 99% など比較的高い水準に設定されることが多い。一方、ES の場合は、必ずしも一般的な信頼水準の設定は明らかではない。そこで 3 節と同様に、VaR、ES ともに 95~99% までは 1% 毎、99% 以上では 99.5、99.7、99.9% とし、計 8 つの水準

点から右切断点までの区間で確率が定義される。

<sup>40</sup> 切断安定分布からのサンプリングは、実際に観測された最大損失を超える損失をサンプルに含むという点でストレス状況を加味したものとなっている。

<sup>41</sup> 具体的には、切断点までの損失の発生確率がべき乗則に従うと想定している（詳細は、「補論 2 安定分布の特徴と裾の切断」を参照されたい）。

を設定した。

VaR、ES の計算手法としては、実務に用いられているなどの観点からパラメトリック<sup>42</sup>な手法として、正規分布近似、一般化パレート分布（GPD）近似、ノンパラメトリックな手法として、ヒストリカル法、カーネルスムージングの計4つの手法を用いることとした。

計算結果については、計算手法毎に、母分布の切断安定分布から計算した VaR、ES（ベンチマーク）に対する推計値の水準の差および推計値のばらつき度合いの比較<sup>43</sup>、相対的なばらつきを示す変動係数（標準偏差／平均）の比較、同一の信頼水準における ES／VaR 比率の比較について、それぞれサンプルサイズ別・信頼水準別に整理した。

## （2） 確率分布の近似に基づくリスク量計測手法の概要

ここでは、（1）で示した4つのリスク量計測手法について簡単に説明する。以下の説明は、各手法についてより詳細に記述した「補論4 確率分布の近似による VaR、ES の計算手法の詳細」の要約となっている。

シミュレーション分析においては、ランダム・サンプリングにより生成した個々のデータセットに対して、各手法で想定する確率分布のパラメータを推計するなどして、個別に確率分布を特定する（サンプルデータセット毎に分布のパラメータは異なることが予想される）。こうして特定された確率分布の密度関数や分布関数を用いて VaR、ES を計算し、切断安定分布から計算したベンチマークの VaR、ES と比較する。

### ① 正規分布近似

正規分布近似の場合、VaR、ES は正規分布  $N(\mu, \sigma)$  のパラメータを用いて解析的に計算できる<sup>44</sup>。具体的には、

---

<sup>42</sup> 本稿では、分布のパラメータ（母集団の特性を規定する母数）を推計し、そのパラメータを用いて VaR、ES を計算する方法をパラメトリックな手法、母集団の分布型について一切の仮定を設けずに VaR、ES を計算する方法をノンパラメトリックな手法としている。

<sup>43</sup> リスク量計測の妥当性を評価する場合、実務では実際のヒストリカルデータを用いたバックテストが行われることが多い。本稿では、サンプリングを行う確率分布が予め特定されているので、確率分布から直接計算したリスク量を基準に比較検証を行っている。

<sup>44</sup> ES の計算式の導出については、山井・吉羽[2001a]で詳しく説明されている。



$$\begin{aligned} VaR_p &= -\mu - \sigma z_{1-p} \\ ES_p &= -\mu + \sigma \frac{\phi(z_{1-p})}{1-p} \end{aligned} \quad (5)$$

$\mu$ 、 $\sigma$  は収益率の平均・標準偏差、 $p$  は信頼水準  
 $z_{1-p}$  は標準正規分布の  $100 \times (1-p)$  パーセンタイル  
 $\phi(\ )$  は標準正規分布の密度関数

という簡単な式で計算できる。

正規分布による近似は、実際のテイル事象の発生状況に関係なく、分布の裾の形状を常に固定している。3節で示したように、正規分布は安定分布の安定指数が2に等しい場合に相当する。この場合、分布の裾における確率密度は指数的に減衰するため、ファットテイルなデータに正規分布を当てはめることによって、リスク量の推計値は歪みを持つことが予想される。また、(5)式における平均  $\mu$ 、標準偏差  $\sigma$  は信頼水準によらず一定であるので、信頼水準の違いによるリスク量のばらつきは限定的であると予想される。

正規分布近似は、計算が簡便な反面、分布の裾の形状を固定することになるため、事前にデータの正規性をしっかりと検証しておくことが特に重要となる。

## ②GPD 近似

極値理論 (Extreme Value Theory、EVT) を応用することで、確率分布の全体ではなく、裾部分のみを推定することができる。すなわち、確率分布をある点 (閾値  $u$ ) を境に分布の裾部分とそれ以外の部分に分け、裾部分の形状のみに絞って分布の形状を特定する。閾値に対する超過分布は、一般化パレート分布 (generalized Pareto distribution、GPD) で近似して応用されることが少なくない。GPD の分布関数および密度関数は、形状パラメータ  $\xi$  と尺度パラメータ  $\sigma$  を用いて表現される。

GPD 近似によって VaR、ES を求めるには、これらのパラメータを推計する必要があるが、その際、分布の裾部分を特定する閾値  $u$  を決めなければならない。分布の裾を定義する上で、閾値  $u$  の水準は十分に高くなければならないが、高すぎる場合には閾値  $u$  を超えるデータの数が少なくなり、パラメータが安定的に推計できなくなるという問題がある。本稿では、最も単純な決め方として、下位 10% のデータを閾値を超えるデータとみなした<sup>45</sup>。この場合、閾値はデー

<sup>45</sup> サンプルデータからパラメータを推計した際、下位 10% の閾値設定では、一部で制約条件付きの推計がうまくいかない例がみられた。そうしたケースでは、同比率を変更して再推計した。詳細は、「補論4 確率分布の近似による VaR、ES の計算手法の詳細 (2) GPD 近似 (脚注 86)」を参照されたい。

タサンプルによって異なるため、リスク量の推計値およびそのばらつきにも影響を及ぼす可能性がある。本稿では、GPDのパラメータは最尤法によって推計した<sup>46</sup>。GPD近似によるVaR、ES、ES/VaR比率の計算式は以下の通り。

$$\begin{aligned}
 VaR_p &= \begin{cases} u + \frac{\sigma}{\xi} \left( \left( \frac{n}{n_u} (1-p) \right)^{-\xi} - 1 \right), & \xi \neq 0 \\ u - \sigma \ln \left( \frac{n}{n_u} (1-p) \right), & \xi = 0 \end{cases} \\
 ES_p &= \frac{VaR_p}{1-\xi} + \frac{\sigma - \xi u}{1-\xi}, \quad \xi < 1 \\
 \frac{ES_p}{VaR_p} &= \frac{1}{1-\xi} + \frac{\sigma - \xi u}{(1-\xi)VaR_p}
 \end{aligned} \tag{6}$$

$n$  はデータサンプルサイズ

$n_u$  は閾値を超えるデータの数（本稿では  $n_u = n \times 0.1$ ）

この手法は、正規分布近似の場合と同様、分布のパラメータを使って VaR、ES を計算できるが、VaR の計算式には分布の形状に関するパラメータ  $\xi$  が含まれている点が正規分布の場合とは異なる。また、ES の計算式には VaR が含まれており、VaR の推計値が直接 ES の推計値に影響を与える。

GPD 近似の注意点としては、パラメータの推計を最尤法で行う場合、特に小サンプルでは安定した推計値が得られない可能性が高いことが挙げられる。その場合、リスク量の推計値が極端に大きな値となったり、逆に過小推計になったりするなど、不安定性が問題となることがある。こうした問題を回避するには、十分なデータ数を確保することが重要となる。

### ③ヒストリカル法（ヒストリカルシミュレーション）

ヒストリカル法<sup>47</sup>は、データの経験累積分布関数（ECDF）から指定された信頼水準に対応する分位点として VaR を求める手法であり、分布に関するパラメトリックな前提は何ら必要としない。一般的なヒストリカル法では、信頼水準

<sup>46</sup> GPD のパラメータ推計については、PWM(Probability-Weighted Moments)法が用いられることもある。本稿では試していないが、状況によっては PWM による推計の方が安定した推計値が得られる場合もあり、最尤法が唯一かつ最善の推計方法という訳ではない。

<sup>47</sup> 本シミュレーションにおけるヒストリカル法は、ランダム・サンプルを対象としており、「時系列データ」を扱っている訳ではない。その意味で、本来は、「経験分布による近似」と表記する方が適切と思われるが、一般的な呼び名として便宜的に「ヒストリカル法」という用語を用いた。

$p$  についてこの ECDF の一般化逆関数  $F_n^{-1}(\cdot)$ <sup>48</sup>により実際に発生したデータの中から VaR の値（標本分位点）を得る。ES は、VaR を超えるデータの単純平均として計算される。

$$\begin{aligned} \text{VaR}_p[X] &= F_n^{-1}(1-p), \quad 0 < p < 1 \\ \text{ES}_p[X] &= \frac{1}{1-p} \sum_i \{-X_i \mid -X_i \geq \text{VaR}_p[X]\}, \quad 0 < p < 1 \end{aligned} \quad (7)$$

ヒストリカル法は、サンプルサイズ  $n$  が小さい時には必ずしも近似がうまくいかないことがある。また、リスク量計算に ECDF を用いる際、観察されたデータの最大値・最小値を超える収益率変動の確率は上記の定義によりすべてゼロとなってしまう。しかし、実際には、そうした値が生じる確率はゼロではないため、特にサンプルサイズが少ない場合にはリスク量の過小推計などの問題が生じる可能性がある。

#### ④カーネルスムージング

カーネルスムージングとは、「確率分布の平滑化」の意味であり、観察されたデータを元にカーネル関数（スムージングカーネル）と呼ばれる密度関数の役割を果たすものを複数組み合わせることで、連続した密度関数（カーネル密度関数）を構築する<sup>49</sup>。ヒストリカル法では、基本的に実際に発生したデータに確率が等しく付与されるのに対し、カーネルスムージングでは、実際には発生していない値も含めてすべての収益率変動に確率を与えてリスク量計算を行う。

カーネル密度関数は、一般的に次のように定義される。

$$\hat{f}(x; X_{i=1, \dots, n}) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h}\right) \quad (8)$$

$\hat{f}(x; X_{i=1, \dots, n})$  はカーネル密度関数、 $K(\cdot)$  はカーネル関数、

$X_i$  は  $i$  番目のデータに対応する確率変数、

$h$  はバンド幅（平滑化パラメータ）

カーネルスムージングでは、個々のデータの位置を中心にして左右対称な滑らかな密度関数をデータの数だけ作成し、全体の密度関数はこれらの密度関数を合計してスケールしたものとなる。任意の点の確率密度は、近接する周

<sup>48</sup> ECDF には必ずしも逆関数が存在しない場合もあるため、一般化逆関数（McNeil et al. [2005] 2.12）を用いた定義とした。

<sup>49</sup> 本稿では扱っていないが、カーネルスムージングを順序統計量の密度関数の推計に応用することでヒストリカル法の推計効率の改善につなげるアプローチもある（Butler and Schachter [1996]）。

辺のデータの位置における複数の密度関数の加重和となっている（混合分布による近似）。この個々の密度関数の周辺への広がり度合いを設定するのがバンド幅  $h$  である。カーネル関数の候補には、複数の関数が存在するが、本稿では、一般的に用いられることが多いガウシアンカーネルを用いた<sup>50</sup>。

カーネルスムージングでは、カーネル関数の選択とバンド幅の決定を行わなければならない。カーネル関数の選択は、通常、データ数が十分あれば最終的に密度関数にはそれほど影響しないことが知られている（Yu et al. [2010]）。一方、バンド幅はスムージングの程度を決める重要なパラメータであり、密度関数の形状を大きく左右する。このため、バンド幅の設定がリスク量計算にも大きな影響を及ぼす。バンド幅の設定には、数多くの手法が存在するが、比較的良好に使われるのは、Silverman [1986]による次の計算式(Silverman's rule of thumb)である。

$$h = \left( \frac{4\hat{\sigma}^5}{3n} \right)^{1/5} \approx 1.06\hat{\sigma}n^{-1/5} \quad \hat{\sigma} \text{ は標本標準偏差} \quad (9)$$

本稿では、上記の計算式を用いてバンド幅を設定した。これらの設定は、本来は、実際のデータをみながら必要に応じて修正を加えて調整することが望ましいが、シミュレーションでは全て同一の設定とした。

VaR については、推計したカーネル密度関数から分布関数を計算し、その逆関数を用いて信頼水準に対応する VaR 値を計算した。ES については、推計した VaR 値と定義式(1)から数値積分によって計算した。

### (3) VaR、ES の推計結果と推計手法間の比較

シミュレーションでは、4つの計算手法によって VaR、ES の2つのリスク量を計算し、それらの平均とばらつき（標準偏差、95%区間<sup>51</sup>）を計算した（すべての結果は、後掲の別紙図 A1～図 A13 のグラフを参照されたい）。

シミュレーション結果を解釈する上で重要と思われる留意点について予めまとめておく。

まず、切断安定分布を用いたランダム・サンプリングのため、サンプルデータセットは観測された最大損失以上（かつ切断点以下）の損失を含むが、切断

<sup>50</sup> ガウシアンカーネルを使用する場合、カーネル密度関数は、複数の正規分布を混合させた混合正規分布に類似したものと考えることができる。

<sup>51</sup> サンプルデータセット毎に計算される300個のリスク量の集合を昇順に並べ、その2.5%および97.5%点（経験分布）を求めて95%区間とした。

点以上の損失は含まない（図表 10）。このサンプルデータセットに対して、パラメトリックな手法（正規分布近似、GPD 近似）では、確率変数の定義域に関して何らの制約も課さずに分布のパラメータを推計する<sup>52</sup>。このため、推計されたパラメータは切断前の安定分布の形状（図表 10 の切断安定分布の密度関数の左切断点を超える点線部分を含む）を反映すると考えられ、サンプリングにおける切断処理がサンプルデータセットの VaR、ES のリスク量計算に影響を及ぼす可能性がある。正規分布近似の場合、裾部分での確率の減衰のスピードが速いため、切断点よりも十分に内側の領域でテイル事象の発生確率は既に非常に低い水準にまで低下している。こうしたことから、正規分布近似では事実上、切断処理の影響はみられなかった。一方、GPD 近似では、裾部分の確率密度の減衰は分布の形状に依存するため、実際に一部で切断の影響がみられた。ノンパラメトリックな推計では、ヒストリカル法の場合、確率変数は $-\infty \sim +\infty$ の区間ではなく、サンプルデータセットの最大・最小の範囲（サンプルデータの最大損失は、観測されたデータの最大損失よりは大きい、切断点よりは小さい（図表 10））で定義されるので、安定分布の裾の切断は、VaR、ES の計算に直接影響しない。カーネルスムージングでは、サンプルデータの最大損失を超える損失の密度も計算されるため、切断処理はリスク量計算にも若干の影響を与える可能性があるが、目立った影響はみられなかった。これは、本稿で選択したガウスカーネルでは、サンプルデータの最大損失の外側における確率は早い速度で減衰するためである。

次に、各計算手法における各種設定の与え方については、正規分布近似では、標本平均・分散のみの推計、ヒストリカル法ではデータの発生頻度を数えるだけであるなど、これら 2 つの手法では、計算上、複雑な調整は不要である。このため、同一データの VaR、ES のリスク量の計算に関しては、常に同じ値が得られるという意味で再現性が高い。一方、GPD 近似、カーネルスムージングについては、GPD 近似では分布の裾部分を特定する閾値の設定、カーネルスムージングではカーネル関数・バンド幅の選択という複雑な調整が必要になる。VaR、ES の計算はこれらの設定に大きく依存するので、比較分析の際はこれらの設定をできるだけ固定しておくことが望ましい。

本稿のシミュレーションでは、カーネルスムージングに関しては、全サンプルデータに対して同一のカーネルおよびバンド幅の計算方式を用いてリスク量を計算した。GPD 近似については、閾値の設定方法を可能な限り同じ方法で計

---

<sup>52</sup> パラメトリックな推計でリスク量を計算する場合に、安定分布の裾の切断と同様、分布の裾を切断し、損失の上限を設けることも可能である。本稿では、通常のリスク量計算ではそうした対応はとらないと考え、正規分布近似、GPD 近似とも裾を切断せずにリスク量を計算した。

算したが、一部のサンプルではパラメータ推計の都合上、設定を変える必要が生じた。両手法におけるこうした設定は、本来は、実際の個別のデータをみながら最適な設定を選択する必要があり、そうすることでリスク量計算の精度を向上させることも可能になる。本稿では、最も単純かつ一般的な設定を選択して計算を行ったが、リスク量の計算手法に関するより詳細な比較を行うには、こうした前提・調整なども含めたケース分けが必要となる。

図表 11 に 4 つの計算手法に関して、推計対象のパラメータ数や計算の難易度等に関する簡単な比較を示した。計算の難易度順にみると、まず、正規分布、ヒストリカル法は前述のように特別な設定や複雑な計算処理は不要なため、計算は容易である。カーネルスムージングはバンド幅の設定が難しい。GPD 近似は、閾値の設定が難しい上、パラメータの推計値を安定させるのは容易ではない(特に最尤法の場合)。安定分布近似は、推計するパラメータが 4 つと多い上、推計が不安定になることも多いなど、いろいろと難しい点が多い。

図表 11 4 つの計算手法の比較

	推計対象の パラメータ数	推計時の要調整事項	推計の難易度 (複雑さ・安定性等)
正規分布近似	2	なし	容易
GPD 近似	2	閾値の設定	難しい
ヒストリカル法	0	なし	容易
カーネルスムージング	0	カーネルの選択、 バンド幅の設定	やや難しい
(参考) 安定分布近似	4	切断安定分布の場合は 切断点の設定が必要	かなり難しい

なお、本シミュレーションは、あくまでも切断安定分布を仮定した日経平均株価の日次収益率のモデルから i.i.d. なランダム・サンプリングを行い、その一例に対して別の確率分布を仮定してリスク計測した場合にどのような影響があるかを調べたものである。したがって、以下でまとめた分析結果は他のいかなる状況に対しても常に当てはまるという意味で一般性が確認されたものではない点には注意が必要である。

4 つの計算手法に関するシミュレーション結果の主な特徴を図表 12 にまとめておく。また、シミュレーション結果の詳細は、図表 13 に示した別紙の各図表に表示している。

図表 12 ランダム・サンプルに基づく VaR・ES の推計結果と推計方法間の比較

		パラメトリック		ノンパラメトリック	
		正規分布近似	GPD近似	ヒストリカル法	カーネルスムージング
サンプル数の増加		<ul style="list-style-type: none"> <li>ベンチマークとの乖離は縮小しない</li> <li>多いほどばらつきは小さい</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>多いほどベンチマークに近く、ばらつきは小さくなる</li> <li>ES/VaR比率もベンチマークに近づく</li> </ul>		
信頼水準の上昇		<ul style="list-style-type: none"> <li>ばらつきへの影響は小さい</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>高いほどベンチマークからの乖離、ばらつきが拡大する傾向がある</li> <li>特に99%を超える水準で、乖離・ばらつきが目立つ</li> </ul>		
精度	VaR	<ul style="list-style-type: none"> <li>低い信頼水準で過大、高い信頼水準で過小</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>ほぼベンチマークに近い</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>ほぼベンチマークに近い</li> <li>小サンプルでは VaR、ESとも高い信頼水準で最大損失に一致する場合がある</li> <li>ESはやや過小傾向</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>ほぼベンチマークに近い</li> <li>VaRは小サンプルでやや過大傾向</li> <li>ESはヒストリカル法の過小推計(左記)を補正し、よりベンチマークに近い</li> </ul>
	ES	<ul style="list-style-type: none"> <li>全信頼水準で過小</li> <li>高い信頼水準ほど乖離が拡大する</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>ほぼベンチマークに近い</li> <li>高い信頼水準では過大(*)</li> </ul>		
ばらつき	VaR	<ul style="list-style-type: none"> <li>VaR、ESの間で、ばらつきの傾向に差はない</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>ESのばらつきがより大きい</li> <li>(ESの変動係数は4手法中最大、サンプル数制約も影響)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>VaR、ESともほぼ同じ傾向</li> <li>ESの方が相対的にばらつきが大きい</li> </ul>	
	ES				
ES/VaR比率	<ul style="list-style-type: none"> <li>ベンチマークのカーブと同様に信頼水準が高いほどES/VaR比率は1に近づくカーブを描く</li> <li>ヒストリカル法、カーネル法が最もベンチマークのカーブの形状に近い</li> </ul>				
	<ul style="list-style-type: none"> <li>カーブの形はベンチマークと全く異なる</li> <li>比率は、ベンチマークを大きく下回る</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>高い信頼水準ではベンチマークより高い水準に乖離する(*)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>小サンプルの場合、高い信頼水準で急低下し、1(VaR=ES)になってしまうこともある</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>ヒストリカル法に近いカーブ</li> <li>小サンプルでのヒストリカル法の問題(左記)は軽減される</li> </ul>	

(注) 精度はリスク量の平均値とベンチマーク(切断安定分布から計算したリスク量)との差、ばらつきはリスク量の平均値の標準偏差を意味する。サンプル数は、250、500、1000、2000(各300セット)。信頼水準は95~99%までは1%毎、99%以上では99.5、99.7、99.9%に設定した。

\*はランダムサンプリング時の安定分布の裾の切断の影響がみられたことを示す。

図表 13 シミュレーション結果の別紙詳細図表の一覧

[計算手法別のリスク量の平均水準、ばらつき]

計算手法	平均水準・ばらつき	
	VaR	ES
正規分布近似	図 A1	図 A2
GPD 近似	図 A3	図 A4
ヒストリカル法	図 A5	図 A6
カーネルスムージング	図 A7	図 A8

[相対水準、変動係数、ES/VaR 比率の計算手法別比較]

	VaR	ES
相対水準 (ベンチマーク=1)	図 A9	図 A10
変動係数 (標準偏差/平均)	図 A11	図 A12
ES/VaR 比率	図 A13	

### ①リスク量の水準・ばらつき

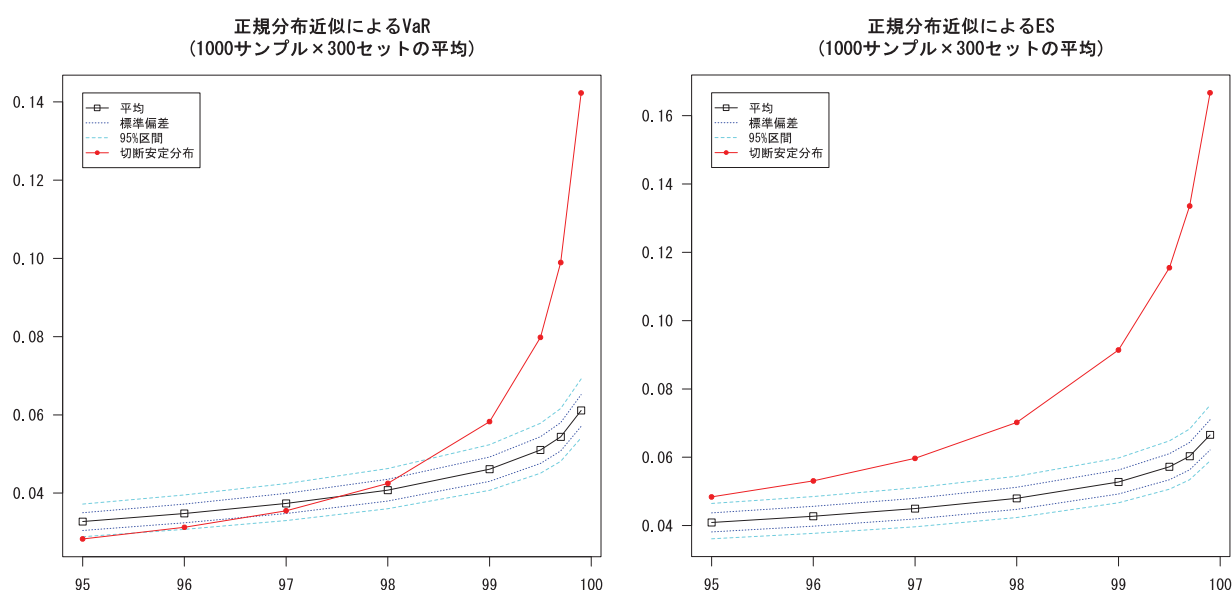
#### ア. 正規分布近似 (図表 14<抜粋>、図 A1・図 A2<全体>)

正規分布近似による VaR の平均は、いずれのサンプルサイズでも 95~97% の信頼水準ではベンチマーク比過大、98% 以上では過小の値となり、特に 99% 以上の高い信頼水準では著しい差がみられた (図表 14<左>)。これは、3 (1) で示したように、安定分布の安定指数を 2 に固定した正規分布近似では、分布の裾の形状を正しく再現できないことが原因と考えられる。こうした傾向は、ES ではさらに強く表れた (図表 14<右>)。ES の平均は、全信頼水準でベンチマーク比過小推計、特に 99% 以上の信頼水準で著しい差が生じた。1000 以上のサンプルでは、ベンチマークの ES は全信頼水準において推計値の VaR の標準偏差および 95% 区間の外側に位置している (図 A2)。

リスク量のばらつきについては、正規分布近似では、VaR、ES とも 99% を超える高い信頼水準でも 95% の信頼水準の場合とほとんど変わらない。サンプルサイズの影響については、VaR、ES ともサンプルが増えるほど全信頼水準で同じようにばらつきが縮小する傾向がみられた (図 A1、図 A2)。これは、サンプルサイズの増加に伴い標本分散の推計精度が上がったためと考えられる。



図表 14 正規分布近似による VaR、ES（抜粋）



イ. GPD 近似（図表 15<抜粋>、図 A3・図 A4<全体>）

GPD 近似による VaR の平均は、概ねベンチマークに近い結果となっている。仔細にみると、99%以上の高い信頼水準ではベンチマーク比過小推計になった（図表 15<左>）。ES の平均は 98%まではベンチマークとほぼ一致しているが、99%以上の信頼水準では過大推計が認められた（図表 15<右>、図 A4）。これは、GPD 近似において母分布（切斷安定分布）の裾の切斷を考慮せずに分布のパラメータが推計されたことが影響したと考えられる<sup>53</sup>。

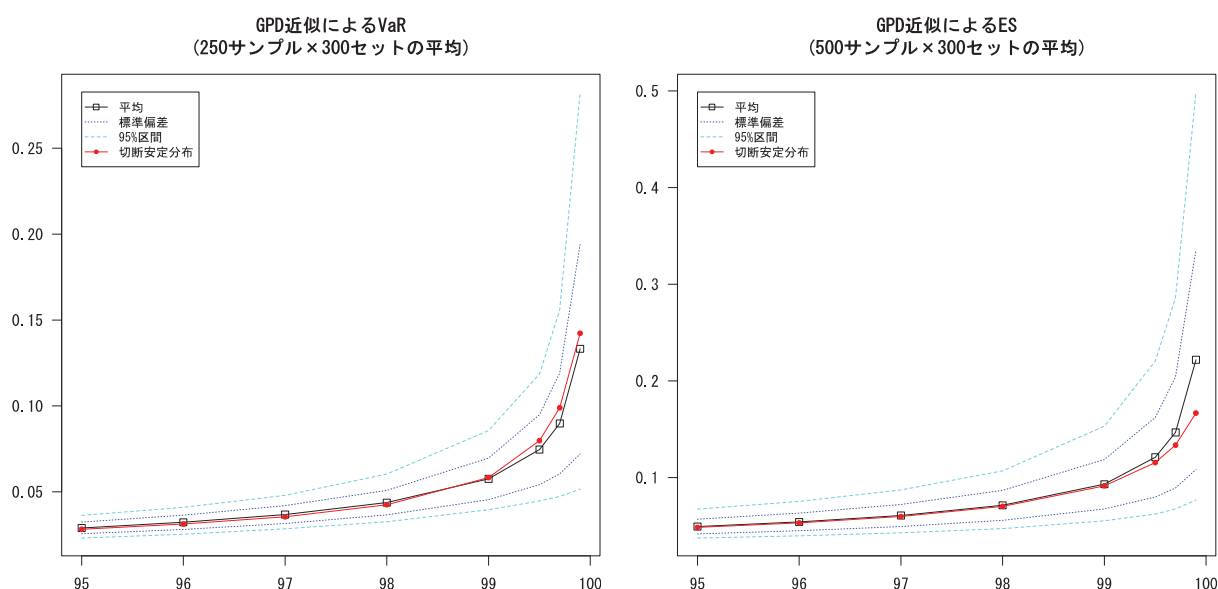
ばらつきについては、VaR、ES とも 99%を超える高い信頼水準でばらつきが急拡大しており、ES では特にその傾向が強い（GPD のパラメータ推計に関する分析は、「補論 4 確率分布の近似による VaR、ES の計算手法の詳細（2）GPD 近似」を参照されたい）。GPD 近似では、ES の推計式に VaR が含まれ、VaR の推計式に信頼水準が含まれるため、こうした結果になったと考えられる。ES の場合、99%以上の信頼水準では、標準偏差の推計区間が安定分布の切斷点（±0.2）を超えてしまうケースも生じた。GPD のパラメータ推計において、サンプル毎に閾値を変化させた<sup>54</sup>ことも影響したとみられるが、パラメータ推計自体も安定していないため、高い信頼水準でのリスク量計算が難しくなっている。

<sup>53</sup> 裾の切斷の影響は、VaR でも生じる可能性があるが、計測した信頼水準の範囲では、主に ES に目立った影響（過大推計）がみられた。

<sup>54</sup> 詳細は脚注 45 を参照されたい。

本稿では、GPDのパラメータを最尤法によって推計したが、特に小サンプルでは、十分な数の閾値を超えるデータが確保できないことが影響し、パラメータ推計が不安定となった（詳細は、「補論4 確率分布の近似による VaR、ES の計算手法の詳細（2）GPD 近似」を参照されたい）。GPD 近似によるリスク量計算には、十分な数のサンプルを確保することが重要となる。実際に、サンプルサイズの増加は、VaR、ES とも、リスク量のばらつきの縮小に大きく寄与した（図 A3、図 A4）。

図表 15 GPD 近似による VaR、ES（抜粋）



#### ウ. ヒストリカル法（図表 16<抜粋>、図 A5・図 A6<全体>）

ヒストリカル法による VaR の平均は、小サンプルから大サンプルまでベンチマークとの差は小さかった。99%を超える信頼水準ではやや過小推計の傾向がみられた<sup>55</sup>。一方、ES の平均については、低い信頼水準からベンチマーク比過小推計の傾向がみられ、信頼水準が上がるほど差が拡大した。

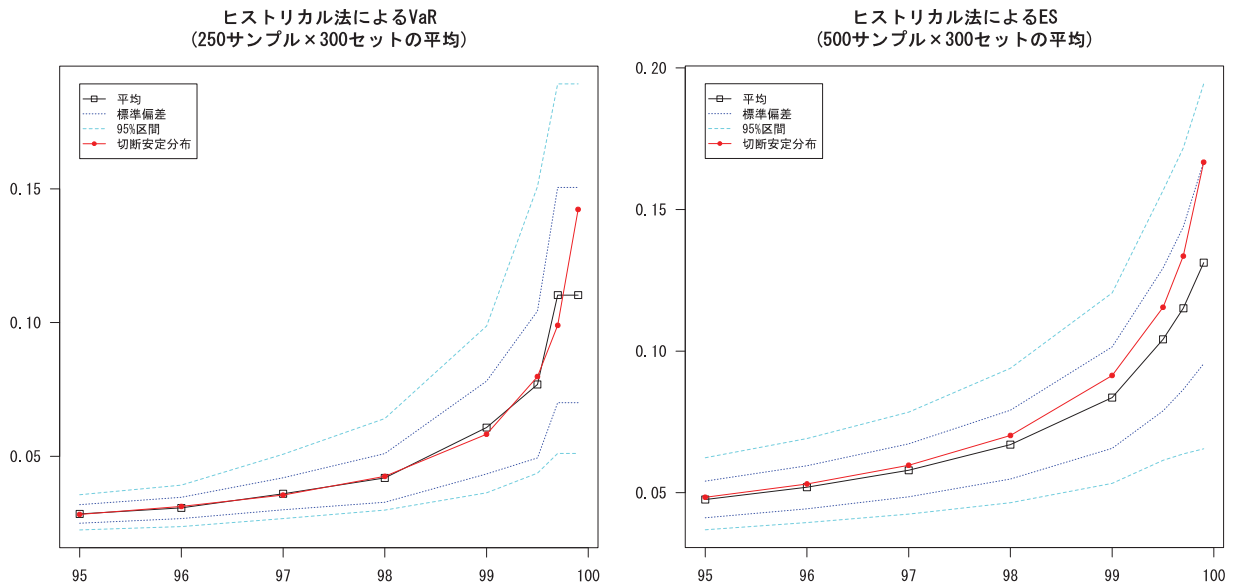
また、250 サンプルでは、99.7%と 99.9%の VaR（図表 16<左>）、ES（図 A6）は同一の値となった。この場合、一つのデータ（最大損失）のみでリスク量が決まっているため、信頼水準をさらに上げててもリスク量は変わらない。

リスク量のばらつきについては、正規分布の場合とは異なり、VaR、ES とも信頼水準が上がるほど、ばらつきが大きくなった。ばらつきの度合いは ES の方が相対的に大きく、特に小サンプルでは、ES は低い信頼水準でもばらつきが

<sup>55</sup> 安藤 [2004]でも同様の結果が報告されている。

目立つ（図表 16<右>）。サンプルサイズが大きくなるほど、VaR、ES のばらつきは全体的に縮小するが、信頼水準が高いほどばらつきが大きくなる傾向は維持された（図 A5、図 A6）。

図表 16 ヒストリカル法による VaR、ES（抜粋）

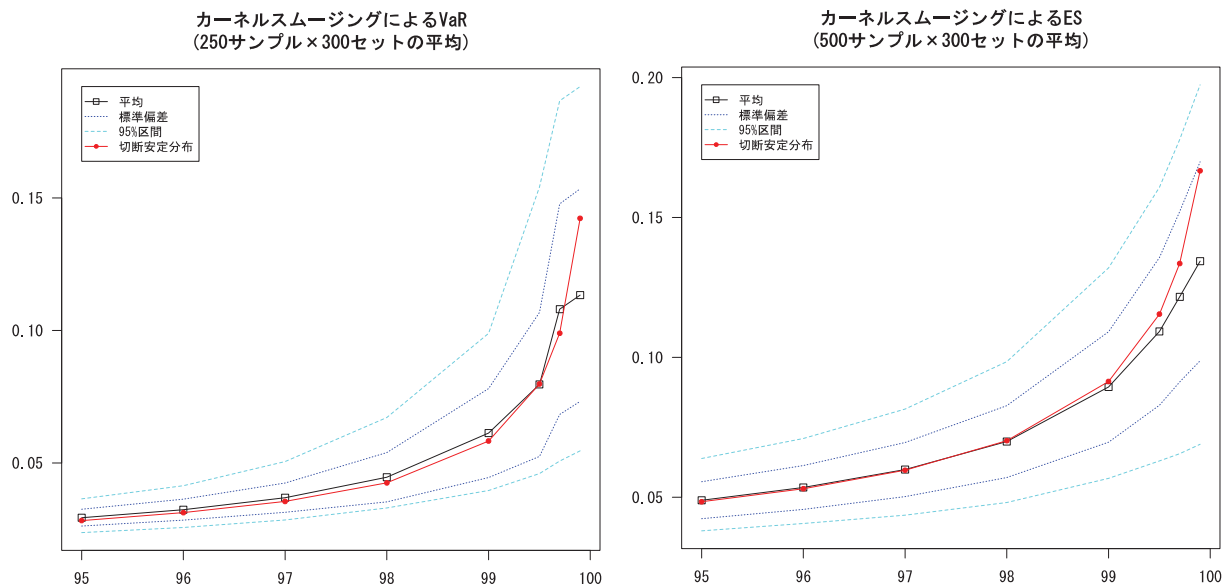


エ. カーネルスムージング（図表 17<抜粋>、図 A7・図 A8<全体>）

全体的にヒストリカル法の結果と非常によく似た結果となった。ベンチマーク対比のリスク量の平均は、VaR、ES ともヒストリカル法の結果と同様、ベンチマークからの乖離は小さかった。また、スムージングの効果により、250 の小サンプルでも 99.7%と 99.9%の VaR の平均の値は異なる値となった（図表 17<左>）。ES の平均については、98%以上の信頼水準でベンチマーク比過小推計になる傾向がみられた（図表 17<右>）。

ばらつきについては、VaR、ES とも信頼水準が上がるほど拡大しているが、サンプルサイズが大きいかほど全般的にばらつきは小さくなっている（図 A7・図 A8）。

図表 17 カーネルスムージングによる VaR、ES（抜粋）



②リスク量の相対水準（図表 18<抜粋>、図 A9・図 A10<全体>）

次に、ベンチマークのリスク量を1として基準化した相対的なリスク量により計算手法毎のリスク量の平均を比較した（図表 18）。

正規分布近似については、全サンプルサイズにおいて、VaR の平均のベンチマークからの乖離が目立った。正規分布以外の計算手法によるリスク量が1 近辺に位置しているのに対し、正規分布近似では、信頼水準の上昇に伴ってリスク量が1 を超える水準（過大評価）から1 を下回る水準（過小評価）に変化するカーブを描いている（図表 18<左>）。正規分布近似による ES については、全信頼水準で1 を下回る過小推計になっており、信頼水準が高いほど差が拡大している（図表 18<右>）。このことから、本シミュレーションで用いたファットテイルなデータに対しては、事前に予想された通り正規分布近似によるリスク量計測は精度が低いと言える<sup>56</sup>。

GPD 近似については、VaR の平均は、小サンプル（98%以下の信頼水準）でやや過大推計が目立つが、概ねベンチマークに近いリスク量となった。99%を超える水準では過小推計となった後、再び1 に近づくなど不安定な動きを示した。ES の平均については、95～99%の信頼水準では、250 の小サンプルを含めて1 に近い水準にあり、4つの手法の中で最も精度が高い（図 A10）。ただし、99%を超える水準では他の手法が過小推計なのに対し、GPD 近似は著しい過大

<sup>56</sup> 山井・吉羽[2001a]の分析においても同様の見方が示されている。

推計となった。これは、本シミュレーションにおいては、GPD 近似が切断前の安定分布の裾の近似となったためと考えられる。同じパラメトリック手法でも正規分布では裾の形状を固定しているため切断の影響がみられないのに対し、裾の形状が変化する GPD 近似では特に高い信頼水準で歪みが発生した<sup>57</sup>。

ノンパラメトリックな計測方法であるヒストリカル法とカーネルスムージングを比べると、95～99%前後の信頼水準では VaR、ES とともにカーネルスムージングの方がリスク量は相対的に大きくなった（図表 18、図 A9、図 A10）。すなわち、VaR は、ヒストリカル法がベンチマーク比 1 に近い水準となった一方、カーネルスムージングは小サンプルでは 1 を超える水準となった。これは、カーネルスムージングでは確率密度が高い領域では密度を下げる方向に、反対に低い領域では密度を上げる方向にスムージングの効果が働くため、ヒストリカル法との比較で裾部分での発生確率が引き上げられたことが作用したと考えられる（スムージングのメカニズムの詳細は、「補論 4 確率分布の近似による VaR、ES の計算手法の詳細」を参照されたい）。ES については、250、500 サンプルでヒストリカル法の過小推計が目立った一方、カーネルスムージングでは、同じサイズのサンプルでもほぼベンチマークに近い水準を示した（図 A10）。99%を超える高い信頼水準では、両手法とも VaR、ES のいずれもが過小推計となったが、ES の方が過小推計の度合いがより大きかった（図 A9、図 A10）。過小推計の度合いは、小サンプルでは差はないが、1000 サンプル以上ではヒストリカル法の過小推計が目立つ。

なお、250 サンプルの VaR については、ヒストリカル法において信頼水準による上下の振れがみられ、99%を超える高い信頼水準ではヒストリカル法、カーネルスムージングとも不規則な動きがみられた<sup>58</sup>（図表 18<左>）。

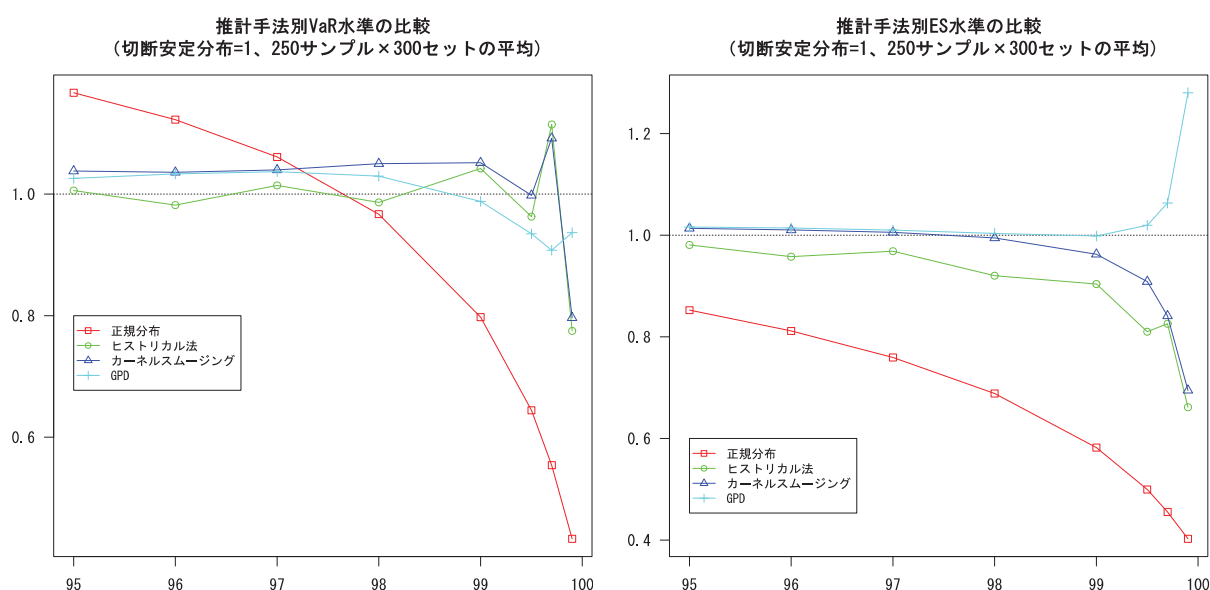
ベンチマークからの乖離は、すべてのケースでサンプルサイズが増えるにつれて全信頼水準で縮小し、99%を超える高い信頼水準でもサンプルサイズの増加はベンチマークからの乖離の縮小に寄与した。

以上のように、本シミュレーションのケースでは、正規分布以外の 3 つの手法は、ほぼ同程度のパフォーマンスを示した。細かな比較では、高い信頼水準での精度、ES の推計の安定性などの点でカーネルスムージングが比較的良好な結果を示した。

<sup>57</sup> 山井・吉羽[2001b]でも、安定分布を用いたシミュレーションで、ES の計算が VaR よりも不安定化しやすい傾向がある問題が指摘されている。

<sup>58</sup> 250 サンプルにおいて、ヒストリカル法、カーネルスムージングともに 99.5%と 99.7%で不規則な変化が観察された。これは、複数のサンプルで少数の非常に大きな損失が発生し、それより小さな損失との間に大幅な乖離が生じたことが分位点の水準決定に影響したためである。

図表 18 推計手法別の VaR、ES の水準の相対比較（抜粋）



なお、本稿のシミュレーション分析におけるリスク量計算のベンチマーク対比での当てはまりの良さは、リスク量計算の実務におけるバックテスト性能の高さを直ちに意味するものではない点には注意が必要である。例えば、比較的短期の観測期間の設定でヒストリカル法によりリスク量計算を行い、バックテストする場合、ボラティリティ変動などの影響で当てはまりが悪くなる場合がある。無条件モデルにおけるヒストリカル法では、こうした短期の変化はリスク量計算に反映され難い。

### ③リスク量の変動係数（図表 19<抜粋>、図 A11・図 A12<全体>）

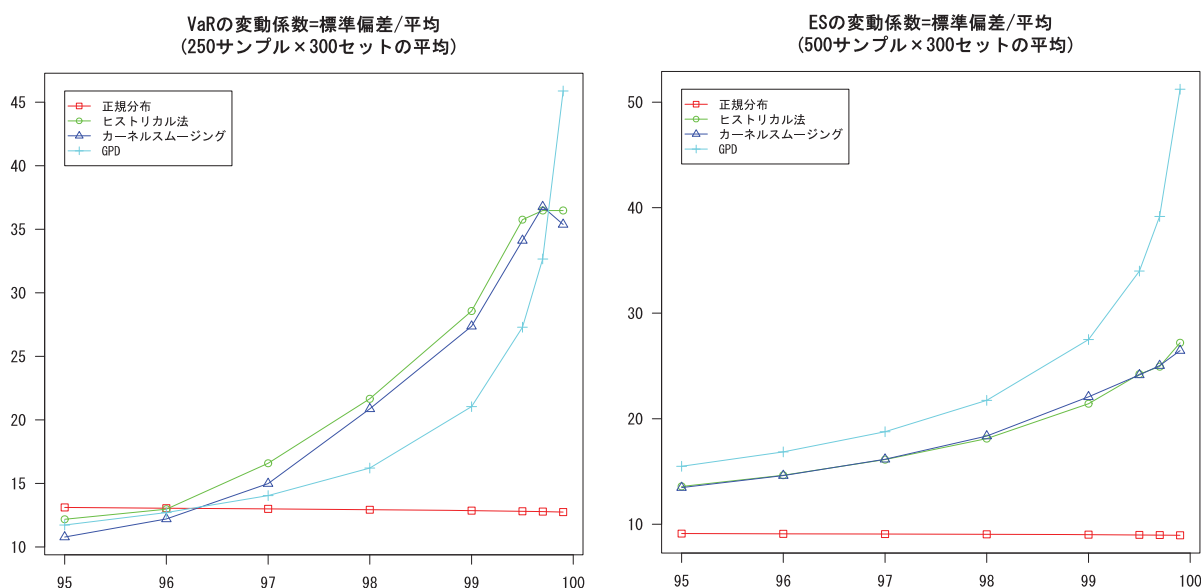
VaR、ES の相対的なばらつき度合いを変動係数（標準偏差／平均）により比較した。正規分布については、VaR、ES とも信頼水準の違いによる変動係数の変化はほとんど見られなかったが、サンプルサイズが大きくなるにつれて変動係数自体は低下した（図 A11・図 A12）。

GPD 近似については、まず、VaR は、99.7%までの信頼水準でヒストリカル法やカーネルスムージングよりも変動係数が小さい。ただし、99.9%では最も大きな変動係数となっており、高い信頼水準では不安定化しやすい傾向がみられた（図表 19<左>）。ES については、全信頼水準、全サンプルサイズで最も高い変動係数となっており、信頼水準が上がるほど不安定化した（図表 19<右>）。切断前の安定分布には分散が存在しないなど、ファットテイル性が強い。こうしたサンプルに対しては、GPD 近似による ES の推計は不安定化しやすい

可能性がある。GPD 近似では、分布の裾部分の形状の推定に用いるデータの数が限られるため（サンプルサイズの 10% に設定したため、2000 サンプルでも使えるデータは 200 に過ぎない）、分布の裾を決めるパラメータの推計を安定させるのに十分なデータを確保することはそもそも容易でない。VaR に比べ ES の推計値のばらつきがより大きいのは、ES が分布の裾の形状の違いにより大きく反応することも影響していると考えられる。

ヒストリカル法とカーネルスムージングの比較では、VaR では全てのサンプルサイズでカーネルスムージングの方が変動係数は小さくなったが、高い信頼水準では両者の差は縮小した（図表 19<左>）。ES では、両者の差はほとんどみられなかった（図表 19<右>）。

図表 19 推計手法別の VaR、ES の変動係数比較（抜粋）



#### ④ES/VaR 比率（図表 20<抜粋>、図 A13<全体>）

同一の信頼水準における ES/VaR 比率は、VaR では捉えられないテイルリスクを ES がどの程度捕捉しているかを示す指標と解釈できる。この比率が高いほど VaR では捉えられないテイルリスクがより多く存在する。一般的に、信頼水準が上がるほど、この比率は 1 に近づくと予想される。正規分布近似の場合、ES/VaR 比率のカーブは、サンプルサイズによる差は特にみられず、緩やかな低下となったが、全信頼水準でベンチマークを下回った（図表 20）。これには ES の過小推計がより大きく影響した。

GPD 近似については、95~98%の信頼水準においては、概ね良好な結果となったが、それ以上の信頼水準では、サンプルサイズに関係なく、ベンチマーク

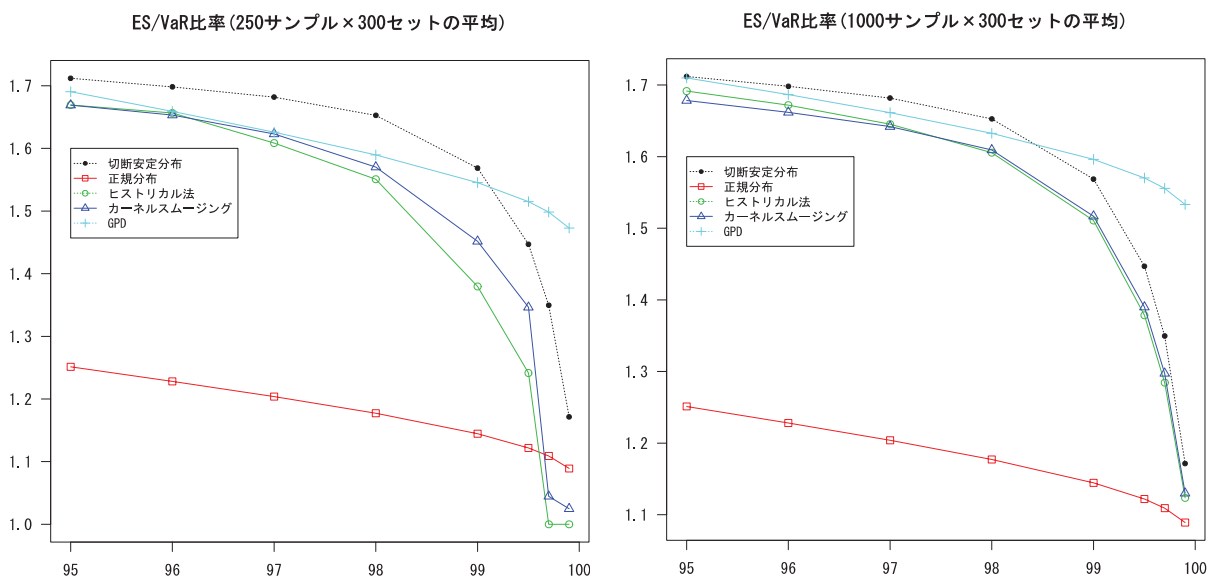
比過大な比率となった。これは、主に ES の過大推計による。

ヒストリカル法、カーネルスムージングは、ベンチマークに近いカーブを描いており、サンプルサイズが大きくなるほど、ベンチマークに近づいた。2000 サンプルでは、ほぼベンチマークの比率が再現されている。両者の比較では、特に 250、500 の小サンプルで、カーネルスムージングがよりベンチマークに近かった (図 A13)。

ES/VaR 比率のカーブは、99%を超える信頼水準で急速に低下している。これは、既に 99%を超える高い水準で VaR を計算している場合、リスク指標を ES に変えてもリスク量の増加幅自体は、低い信頼水準の場合と比べて小幅にとどまる可能性が高いことを示唆する。すなわち、99%を超える高い信頼水準では、VaR でもテイルリスクをかなりの程度織り込んでいるため、VaR で捉えられないリスクを ES で把握する必要性がそれほど高くないのかもしれない。

また、本シミュレーションでは、リスク量のベンチマークからの乖離やばらつきは、VaR、ES とも正規分布近似を除いて、信頼水準が上がるほど大きくなる傾向がみられた。特に 99%を超える高い信頼水準では多くの手法で問題が生じた。VaR、ES のリスク指標の選択、信頼水準の設定に際しては、こうした面も考慮に入れた包括的な検討が重要と思われる。

図表 20 推計手法別の ES/VaR 比率の比較 (抜粋)





## 5. おわりに

### (1) シミュレーション分析のまとめ

本稿では、日経平均株価の日次収益率のファットテイル性を切断安定分布でモデル化し、推計した分布のパラメータを元にリスク量 (VaR・ES) を計算した。また、VaR では捉えきれないテイルリスクを ES がどの程度捕捉するかをみるために同一の信頼水準における ES/VaR 比率を計算した。日経平均株価の日次収益率の場合、ES/VaR 比率は、信頼水準が上がるにつれて 1 (ES=VaR) に近づく傾向を示し、特に 99% を超える高い信頼水準では急速な低下がみられた。

次に、推計した切断安定分布を母分布として生成したランダム・サンプルを用いて、一般的に用いられる 4 種類のリスク量計測の手法 (正規分布近似、GPD 近似、ヒストリカル法、カーネルスムージング) について、モデル・リスク (損失発生の可能性を誤って評価してしまうリスク) の観点から計算精度・安定性の比較分析を行った。具体的には、まず、推計した母分布から損失の発生頻度が現実の株価データに近い大小複数のサンプルを生成し、そのリスク量 (VaR、ES) を上記の 4 つの手法により計算した。次に、この計算結果について、母分布から計算したリスク量をベンチマークとして、精度やばらつきをサンプルサイズ・信頼水準別に比較した。また、手法毎にリスク量の平均値の対ベンチマーク比 (相対水準) を計算し、これをサンプルサイズ・信頼水準別に比較した。同様に、手法毎にリスク量の変動係数 (標準偏差/平均) を計算し、相対的なばらつきの大きさを比較した。信頼水準別の ES/VaR 比率についても、手法毎にベンチマークと比較した。

分析結果の概要について、ファットテイルなデータのリスク計量に関するモデル・リスクの大きさの観点から手法毎にみると、まず、正規分布近似によるリスク量の計算精度は低く、ベンチマークからの乖離 (リスク量の過小推計) が生じた。リスク量の過小推計の度合いは、ES の方が VaR よりも大きく、信頼水準が高いほどベンチマークからの乖離が拡大した。一方、GPD 近似、ヒストリカル法、カーネルスムージングは、細かな違いはあるが、精度・ばらつきとも概ね同程度のパフォーマンスであった。細かな比較では、高い信頼水準での精度、ES の推計の安定性の点でカーネルスムージングが比較的良好な結果を示した (カーネルスムージングによる ES の推計値はヒストリカル法よりもベンチマークにより近い)。GPD 近似は、リスク量のばらつきが相対的に大きく、特に ES でその傾向が目立った。この背景には、本稿で用いた最尤法による GPD のパラメータ推計を安定させるには必ずしも十分なサンプル数が確保できてい

ないことなどが影響したと考えられる。GPD 近似によるリスク量計算を行う場合は、推計の安定性を確保するため、データ数の確保や分布のパラメータ推計の方法について慎重な検討が必要とされる。

なお、本稿の数値シミュレーションによる比較分析は、日経平均株価の日次収益率から推計した切断安定分布を仮定して行った i.i.d. なランダム・サンプリングに基づいており、いかなる状況に対しても常に当てはまるという意味で一般性が確認されたものではない点には注意が必要である。

比較分析の結果を項目別にまとめると以下の通りである。

(サンプルサイズの違いによるリスク指標の精度・ばらつきの変化)

- 正規分布近似を除く 3 つの手法では、サンプルサイズが大きいほど、リスク量の推計値の平均はベンチマークに近づき、精度が向上する傾向がみられた。正規分布近似については、サンプルサイズが増えてもベンチマークからの乖離は縮小しなかった。また、正規分布を含む全手法で、サンプルサイズが増えるほど、リスク量の推計値の平均のばらつきが小さくなる傾向がみられた。
- ヒストリカル法では、サンプルサイズが小さい場合、高い信頼水準ではリスク量が固定値となり信頼水準の変化に反応しなくなるという問題が生じた。

(信頼水準の違いによるリスク指標の精度・ばらつきの変化)

- 正規分布近似の場合は、ばらつきは一定範囲内に収まっており、信頼水準による影響は限定的であった。他の 3 つの計測手法では、信頼水準が高くなるにつれて共通して推計値のばらつきが大きくなる傾向がみられた。

(ベンチマーク対比での相対的なリスク量の精度)

- 正規分布近似による VaR の推計は、低い信頼水準では過大推計、高い信頼水準では過小推計となった。ES は、信頼水準によらず過小推計となり、信頼水準が上がるほど乖離が拡大した。このようにファットテイル性を表現できない正規分布近似によるリスク量の計算精度は低く、モデル・リスクの存在が懸念される。
- 他の 3 つの計測手法では、リスク量の平均は概ねベンチマークに近い結果が得られた。ただし、99% を超える高い信頼水準では、GPD 近似による ES の推計を除き、いずれもやや過小評価になる傾向がみられた。サンプルサイズが小さい場合、ヒストリカル法の過小推計がやや目立った。

(ES/VaR 比率)

- 同一信頼水準における ES/VaR 比率は、VaR では捉えられないテイルリスクを ES がどの程度把握しているかを示す指標とみなすことができる。4つの計測手法とも、信頼水準が上がるにつれ、同比率が低下する傾向がみられた。手法別には、正規分布近似の同比率はベンチマークを大幅に下回った。他の3つの計測手法については、高い信頼水準での GPD 近似を除きベンチマークに近いカーブとなり、サンプルサイズが大きいほどベンチマークにより近づいた。ただし、ヒストリカル法については、小サンプルかつ高信頼水準の場合に同比率が 1 となるケース (VaR=ES) がみられた。

## (2) 実務におけるリスク量計算の手法選択の観点からの留意点

本稿で示したリスク量計測の手法については、それぞれ異なるメリット・デメリットがあるため、リスク量の計算手法の比較選択を行う際にはそうした点も考慮に入れる必要がある。例えば、GPD 近似、カーネルスムージングについては、分布の裾部分を決める閾値の設定やバンド幅の設定という難しい調整を行う必要がある。GPD 近似では十分なデータ数の確保も課題となる。本稿のシミュレーションでは、最も単純な設定を選んだが、個別により適切な対応を行えば、リスク指標の性能を向上させる余地は十分残されており、比較分析の結果にも影響する可能性がある。ヒストリカル法は、そうした複雑な調整を行う必要がなく、リスク量計算の再現性も高いため、実務での応用が容易というメリットがある。実際に金融機関でヒストリカル法およびその拡張手法を用いている例が多いのもそうした背景があるものと理解できる。

バーゼル自己資本比率規制の見直しにおける ES の新規採用の検討を契機に、リスク指標の比較分析の重要性が増している。本稿の分析を通じて、リスク指標の選択に際しては、「確率分布の想定、信頼水準、データサイズ、計算の容易さ」の観点から多角的に比較分析を行うことの重要性が改めて確認された。リスク指標の計算手法の選択に関しては、リスク量計測に際して何をより重視するかによって答えは異なる面がある。例えば、250日(1年)程度の比較的短い観測期間を前提に VaR、ES を計算する場合、最も計算が容易なのはヒストリカル法である。ただし、99%を超える高い信頼水準を求める場合は、ヒストリカル法では最大損失のみでリスク量が決まってしまう場合があるほか、特に ES については他の手法に比べやや過小推計となる傾向もある。これらの問題は、同じノンパラメトリックな手法のカーネルスムージングにより緩和できる可能

性があるが、計算はヒストリカル法よりも複雑になる。このように、全ての点で最適な選択肢が得られるケースは少ないため、比較検討の際には優先する事項を予め明確にしておくことが重要と考えられる。

### (3) 今後の分析の発展の方向性

今回、比較した計算手法の幾つかは、条件付きモデルへの適用も可能であり、実際にそうした研究も数多くなされている。正規分布近似についても、GARCHモデルなどと組み合わせることで、計算式が簡明で高い信頼水準でも安定した計算が可能であるなどのメリットを活かすことができる。正規分布では、ファットテイルな変動を捉えられないので、ボラティリティの変動を記述するモデルが複雑化する可能性は高いが、短期のリスク計測において市場変動に対してより敏感に反応するリスク指標が求められる状況では、こうしたアプローチは有効である。ヒストリカル法についても同様に条件付きモデルの枠組みでの応用が実務でもなされているようである。

本稿で用いた安定分布を条件付きモデルに応用する研究もなされている。例えば、Frain [2008]では、「GARCH+安定分布」について分析しているほか、Rachev et al. [2011]では、「GARCH+tempered stable distribution (裾を滑らかに減衰させた安定分布)」の組み合わせについて詳しく触れている。また、安定分布以外にもファットテイルな変動を表現できる分布は多数存在しており<sup>59</sup>、そうした分布を条件付きモデルと組み合わせることも可能である。条件付きモデルでは、リスク量のスケーリング（保有期調整）を行う場合、ボラティリティ変動の将来予測が必要となることがあるが、ファットテイルな分布を適切に組み込んだモデルを用いることで、ボラティリティ変動をよりシンプルにモデル化できる可能性がある。こうした手法は、確率分布のパラメータ推計が複雑になるなどの問題はあるが、モデル設定上の自由度を増すことができる点でメリットも多いと考えられる。

以上

---

<sup>59</sup> 安定分布以外のファットテイルな確率分布の例については、「補論2 安定分布の特徴と裾の切断 (4) 安定分布の以外のファットテイルな分布」を参照されたい。

## 別紙図表（シミュレーション結果）

図 A1	正規分布近似によるサンプルサイズ別の VaR 推計結果.....	44
図 A2	正規分布近似によるサンプルサイズ別の ES 推計結果.....	45
図 A3	GPD 近似によるサンプルサイズ別の VaR 推計結果.....	46
図 A4	GPD 近似によるサンプルサイズ別の ES 推計結果.....	47
図 A5	ヒストリカル法によるサンプルサイズ別の VaR 推計結果.....	48
図 A6	ヒストリカル法によるサンプルサイズ別の ES 推計結果.....	49
図 A7	カーネルスムージングによるサンプルサイズ別の VaR 推計結果..	50
図 A8	カーネルスムージングによるサンプルサイズ別の ES 推計結果....	51
図 A9	切断安定分布の VaR と推計手法別の VaR の相対比較.....	52
図 A10	切断安定分布の ES と推計手法別の ES の相対比較.....	53
図 A11	推計手法別の VaR の変動係数（標準偏差／平均）.....	54
図 A12	推計手法別の ES の変動係数（標準偏差／平均）.....	55
図 A13	推計手法別の ES／VaR 比率.....	56

図 A1 正規分布近似によるサンプルサイズ別の VaR 推計結果

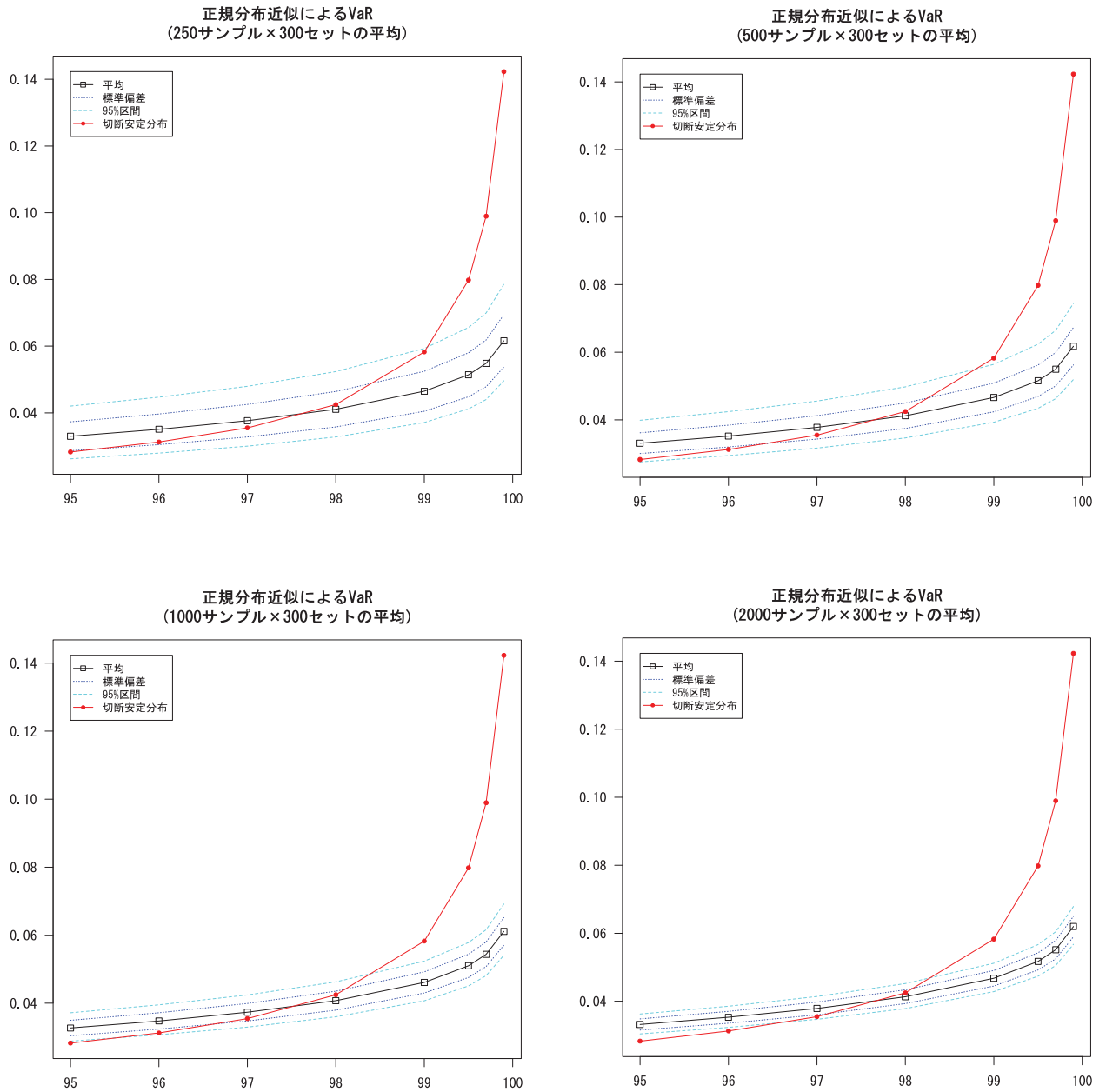


図 A2 正規分布近似によるサンプルサイズ別の ES 推計結果

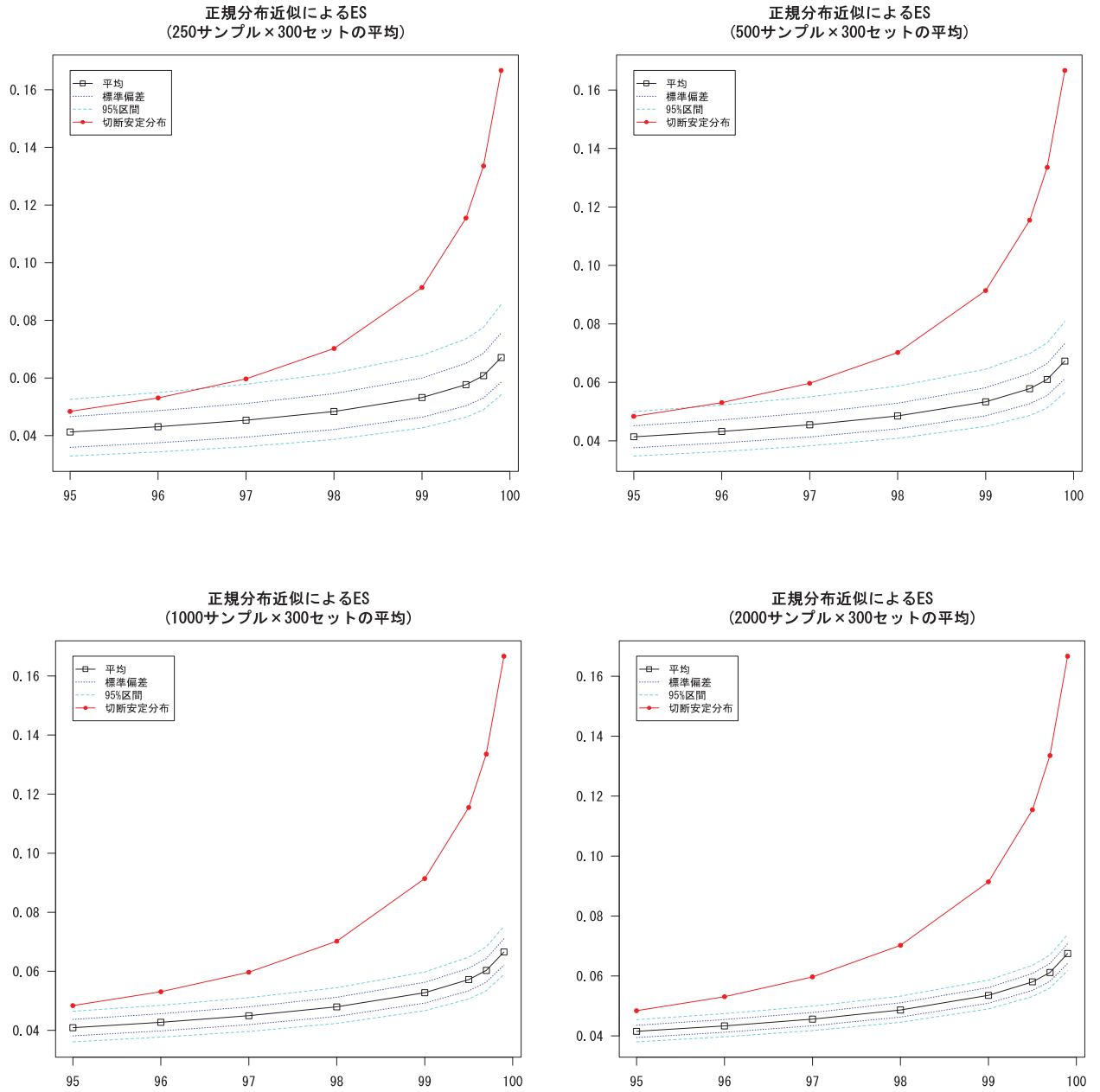


図 A3 GPD 近似によるサンプルサイズ別の VaR 推計結果

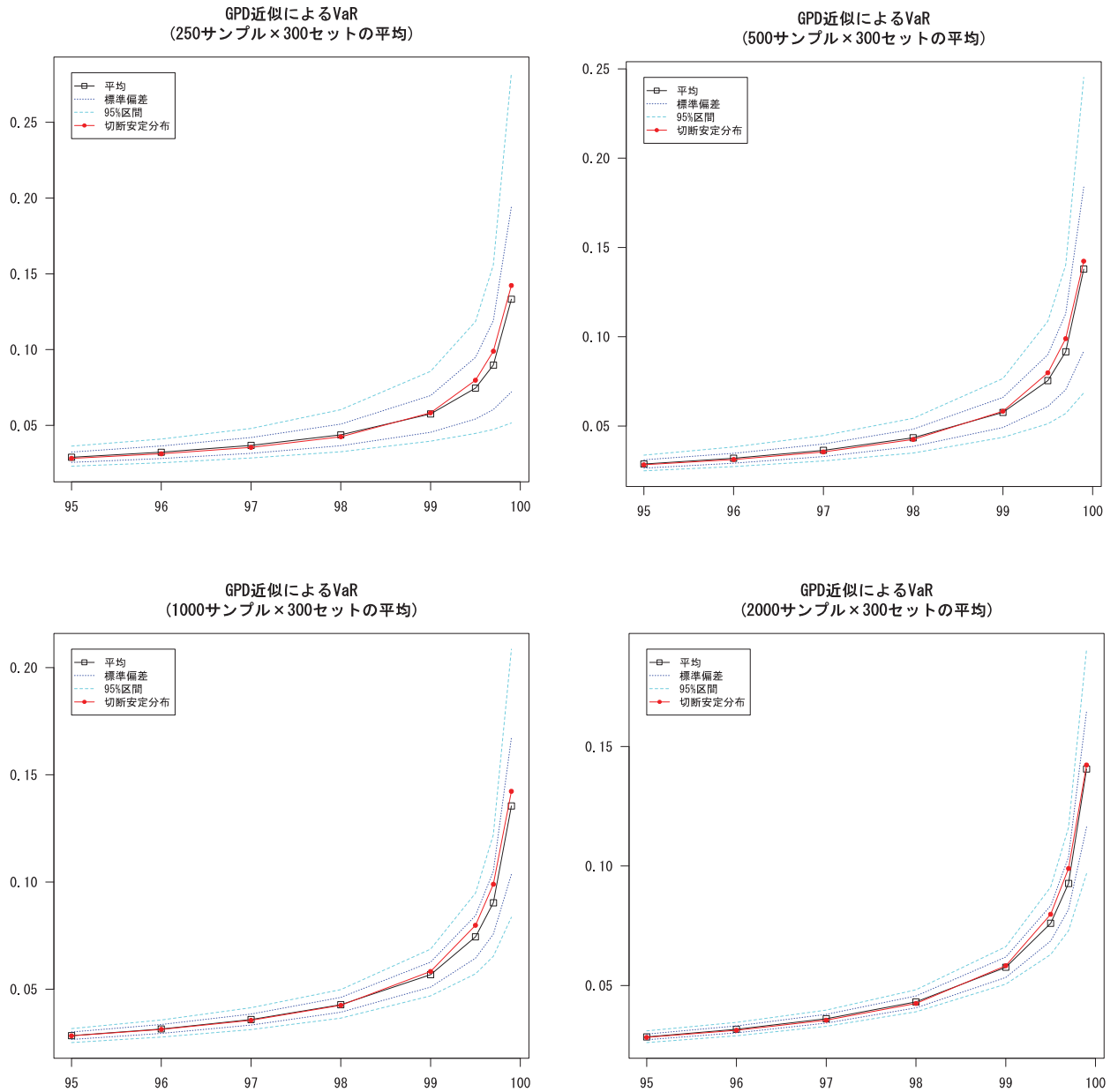




図 A4 GPD 近似によるサンプルサイズ別の ES 推計結果

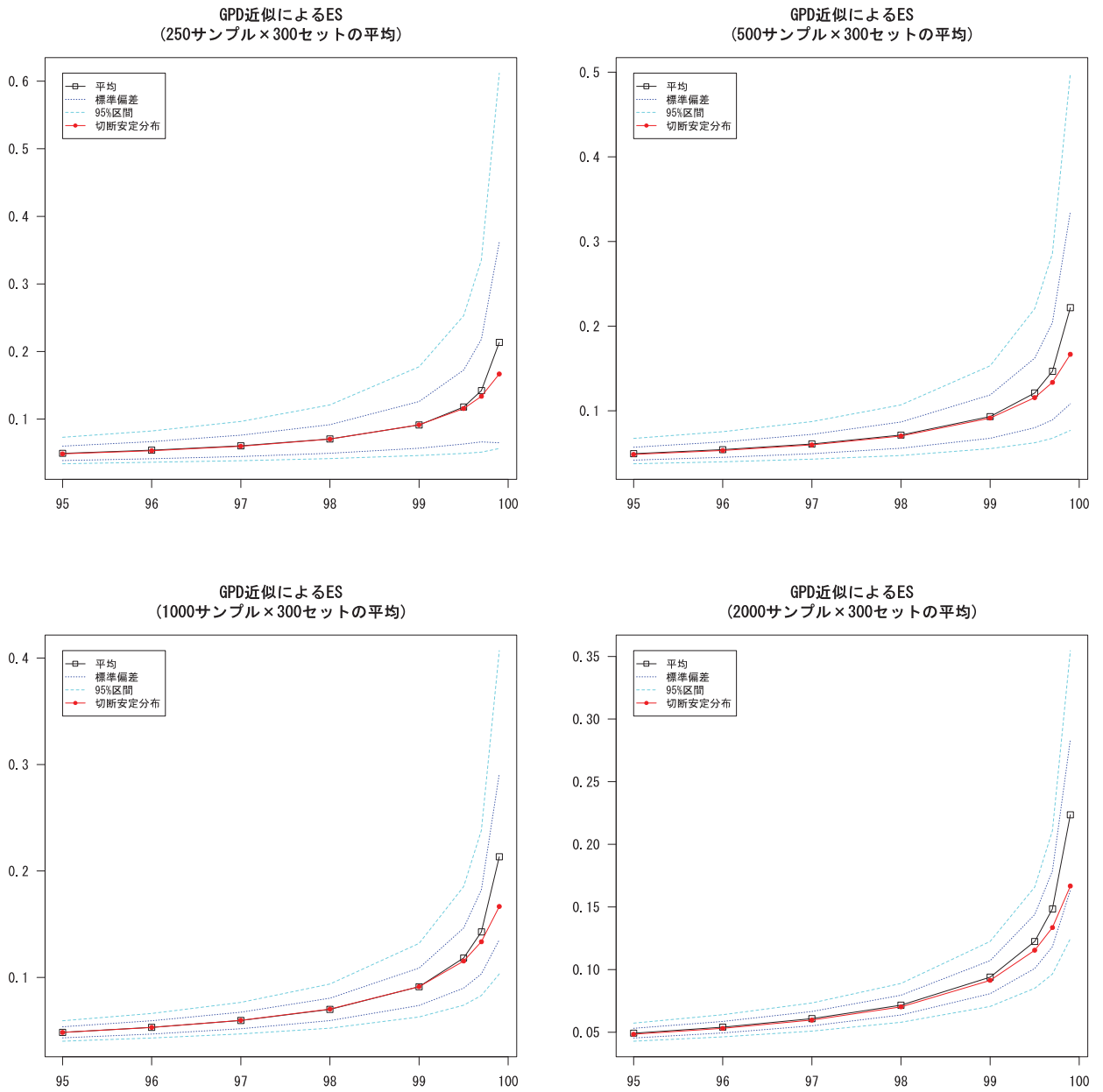


図 A5 ヒストリカル法によるサンプルサイズ別の VaR 推計結果

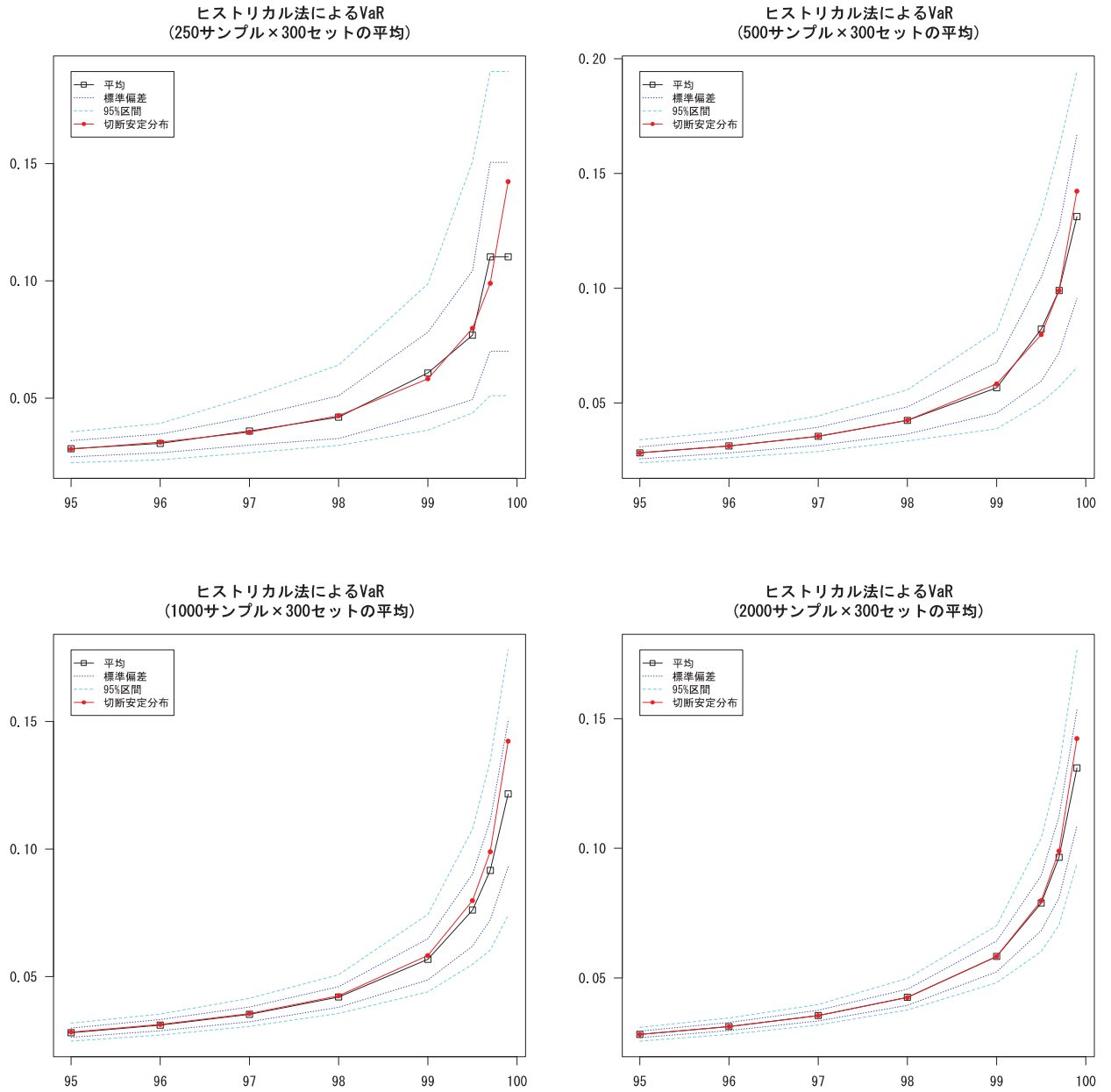


図 A6 ヒストリカル法によるサンプルサイズ別の ES 推計結果

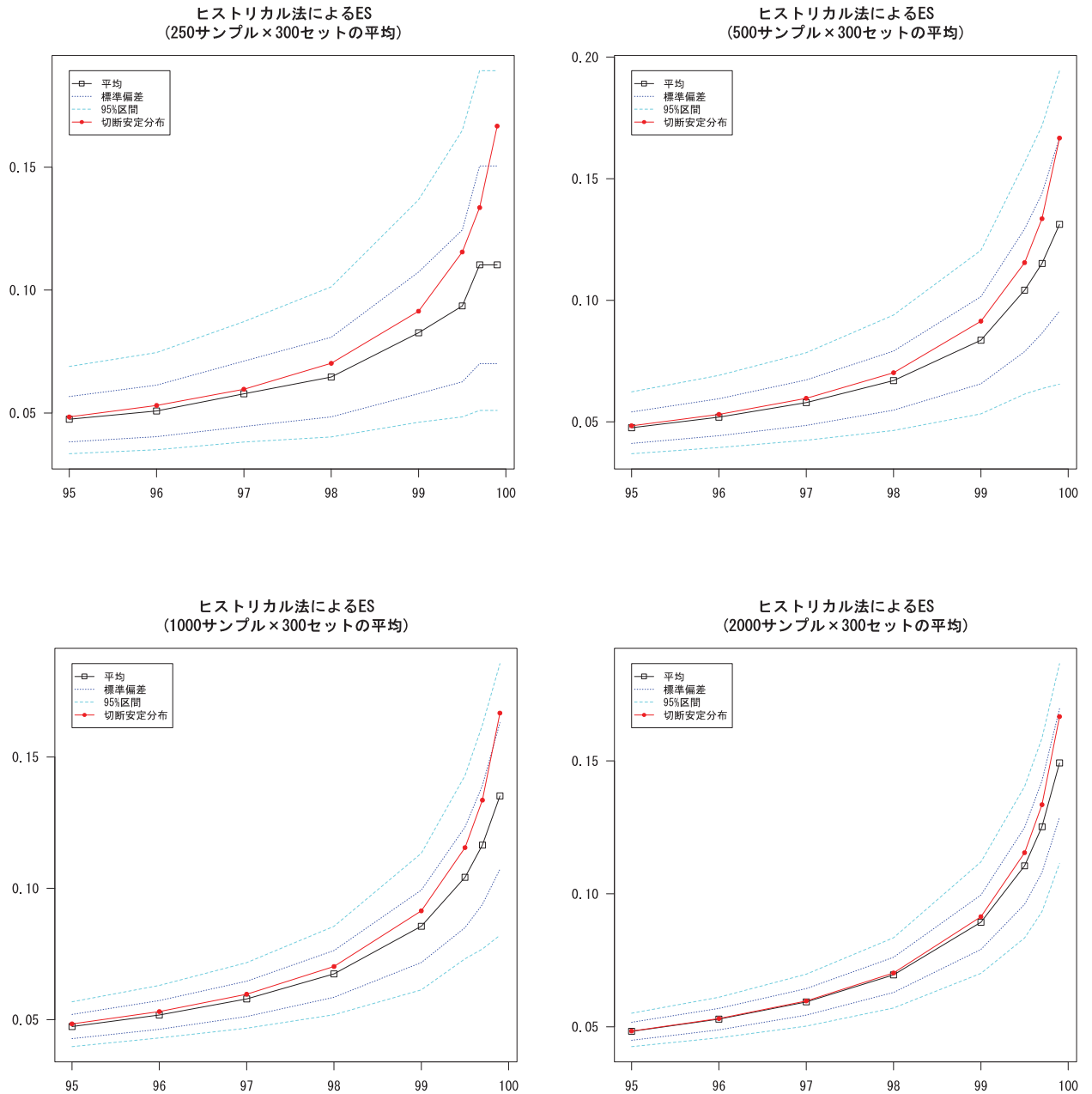


図 A7 カーネルスムージングによるサンプルサイズ別の VaR 推計結果

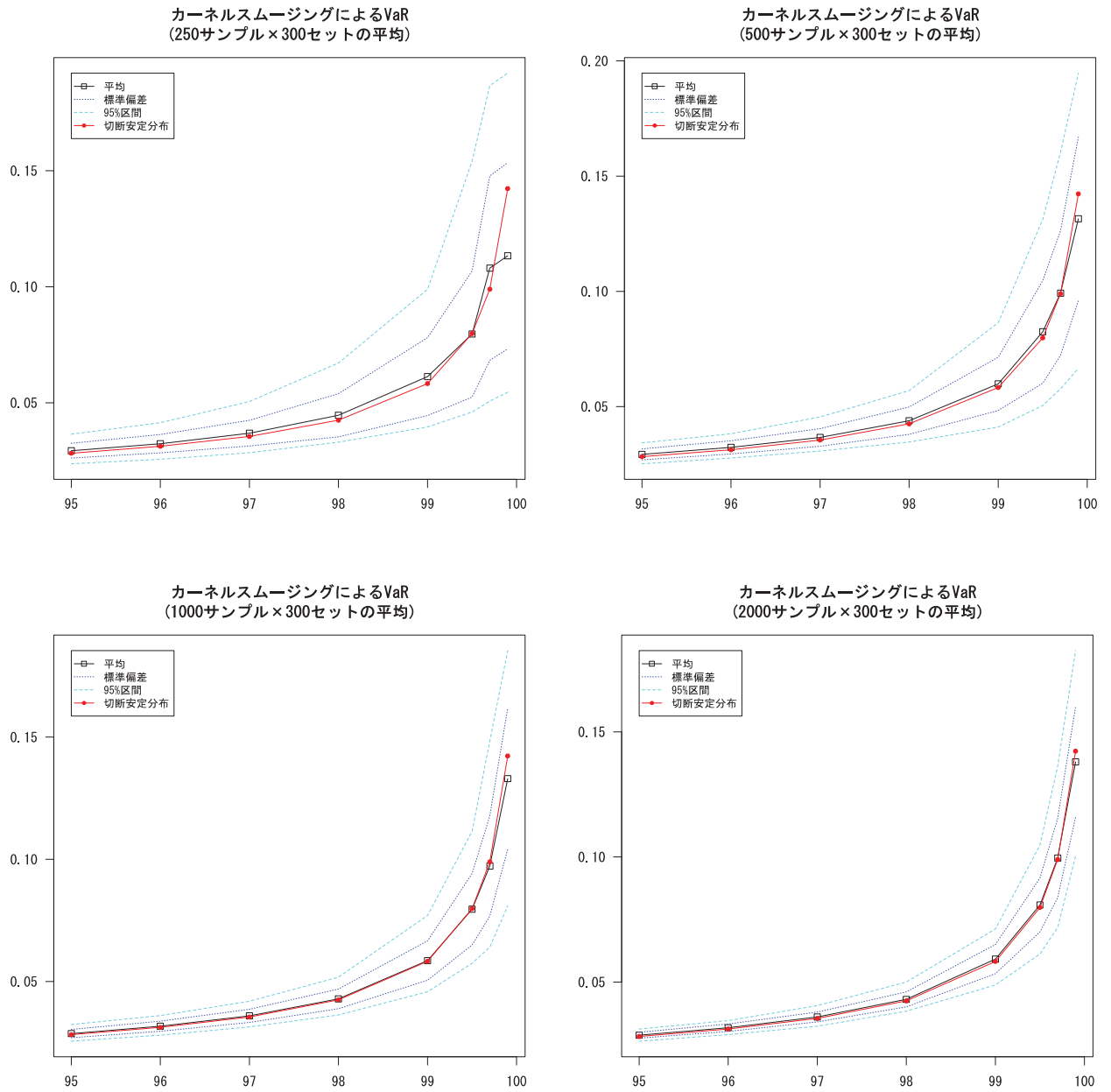


図 A8 カーネルスムージングによるサンプルサイズ別の ES 推計結果

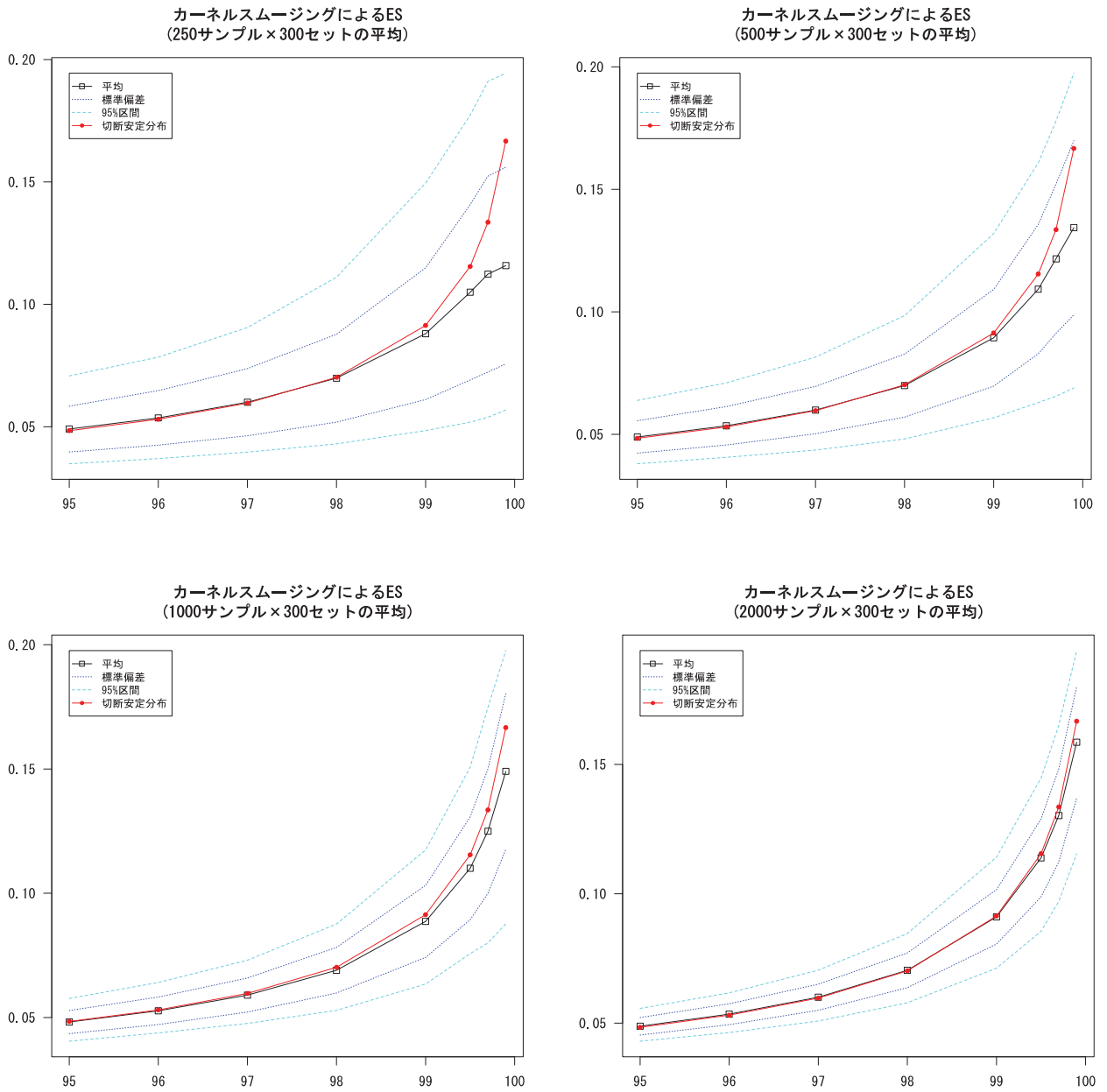


図 A9 切断安定分布の VaR と推計手法別の VaR の相対比較

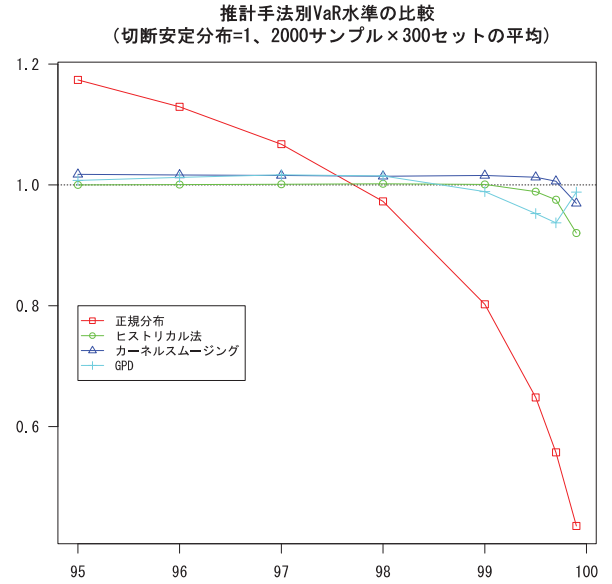
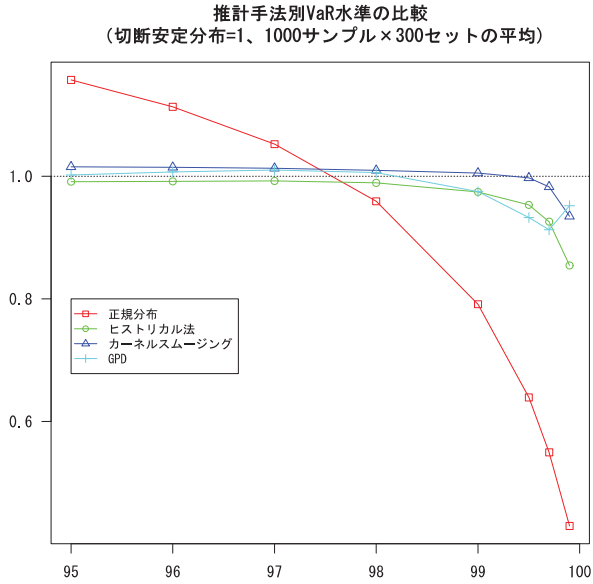
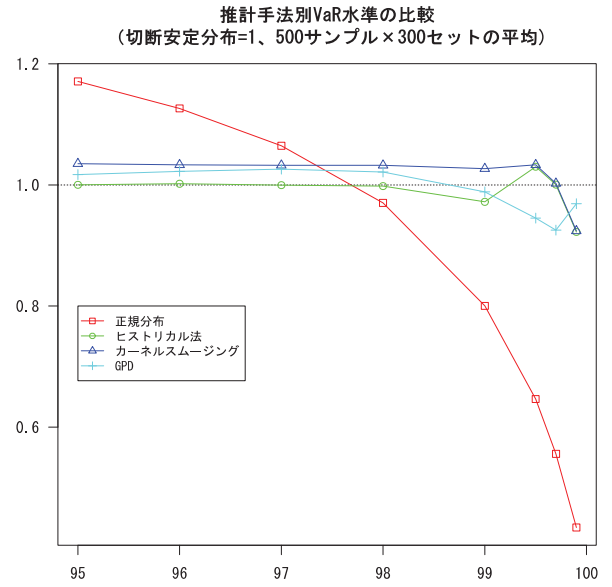
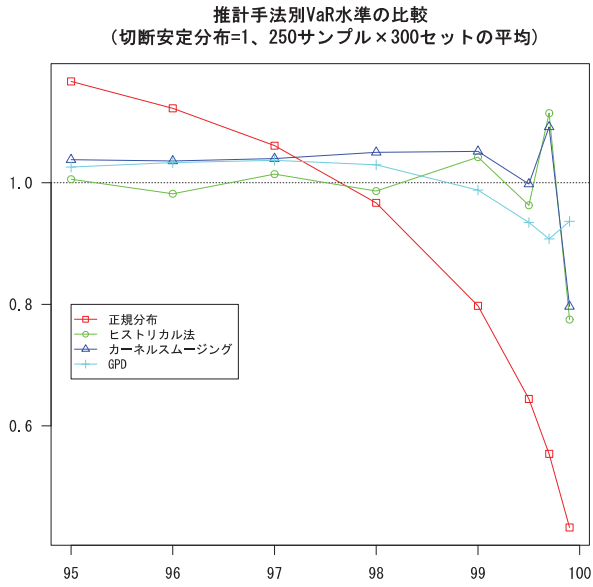


図 A10 切断安定分布の ES と推計手法別の ES の相対比較

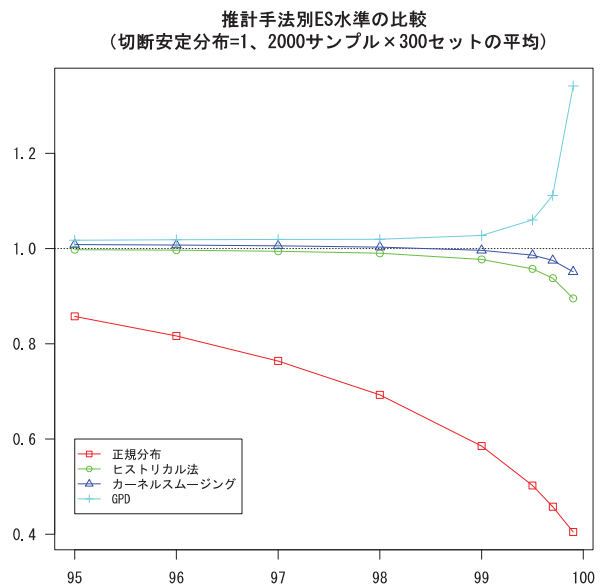
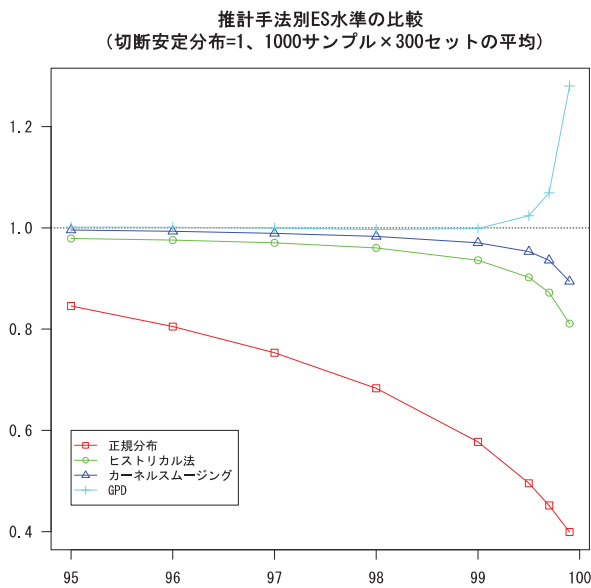
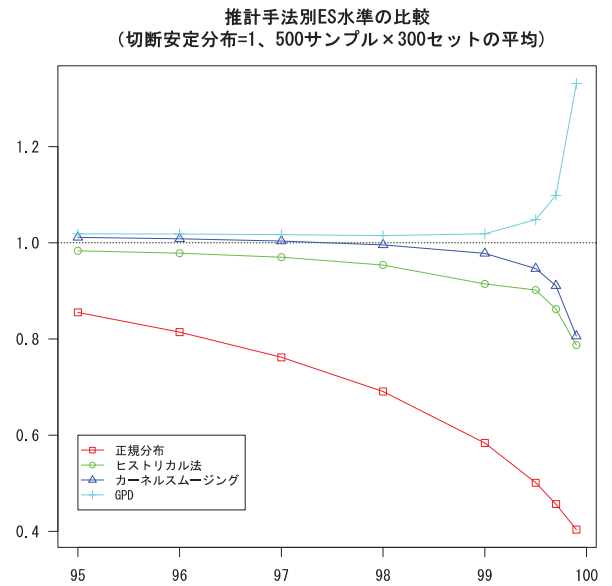
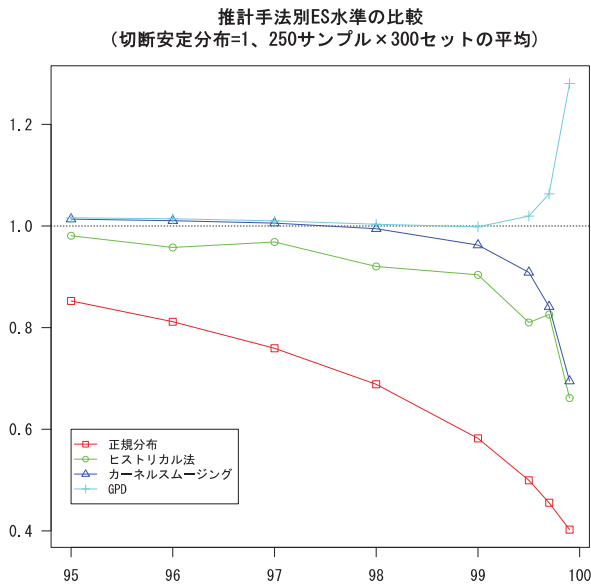


図 A11 推計手法別の VaR の変動係数（標準偏差／平均）

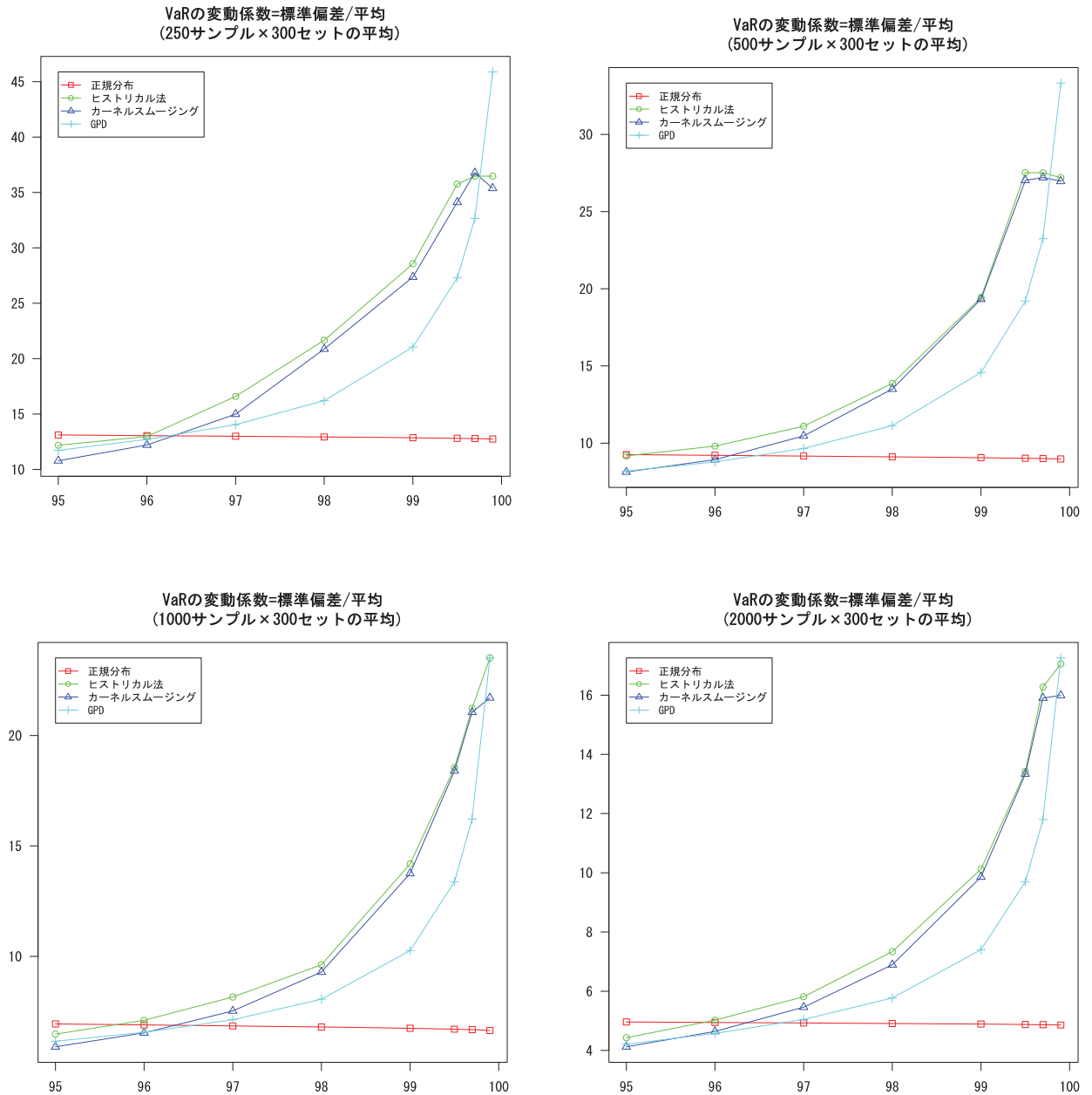




図 A12 推計手法別の ES の変動係数（標準偏差／平均）

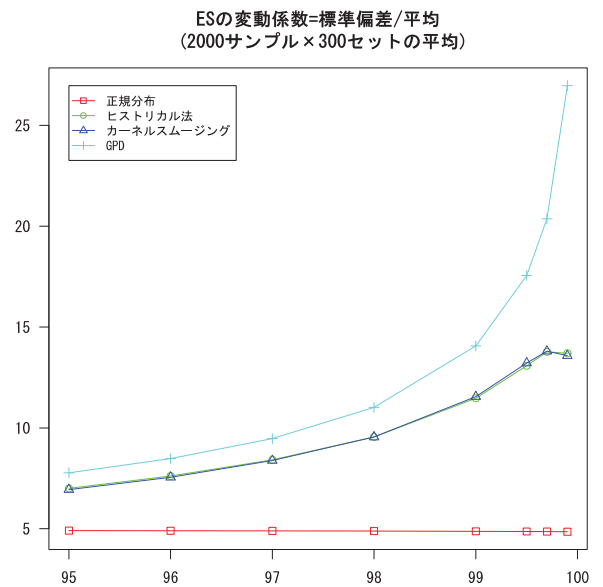
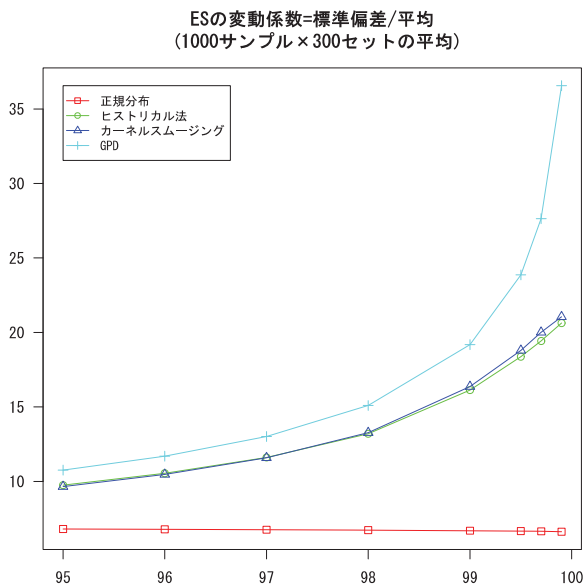
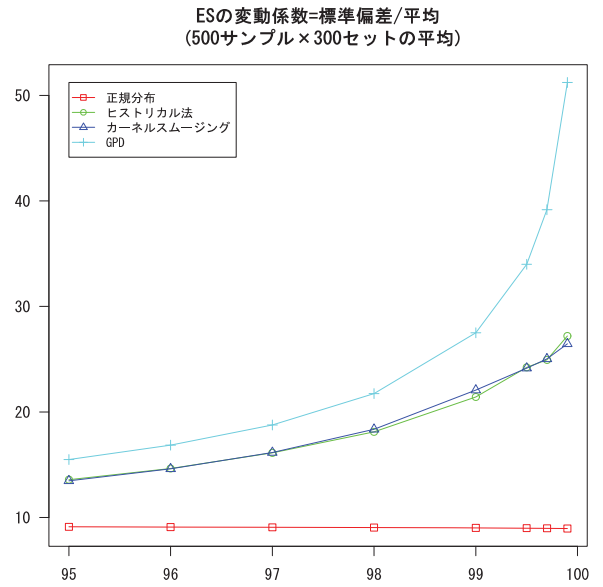
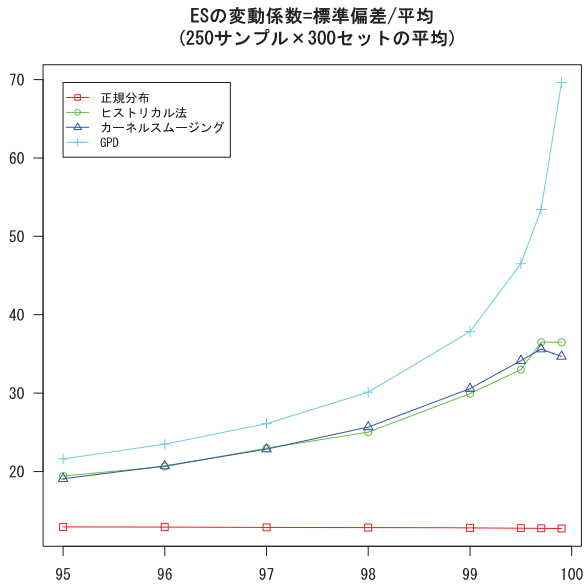
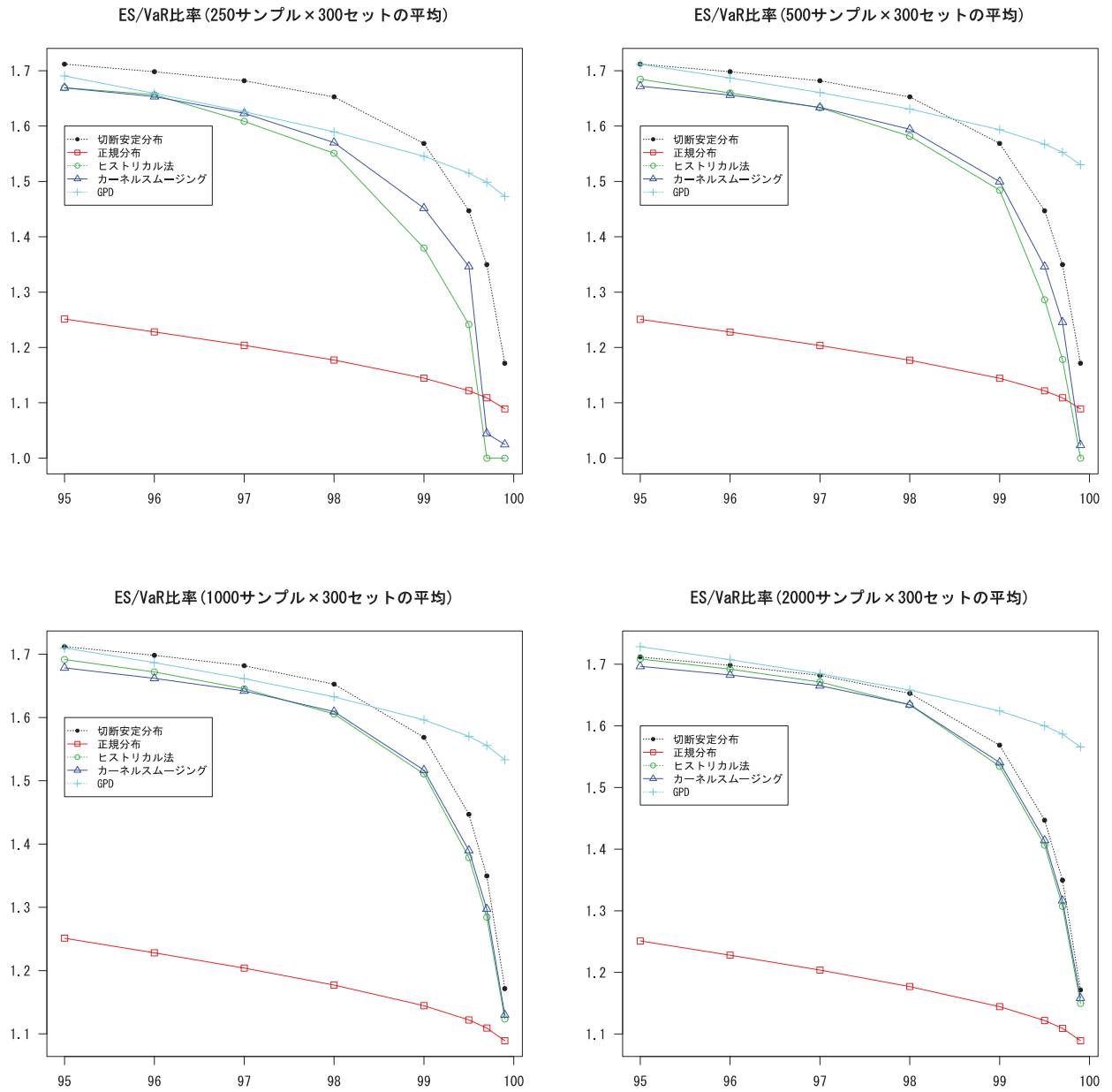


図 A13 推計手法別の ES/VaR 比率



## 補論1 GARCHによる日経平均株価のボラティリティ推計

GARCH( $p, q$ )モデルの推計に際しては、通常、AIC や BIC などにより  $p$  および  $q$  の次数選択を行う。これらの次数については、実際には、比較的低い次数でもボラティリティ変動の時系列依存を表現できることが多く、その意味で GARCH(1,1)モデルが選択されることも少なくない。本稿では、より複雑な GARCH モデルを用いて、日経平均株価のボラティリティをより精緻に再現することが目的ではなく、残差に正規分布とスキュー $t$ 分布を想定した場合の差に着目したため、次数選択については、一般的な GARCH(1,1)モデルを用いた。正規分布の比較対象としてスキュー $t$ 分布を選んだのは、本文図表2でこの時期の株価変動について、マイナスの方向への偏りがみられたため。

GARCH(1,1)モデルは、以下のように定義される (Bollerslev [1986])。

$$\begin{aligned} r_t &= \mu + \sigma_t \varepsilon_t, \sigma_t > 0 \\ a_t &= r_t - \mu \rightarrow a_t = \sigma_t \varepsilon_t \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \\ \alpha_0 &> 0, \alpha_1 > 0, \beta_1 > 0, \alpha_1 + \beta_1 < 1 \end{aligned} \tag{B 1}$$

$r_t$  は  $t$  期の収益率、 $\mu$  は収益率の平均、 $a_t$  は収益率の平均からの乖離、 $\sigma_t$  は  $a_t$  の  $t$  期のボラティリティ (=超過収益率  $a_t$  の標準偏差)。モデルの残差にあたる残差  $\varepsilon_t$  について、本稿では標準正規分布とスキュー $t$ 分布の2つを想定して比較した。ただし、残差の分散はいずれの分布に対しても1と仮定した。

パラメータ制約の下で最尤法による推計を行った結果は以下の通り。

図表 B1 GARCH(1,1)の推計結果

$\varepsilon_t$ の分布	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\beta_1$	自由度	歪み
正規分布	$9.27 \times 10^{-6}$	0.147	0.823	-	-
(標準誤差)	( $3.00 \times 10^{-6}$ )	(0.024)	(0.027)	(-)	(-)
スチュードント分布	$8.19 \times 10^{-6}$	0.116	0.856	10	0.882
(標準誤差)	( $3.10 \times 10^{-6}$ )	(0.024)	(0.028)	(2.123)	(0.040)

	Jarque Bera 検定 ( $p$ 値)	Ljung-Box 検定 ( $p$ 値)	$R^2 Q(20)$	AIC
正規分布	28.821 ( $5.51 \times 10^{-7}$ )	15.703 (0.734)		-6049
スチュードント分布	- (-)	26.573 (0.147)		-6057

Jarque Bera 検定の帰無仮説  $H_0$  は、「残差系列が正規分布に従う」

Ljung-Box 検定の帰無仮説  $H_0$  は、「残差は独立した分布に従う (系列相関なし)」

スチュードント分布の歪みの値は、1 のとき左右対称 (歪みなし) を表し、1 より小さいときは左に、1 より大きい時は右に歪んでいることを表す。

図表 B1 の推計結果をみると、GARCH(1,1)の残差の分布を正規分布とみなすことは難しい (Jarque Bera 検定)。AIC の比較でも、わずかな違いではあるが、スチュードント分布の方が正規分布よりも当てはまりは良い。残差の自己相関については、スチュードント分布の方が正規分布よりは  $p$  値が低い、独立同一分布 (i.i.d.) の前提に必要な「自己相関なし」を仮定できるかは難しいところである

(Ljung-Box 検定)。スチュードント分布の自由度は 10 とやや高めの値を示しており、GARCH によりボラティリティ変動が除去された効果がみられる。本文でも触れたように、GARCH(1,1)のような単純なモデルではなく、非対称性やレバレッジ効果も表現できるより複雑な GARCH モデルを用いることで、残差の分布を i.i.d.な正規分布にできることもある。

GARCH モデルを前提にリスク量を計算する場合、ボラティリティの大きさと残差の確率分布の 2 つの情報をを用いてリスク量が計算される<sup>60</sup>。

例えば、(B 1)式に示した資産収益率  $r_t$  の VaR は、

<sup>60</sup> 金融機関のリスク管理の実務では、ボラティリティの推計に EWMA(exponentially weighted moving average)が用いられることも多い。EWMA では、 $\sigma_t^2 = \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1-\lambda)a_{t-1}^2$  とされるが、これは GARCH(1,1)において  $\alpha_0 = 0$ ,  $\alpha_1 = 1-\lambda$ ,  $\beta_1 = \lambda$  とした場合に等しい。

$$VaR_{p,t+1} = -\hat{\mu} - \hat{\sigma}_{t+1} F_p^{-1}$$

$p$  は信頼水準、 $\hat{\mu}, \hat{\sigma}$  はそれぞれ収益率  $r_{t+1} = \mu + \sigma_{t+1} \varepsilon_{t+1}$  の平均  $\mu$  とボラティリティ  $\sigma_{t+1}$  の推計値 ( $\sigma_{t+1} > 0$ ) (B 2)

$F_p^{-1}$  は  $\varepsilon_t$  の  $(1-p)$  分位点 (例えば  $\varepsilon_t$  が正規分布に従う場合、 $p=0.99$  なら  $F_{0.99}^{-1} \approx -2.326 < 0$ )

のように、現在までの情報とボラティリティの時系列関係式から予測した  $t+1$  期のボラティリティおよび残差の分布の分位点を使って計算できる。1 期間のリスク量については、1 期先の  $t+1$  期のボラティリティ予測値のみで足りるが、多期間のリスク量を求めるには、期間内のボラティリティ変動の推移を予測する必要が生じる。すなわち、条件付きモデルの場合、リスク量の保有期間調整を行う際には、この期間内のボラティリティの変動についての想定（時系列予測するかあるいは期間中固定するかなど）が必要となり、その点は無条件モデルによるリスク量計算よりも複雑な側面を持つ<sup>61</sup>。

こうしたアプローチの他にも、条件付きモデルの考え方に立つリスク指標は存在する。例えば、短期の環境変化を順次反映してリスク指標を更新していくものとして、CAViaR (Conditional Autoregressive Value at Risk, Engle and Manganelli [2004]) がある。これは、金融資産の収益率変動には自己相関が認められることが多いことから、VaR の計測においても、分位点の変化の自己回帰構造に関する情報を活用することができるという考え方に基づくもの。

$$VaR_t = \beta_0 + \beta_1 VaR_{t-1} + l(\beta_2, y_{t-1}, VaR_{t-1})$$

$l(\ )$  は情報  $y_{t-1}$  と  $VaR_t$  の水準をリンクする関数

自己回帰項  $\beta_1 VaR_{t-1}$  の存在により  $VaR_t$  は滑らかに変化する。過去の  $VaR_{t-1}$  に加えて、既に得られている情報  $y_{t-1}$  が今期の  $VaR_t$  の水準に影響を与えることを通じて短期的な環境変化がリスク指標に織り込まれる（各パラメータは分位点回帰により推計される）。

<sup>61</sup> 保有期間  $n$  が十分に長い場合、残差の分布に正規分布を想定した場合でも、資産収益率  $r_t$  が従う分布がファットテイルな分布になることがある。例えば、Borkovec and Klüppelberg [2001] では、残差を正規分布、ボラティリティが ARCH(1) に従う場合について、 $n \rightarrow \infty$  での収益率  $r_t$  の定常分布がべき分布（パレート分布）になることを示した。

## 補論2 安定分布の特徴と裾の切断

### (1) 安定分布の定義、密度関数

ある自然数  $n$  が存在して、独立同一分布に従う  $n$  個の確率変数  $X_1, \dots, X_n$  の和を  $S_n$  とする。  $S_n$  に関し以下の条件を満たす定数  $C_n (C_n > 0)$ 、  $D_n$  が存在する時、  $X$  は安定な確率変数であるといい、安定分布に従う ( $\alpha$ -stable laws)。

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n, \quad S_n \stackrel{d}{=} C_n X + D_n \quad (\text{B 3})$$

$X_1, \dots, X_n$  は、i.i.d.な確率変数

$\stackrel{d}{=}$  は確率分布が同一であることを示す

これは、安定分布に従う i.i.d.な確率変数の和・平均は、スケールと位置は異なるが同じ安定分布<sup>62</sup>に従うことを意味する。

安定分布の密度関数は、一般的な関数形としては表記できないが、特性関数は知られている。安定分布の特性関数<sup>63</sup>は、

$$C_X(u) = E[\exp(iuX)] = \begin{cases} \exp\left(-\gamma^\alpha |u|^\alpha \left[1 + i\beta \left(\tan \frac{\pi\alpha}{2}\right) \text{sign}(u) \left(|\gamma u|^{1-\alpha} - 1\right)\right] + i\delta u\right) & \alpha \neq 1 \\ \exp\left(-\gamma |u| \left[1 + i\beta \frac{2}{\pi} (\text{sign}(u)) \log(\gamma |u|)\right] + i\delta u\right) & \alpha = 1 \end{cases} \quad \text{sign}(u) = \begin{cases} -1 & u < 0 \\ 0 & u = 0 \\ 1 & u > 0 \end{cases} \quad (\text{B 4})$$

と表され、安定分布の密度関数は、この特性関数の逆フーリエ変換によって

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-iux) C_X(u) du \quad (\text{B 5})$$

で得られる。

(B 4)式に示したように、安定分布には4つのパラメータが存在する。具体的には、 $\alpha$  (安定指数 <stability>),  $\beta$  (歪度パラメータ <skewness>),  $\gamma$  (尺度パ

<sup>62</sup> 安定指数  $\alpha$  が同一の安定分布。例えば、リスク量の1日→10日などの変換(保有期間調整・スケールリング)を行う場合、i.i.d.な収益率の合計は、位置と尺度は異なるが全く同じ分布に従う、ということの意味する。

<sup>63</sup> 安定分布のパラメータ表記には複数の表示方法が存在する。本稿では、数値計算時に便利とされる形式  $S(\alpha, \beta, \gamma, \delta; k=0)$ 、略して  $S(0)$  形式で記載している。詳細は Nolan [2010]、Misiorek and Rafael [2012] を参照されたい。

ラメータ<spread>)、 $\delta$  (位置パラメータ<location>) であり、 $\alpha$  と  $\beta$  が安定分布の形を決める形状パラメータである。なお、位置パラメータは必ずしも安定分布の平均を意味するものではなく、同様に尺度パラメータも安定分布の標準偏差という訳ではない。

パラメータ  $\alpha, \beta, \gamma$  は、以下のような値の範囲をとる。

$$0 < \alpha \leq 2, \quad -1 \leq \beta \leq 1, \quad \gamma \geq 0, \quad \delta \in \mathfrak{R} \quad (\text{任意の実数}) \quad (\text{B 6})$$

安定分布の密度関数の形状は、 $\alpha$  が小さいほど裾が厚く (ファットテイル)、 $\beta$  がゼロで左右対称 (マイナスで左に、プラスで右に歪む) となり、尺度・位置パラメータで拡大縮小・移動が可能であるなど、ファットテイル性を表現することが可能である。

また、安定分布は、 $\alpha$  などのパラメータが特定の値をとる場合、以下の3つの分布に一致することが知られている。 $f(x)$  は各分布の密度関数。

正規分布 : ( $\alpha = 2, \beta = 0$ )

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad -\infty < x < \infty \quad (\text{B 7})$$

正規分布と安定分布のパラメータは、 $N(\mu, \sigma^2) = S(2, 0, \sigma/\sqrt{2}, \mu; 0)$  という関係にある<sup>64</sup>。

コーシー分布 : ( $\alpha = 1, \beta = 0$ )

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{\gamma^2 + (x-\delta)^2}, \quad -\infty < x < \infty \quad (\text{B 8})$$

レヴィ分布 : ( $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 1$ )

$$f(x) = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \frac{1}{(x-\delta)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\gamma}{2(x-\delta)}\right), \quad \delta < x < \infty \quad (\text{B 9})$$

---

<sup>64</sup>  $S(0)$ パラメータ表記の場合。安定分布のパラメータ表記では、 $S(2, 0, \gamma, \delta; 0) = N(\delta, 2\gamma^2)$ 。

## (2) 安定分布の特徴・留意点

- 平均：  $\alpha > 1$  の場合は  $\delta$ 、それ以外の場合は存在しない。
- 分散：  $\alpha = 2$  (正規分布) では  $2\gamma^2$ 。  $0 < \alpha < 2$  では、2 次以上のモーメントが存在せず<sup>65</sup>、したがって分散も存在しない。
- 尖度・歪度：  $\alpha = 2$  では 0、それ以外は存在しない (2 次以上のモーメントが存在しない)。
- 分布の歪み：  $\alpha < 1, \beta = \pm 1$  の場合、裾は片側のみ、それ以外の場合は両側の裾が存在する<sup>66</sup>。
- 裾での減衰： 裾部分での密度の減衰はべき乗則に従うため (*power law-tail*、変数の発生確率はその大きさのべき乗に比例する)<sup>67</sup>、発生頻度の低い事象を捉えやすい。

$$x \rightarrow \infty \Rightarrow P(X > x) \propto C \cdot x^{-\alpha}, f(x) = \alpha C \cdot x^{-(\alpha+1)}, \quad C \text{ は定数 (B 10)}$$

スケーリング<sup>68</sup>：  $0 < \alpha \leq 2$  の場合、(B 3)式における尺度定数  $C_n$  は、

$$C_n = n^{1/\alpha} \quad (\text{B 11})$$

## (3) 安定分布の裾の切断 (切断安定分布)

安定分布は、歪んだファットテイルな分布を柔軟に近似でき、保有期間調整 (スケーリング) も容易である。しかし、安定指数の値によっては、収益率の分散が存在しないという特性は、現実のデータや市場参加者の認識などと必ずしも整合的でない面がある。また、分散が存在しない場合、リスク量の計算が複雑化し、実務的な応用が難しくなってしまう。こうした事情から、金融資産の収益率を安定分布で近似する場合、分布の裾に対して何らかの加工を施す必要が生じてくる。

安定分布の裾を加工する方法としては、「単純に切断する (truncate)」、「正規分布の裾と入れ替える」、「本来の安定分布より早く減衰させる」などのアプローチが考えられる。このうち最も単純な対応が切断であり、確率変数が一定の範囲にある場合に安定分布の密度関数を使い、範囲外では密度をゼロとする。

<sup>65</sup> 安定分布では、安定指数  $\alpha$  までのモーメントしか存在しない。

<sup>66</sup> ここでの「分布の裾の存在」とは、安定分布に従う確率変数の定義域は、 $\alpha < 1, \beta = 1$  のとき  $[\delta - \gamma \tan(\pi\alpha/2), \infty)$ 、 $\alpha < 1, \beta = -1$  のとき  $[-\infty, \delta + \gamma \tan(\pi\alpha/2))$  となることを指す (Nolan [2010] Lemma 1.10)。

<sup>67</sup>  $f(x) = ax^k$  で表される「べき関数」は、定数  $c$  について  $f(cx) = a(cx)^k = c^k f(x) \propto f(x)$  を満たす (スケールフリー)。

<sup>68</sup> 1 日の VaR を  $t$  日の VaR に変換する方法として、いわゆる  $\sqrt{t}$  倍法がある。これは、 $\alpha = 2$  として、安定分布を正規分布とした場合の  $C_n$  を用いたものである。すなわち、 $\sqrt{t}$  倍法によるリスク量の保有期間調整は正規分布を前提としている。



$$T(x) \equiv \begin{cases} 0, & x > l_b \\ c_l \cdot f(x), & l_a \leq x \leq l_b \\ 0, & x < l_a \end{cases} \quad (\text{B } 12)$$

$c_l$  は  $\int_{l_a}^{l_b} c_l \cdot f(x) dx = 1$  を満たす定数

$l_a < 0, l_b > 0, l_a = -l_b$  なら左右対称な切断点

このように裾部分を切断した安定分布は、切断安定分布 (truncated stable distribution、Mantegna and Stanley [2000]) と呼ばれる。切断安定分布のパラメータ推計は、基本的に安定分布と同様の最尤法を用いることができるので、切断点を決める根拠となる制度的な要因や金融商品の特性など何らかの事前知識が得られていれば、この方法を応用しやすい<sup>69</sup>。例えば、日次の個別銘柄の株価の場合、確率分布の切断をストップ高・安というサーキットブレーカーの発動に対応して考えれば、一定水準以上の変動が生じる確率をゼロとすることには一定の合理性が存在する。

安定分布の裾を正規分布と入れ替える方法では、切断の場合と同様に境界点を設定して両側の裾部分の密度をゼロではなく、正規分布の密度を対応させる。この方法は、単純な裾の切断に比べ、密度関数の減衰を滑らかにする効果がある。裾部分の減衰をより柔軟にコントロールするために、安定分布に裾部分の形状に関するパラメータ (切断係数) を追加した **tempered stable distribution**<sup>70</sup> が用いられることもある。この方式は、上記の2つの手法を包含した手法であり、安定分布とは異なる特性関数が用いられるなど、より複雑なものとなっている。

こうした方法で安定部分の裾を加工することにより、有限の分散が存在しないという安定分布の性質を変え、より高次のモーメントまで存在させることが可能になる。

分布の裾の切断に伴い切断安定分布は有限の分散を持つことになる。このため、切断安定分布に従う独立な  $n$  個の確率変数  $X$  の和は、 $n$  が十分に大きい時には正規分布に収束する (中心極限定理) と考えられるが、 $n$  がそれほど大きくない場合にはそうならないことも考えられる。実際に  $n$  がどの程度の大きさになった時に切断安定分布に従う確率変数の和が正規分布に収束するのかにつ

<sup>69</sup> 切断安定分布を使った分析の応用例としては、Mean-ES アプローチによるポートフォリオの最適化について分析した Xiong [2010]がある。Xiong [2010]では、ポートフォリオを構成する資産 (株、債券、不動産 REIT など) のリターンを多変量の切断安定分布で近似し、様々な尖度、歪度を持った分布のシナリオのもとで最適な投資配分比率に関するシミュレーション分析を行っている。分析の中で、切断安定分布の収益率分布に対するフィットがよいこと、正規分布を前提とした Mean-Variance の最適化に比べ、ファットテイルな分布を前提とした Mean-ES の最適化の結果はかなり異なることなどが示された。

<sup>70</sup> 詳細は、Borak et al. [2011]、Koponen [1995]、Rachev et al. [2011]を参照されたい。

いて、Mantegna and Stanley [1994]では、正規分布への収束は  $n$  が非常に大きな値となる場合に限られ、 $n$  の増加に伴う正規分布への収束は非常に緩やかに進むとの分析が示された<sup>71</sup>。

#### (4) 安定分布の以外のファットテイルな分布

本稿で用いた切断安定分布については、データ（日経平均株価の日次収益率）への当てはまりや無条件モデルの想定との整合性に大きな問題はないと考えられるが、パラメータ推計・リスク量計算の容易さについてはやや難がある。特に、分布の裾の加工については、困難な課題が多く存在する。本稿では、切断安定分布をリスク量計算のサンプルデータを生成する目的で使用したため、こうした問題は大きな制約とはならなかったが、実務における VaR、ES の計算への応用については課題が多い。

本稿で用いた安定分布以外にも損失分布の近似に用いることができる確率分布は多数存在する。中でも、ファットテイルな価格変動を近似できる分布としては、指数分布、べき乗分布、一般化パレート分布（GPD）、混合正規分布<sup>72</sup>、一般化双曲型分布（GHD）などがある。

指数分布については、久保田 [2009]では、パラメトリックな VaR 計測法に適した確率分布として両側指数分布（非対称性も考慮できる指数分布）が提案され、わかりやすいかたちの密度関数、市場価格データに近いファットテイル性、頑健なパラメータ推定、標準偏差からリスク量への変換が可能などの利点があるとされた。

べき乗分布（パレート分布など）は、指数パラメータのべき（累乗）のオーダーで発生確率が減衰していく分布であり、為替レートや株価変動を近似する確率分布として使われることも多い。

一般化双曲型分布（GHD）は、確率変数  $X$  の分布が

---

<sup>71</sup> Mantegna and Stanley [1994]では、切断安定分布に従う独立な  $n$  個の確率変数の和について、一定の分布のパラメータ設定（ $n$ 、安定指数  $\alpha$ 、切断点  $l$ ）のもとで、正規分布に従う（中心極限定理）あるいは安定分布に従う（一般化中心極限定理）のどちらが成立するかを判別するシミュレーション分析を行った。結果は、 $1 < \alpha < 2$  では、 $n$  が非常に大きい場合（ $n \geq 10^4$ ）は正規分布へ収束し、それ以下の場合には安定分布へ収束するとなった（同一の  $\alpha$  のもとでは、切断点  $l$  が大きくなるほど正規分布への収束が実現するのに必要な  $n$  の大きさは増える）。より柔軟な裾の加工が可能な tempered stable distribution の場合、確率変数の和の分布が従う分布を判別する条件は切断係数を含むパラメータにも依存する。詳細は、Rachev et al. [2011]を参照されたい。

<sup>72</sup> GPD、混合正規分布については、本稿でもリスク量計算の手法として使用した。

$$X = \mu + \beta V + \sqrt{V} Z$$

$Z$ は正規分布に従う確率変数

$V$ は正規分布よりもファットテイルな分布に従う正の確率変数

$V$ と $Z$ は独立

のように、正規分布とそれ以外の分布が混合<sup>73</sup>された分布である。この分布は、ボラティリティに関する条件付きの正規分布となっており、 $V$ が無限に分解可能な分布であれば、 $X$ も同様に無限に分解可能となるなど、金融資産の収益率をモデル化するのに便利な性質を持つ。

これらの分布のどれを選択するかについては、必ずしも理論的に明確な基準やルールがある訳ではない。一般的には、対象とするデータへの当てはまりの良さのほかに、モデル化の際の想定との整合性、パラメータ推計・リスク量計算の容易さなどを基準に選択することになる。

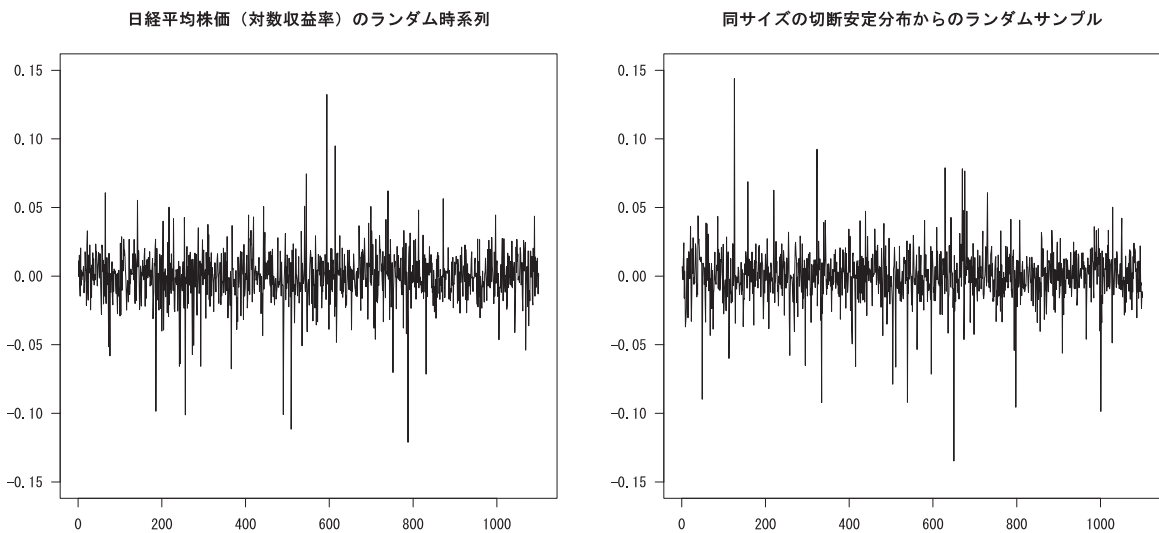
---

<sup>73</sup> ここで示したのは正規尺度平均混合 (variance-mean mixture) と呼ばれる混合方式。

### 補論3 無条件モデルにおける独立性の前提

無条件モデルでは、収益率の変動を近似する確率分布に関して、基本的に i.i.d. の前提が必要となる<sup>74</sup>。この点に関して問題となるのが、時系列に関する独立性である。株価の収益率については、ボラティリティ・クラスタリングの現象に象徴されるように、ボラティリティに対するショックの持続性が高いことが多く、そうした場合には時系列に関する独立性の仮定は妥当でない可能性が高い<sup>75</sup>。

図表 B2 ランダムに並べ替えた日経平均株価と切断安定分布からのサンプル



図表 B2（左）は、この収益率データの順序をランダムに入れ替えたもの（random permutation）である。入れ替え操作により元の時系列データから発生順序に関する情報が失われるため、本文図表 1 でみられたようなボラティリティの高い時期が連続するような状況はみられなくなっている。このように、ランダムに並べ替えたデータには時系列依存はなく、便宜的に i.i.d. の前提が成立すると考えても問題はない。

<sup>74</sup> 条件付きモデルの場合、例えば GARCH モデルでは、時系列変動の要素はボラティリティ変動に吸収され、残差の確率分布には i.i.d. が成立することが仮定される。無条件モデルでは、こうした分解ができないため、基本的に時間経過に関する情報を活用することは困難である。

<sup>75</sup> 本稿で切断安定分布の推計に用いた日経平均株価の日次収益率について Ljung-Box 検定を行ったところ、時系列の独立性の仮定は困難との結果であった（結果省略）。

図表 B2（右）は、推計した切断安定分布から同じサイズの乱数をサンプリングしたものである。このランダム・サンプリングにより得られるのは、発生順に関する情報が含まれない図表 B2（左）に対応するデータであって、発生順に関する情報を含んだ本文図表 1（右）に対応するものではない。これは、無条件モデルでは、損益の発生頻度だけに注目して、それが発生時間とは無関係に決まっていると想定していることを示唆している（静的なモデル）。

このように、無条件モデルでリスク計測を行う場合は、時間要素を考慮しないため、例えば、実際には現在のボラティリティの水準がわかったとしても、その情報を使うことはない。したがって、短期的なリスク量の把握・予測などには必ずしも応用し難い側面がある。その意味で、短期的な変動に対してより敏感に反応するリスク指標が必要とされる場合は、ボラティリティの時系列変動などの時間情報を積極的に活用する条件付きモデルのアプローチを用いる方がより有効と考えられる。

## 補論4 確率分布の近似による VaR、ES の計算手法の詳細

### (1) 正規分布近似

VaR および ES は、ある種の確率分布の場合は、

$$\text{VaR} | \text{ES} = -\mu + f(c, s, k) \cdot \sigma$$

$\mu, \sigma$  は平均、標準偏差、 $f(c, s, k)$  は信頼水準  $c$ 、歪度  $s$ 、尖度  $k$  の関数

などのようなかたちで解析的に計算できる場合がある (Rockafellar and Uryasev [2002])。

正規分布の場合、上記のような解析的な計算によりリスク量を容易に計算できる。すなわち、VaR、ES とも、以下のように正規分布  $N(\mu, \sigma)$  のパラメータを用いて解析的に計算できる。

$$\begin{aligned} \text{VaR}_p &= -\mu - \sigma z_{1-p} \\ \text{ES}_p &= -\mu + \sigma \frac{\phi(z_{1-p})}{1-p} \end{aligned} \quad (\text{B } 13)$$

$\mu, \sigma$  は収益率の平均・標準偏差、 $p$  = 信頼水準

$z_{1-p}$  は標準正規分布の  $100 \times (1-p)$  パーセンタイル

$\phi(\cdot)$  は標準正規分布の密度関数

例えば、信頼水準 95% の VaR、ES は、 $z_{0.05} \approx -1.65$ 、 $\frac{\phi(z_{0.05})}{0.05} \approx 2.06$  から

$$\begin{aligned} \text{VaR} &= -\mu + 1.65 \cdot \sigma \\ \text{ES} &= -\mu + 2.06 \cdot \sigma \end{aligned} \quad (\text{B } 14)$$

という簡単な式で計算できる<sup>76</sup>。VaR、ES ともに、データの標準偏差の定数倍を計算するだけなので、計算が簡単であり、信頼水準が変わってもリスク量への影響は限定的であるなど、非常に安定した推計が可能という特徴がある<sup>77</sup>。

<sup>76</sup> ES の計算式の導出については、山井・吉羽[2001a]。

<sup>77</sup> VaR や ES の推計値自体の分布を求めることは一般に容易ではないが、正規分布の場合、平均と分散のみから推計値が得られるため、解析的な計算も可能である(計算式の詳細は、Dowd [2000]を参照されたい)。本稿では、シミュレーション結果から直接、標準偏差などを計算した。

## (2) GPD 近似

極値理論 (extreme value theory、EVT)<sup>78</sup>を応用することで、確率分布の全体ではなく、裾の部分のみを推定することができる。すなわち、確率分布をある点を境に分布の裾部分とそれ以外に分け、裾部分の形状のみに絞って分布の形状を特定する。具体的には、 $X$  を分布関数が  $F(\cdot)$  である確率変数とする。一定の閾値  $u$  に対する超過  $X - u$  に関する条件付き分布を<sup>79</sup>、

$$F_u(y) = \Pr\{X - u \leq y \mid X > u\} = \frac{F(u+y) - F(u)}{1 - F(u)} \quad (\text{B } 15)$$

とする。この分布  $F_u(y)$  は、GPD で近似して応用されることが少なくない<sup>80</sup>。GPD の分布関数  $G_{\xi, \sigma}(y)$  および密度関数  $g_{\xi, \sigma}(y)$  は、形状パラメータ  $\xi$  と尺度パラメータ  $\sigma$  を用いて

$$G_{\xi, \sigma}(y) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \xi \frac{y}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\xi}}, & \xi \neq 0 \\ 1 - e^{-\frac{y}{\sigma}}, & \xi = 0 \end{cases} \quad g_{\xi, \sigma}(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} \left(1 + \frac{\xi y}{\sigma}\right)^{\left(\frac{1}{\xi} - 1\right)}, & \xi \neq 0 \\ \frac{\sigma^{\frac{1}{\xi}}}{(\sigma + \xi y)^{\frac{1}{\xi} + 1}}, & \xi = 0 \end{cases} \quad (\text{B } 16)$$

と表される。パラメータ  $\sigma$  の符号は正、 $y$  の値の範囲は  $\xi$  の値の範囲によって異なる。

$$\begin{aligned} & \sigma > 0 \\ & y \geq 0, \quad \xi > 0 \\ & 0 < y < -\left(\frac{\sigma}{\xi}\right), \quad \xi < 0 \end{aligned} \quad (\text{B } 17)$$

また、 $Y$  を  $GPD(\xi, \sigma)$  に従う確率変数とすると、 $Y$  の平均  $E(Y)$  と分散  $\text{var}(Y)$  は、

<sup>78</sup> 極値 (最大値、最小値など) がどのような確率的振舞いをするのかを研究対象とする理論。①BM (block maxima :  $n$  日間などデータを  $n$  個のブロックに分けてそれぞれの最大値・最小値が漸近的に従う分布 <一般極値分布、GEV> を求める)、②POT (peak over threshold : 一定の閾値を超える極端なデータの発生頻度に関する分布 <一般化パレート分布、GPD> を求める、の2つのアプローチがある。本稿では、少ない発生頻度の極値データをより有効に活用できる POT のみを対象とした。

<sup>79</sup> 本稿の GPD 近似では、分布の右側を対象として表記している。このため、実際の推計では、対数収益率に全て  $-1$  を乗じて VaR、ES を計算した後、符号を元に戻した。

<sup>80</sup> Balkema and DeHaan [1974]、Pickands [1975]。

$\xi$ が一定の範囲をとる場合にのみ存在する<sup>81</sup>。

$$E(Y) = \frac{\sigma}{1-\xi}, \xi < 1 \quad \text{var}(Y) = \frac{\sigma^2}{(1-\xi)^2(1-2\xi)}, \xi < \frac{1}{2} \quad (\text{B } 18)$$

GPD は、 $\xi > 0$ の時、パレート分布、スチューデント  $t$  分布などテイルの厚い分布、 $\xi = 0$ で正規分布や対数正規分布など裾の確率が指数関数的に減衰する分布、 $\xi < 0$ で一様分布やベータ分布など裾の短い分布に対応する。

GPD 近似によって VaR、ES を求めるには、(B 15)式で収益率を  $x = u + y$  と変数変換し、 $F_u(y)$  を  $G_{\xi, \sigma}(x - u)$  で置き換えると、元の確率変数  $X$  の分布関数  $F(x)$  は、

$$F(x) = (1 - F(u))G_{\xi, \sigma}(x - u) + F(u) \quad (\text{B } 19)$$

となることから計算できる。必要な分布のパラメータは、最尤法によって推計できるが、その際に閾値  $u$  をどう決めるかが重要なポイントとなる<sup>82</sup>。分布の裾を定義する上で、閾値  $u$  の水準は十分に高くなければならないが、高すぎる場合には閾値を超えるデータの数が少なくなり過ぎて、パラメータが安定的に推計できなくなるという問題がある。本稿では、最も単純な決め方として、日次収益率の下位 10%のデータを閾値を超えるデータとみなした。この場合、閾値はデータサンプルによって異なるため、リスク量の推計値およびそのばらつきに影響を及ぼす<sup>83</sup>。

GPD 近似による VaR、ES、ES/VaR 比率の計算式は、以下の通り<sup>84</sup>。

<sup>81</sup> GPD のモーメントについては、 $r < 1/\xi$ となるような整数  $r$  までのモーメントが存在する (Embrechts et al. [1997])。

<sup>82</sup> 閾値の決め方には幾つかの方法が提案されている。例えば、Gilli and Kellezi [2006]では、QQ プロットを用いた方法など複数の方法が参考文献とともに紹介されている。

<sup>83</sup> 閾値を変えた場合の超過の期待値 (mean excess) は、

$$e(v) = E[x - v | x > v] = \frac{\xi v}{1-\xi} + \frac{\beta - \xi u}{1-\xi}, v > u, \xi < 1$$

であり、閾値が上がるほど高くなる (閾値の増加関数、McNeil et al. [2005])。この線形の関係が維持されていることを利用して閾値  $u$  を決める考え方もある (Gilli and Kellezi [2006])。

<sup>84</sup> 計算式の導出については、McNeil et al. [2005]、Lee [2009]を参照されたい。閾値の設定やパラメータの安定的な推計に必要なデータ数などの詳細は、ダニエルソン・森本 [2000]を参照されたい。



$$VaR_p = \begin{cases} u + \frac{\sigma}{\xi} \left( \left( \frac{n}{n_u} (1-p) \right)^{-\xi} - 1 \right), & \xi \neq 0 \\ u - \sigma \ln \left( \frac{n}{n_u} (1-p) \right), & \xi = 0 \end{cases}$$

$$ES_p = \frac{VaR_p}{1-\xi} + \frac{\sigma - \xi u}{1-\xi}, \quad \xi < 1 \quad (B 20)$$

$$\frac{ES_p}{VaR_p} = \frac{1}{1-\xi} + \frac{\sigma - \xi u}{(1-\xi)VaR_p}$$

$n$  はデータサンプルサイズ

$n_u$  は閾値を超えるデータの数（本稿では  $n_u = n \times 0.1$ ）

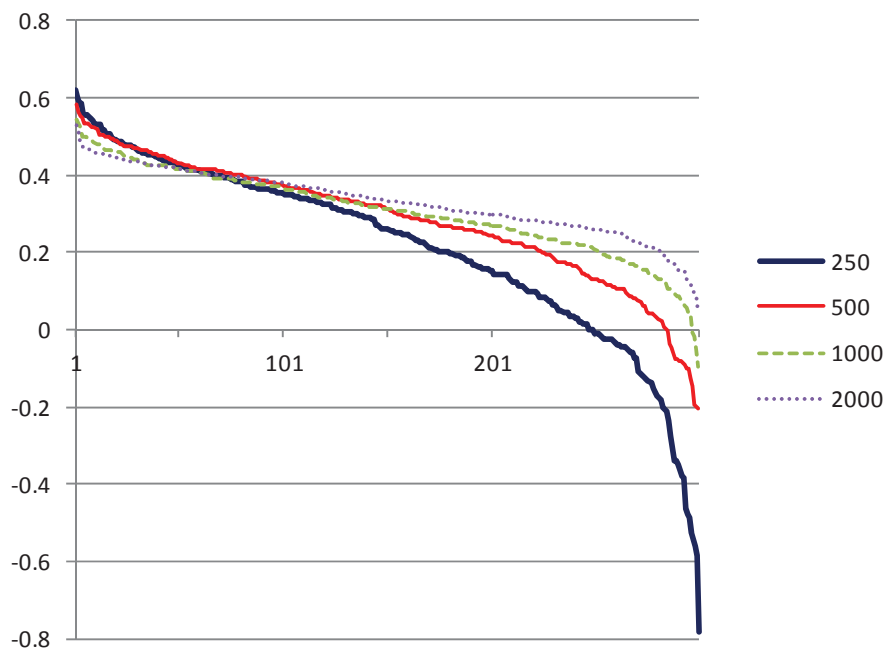
この手法は、正規分布近似の場合と同様、分布のパラメータを使って VaR、ES を計算できる。VaR の計算式には分布の形状に関するパラメータ  $\xi$  および信頼水準  $p$  が含まれている。また、ES の計算式には VaR が含まれており、VaR の推計値が直接 ES の推計値に影響を与えるかたちとなっている。

GPD 近似の注意点としては、裾の分布の GPD 近似が可能であったとしても、分位点の収束には一定の条件が必要なため、VaR や ES の近似がうまくいかない場合があることである（Makarov[2006]<sup>85</sup>）。GPD には、形状パラメータ  $\xi$  の数値によって平均、分散、ES などが存在しない場合がある。このため、仮にデータが有限の平均、分散を持つ分布に従っていたとしても、推計したパラメータが条件を満たさない場合、計算されるリスク量の数値が非常に大きなものになってしまうことがある<sup>86</sup>。本稿のシミュレーションでもそれに近い状況が一部でみられた。

<sup>85</sup> GPD 近似による分位点の収束条件は、 $0 < \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - F(x))x^{1/\xi} < \infty$ （Makarov [2006]）となっており、形状パラメータ  $\xi$  に影響される。Makarov [2006]では、収束条件が満たされない分布として対数ガンマ分布が例示されている。また、ES との関連では、GPD 近似により本来有限の平均を持つ分布が無限の平均で近似されてしまう場合があることも示された。こうしたケースでは、分布の平均・ES および高い信頼水準での VaR を正しく推計することは困難となる。

<sup>86</sup> ES/VaR 比率については、本文図表 8 に示したように信頼水準が上がるにつれて 1 に近づくことが予想される。GPD のパラメータ推計においても、信頼水準が上がるほど同比率は 1 に近づくことを前提とした。推計されたパラメータによっては、そうした前提が満たされない場合が一部生じたが、その場合、閾値の水準を変更し再推計することで対応した（条件を満たすまで閾値超のデータの比率を 1%ずつ引き上げた<上限最大 20%>）。

図表 B3 GPD の形状パラメータ  $\xi$  の推計値 (サンプルサイズ別)



(注) サンプルサイズ毎の推計値を降順に並べ替えてプロットした (サンプルセット数の合計はすべてのサンプルサイズについて 300)。

(参考) 分布の裾の閾値を超えるデータ比率 ( $n_u/n$ ) の設定状況

サンプルサイズ	閾値の水準設定別のサンプルセット数			セット数計
	10%(初期設定)	10~15%	15~20%	
250	232	54	14	300
500	247	48	5	300
1000	272	27	1	300
2000	279	21	0	300

(注) GPD のパラメータ推計時にコントロール可能なのは、分布の裾を特定する閾値の設定のみ。本稿では、閾値の設定は、 $n_u/n$  の比率により指定したが、(B 20)式および脚注 86 に示したパラメータ制約を満たすために必要に応じて  $n_u/n$  の比率を引き上げた。

図表 B3 では、シミュレーションにおける GPD のパラメータ推計について、形状パラメータ  $\xi$  の推計値をサンプルサイズ別に示している。250 の小サンプルでは、 $\xi$  の推計値は  $-0.8 \sim +0.6$  と符号反転を伴って広い範囲にばらついている。サンプルサイズの増大に伴ってこうした状況は緩和している。形状パラメータ  $\xi$  の推計値の上限と下限の周辺をサンプルサイズ別に比較すると、下限値付近でのばらつきが大きい。形状パラメータ  $\xi$  の推計値の符号が負の場合、裾の短い分布が想定され、収益率は (B 17) 式で示した範囲制約が生じる (ファッ

トテイルとは全く異なる状況)。こうした状況は、小サンプルでは分布の裾の形状をうまく捉えられないケースが生じていることを意味し、リスク量（VaR、ES）の過小推計につながる可能性がある。このように、特に小サンプルの場合において、形状パラメータ $\xi$ の推計値は相対的にばらつきが大きくなっており、これがリスク量の推計値のばらつきの大きさにつながる結果となった（図 A3、図 A4）。なお、GPD のパラメータ推計に際しては、図表 B3（参考）に示したように、一部のサンプルセットで閾値を超えるデータの比率を初期値の 10% から変更している。こうした調整の必要性は、サンプルサイズが増えるにつれて低下しているが、2000 サンプルでも 1 割弱のケースで若干の変更の必要がみられた。

このように、GPD の推計に関しては、安定的な推計を行うために大量のデータを確保することが極めて重要であり、データ数が少ない場合の応用には問題が多いと考えられる。

### （3）ヒストリカル法（ヒストリカルシミュレーション）

ヒストリカル法は、データの経験累積分布関数（ECDF）を用いて指定された信頼水準に対応する分位点を VaR とする手法である。 $n$  個の i.i.d. な確率変数  $X_1, X_2, \dots, X_n$  について共通の分布関数が  $F(x)$  であるとする。このとき、ECDF は以下のように定義される。

$$F_n(x) = \frac{x \text{ 以下のサンプルの数}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{X_i \leq x\}} \quad (\text{B 21})$$

$1_A$  は状態  $A$  が成立する場合に 1、それ以外は 0 の値をとる関数

ECDF は、 $n$  個のサンプルの各点において  $1/n$  ずつ確率の値が増えていく階段関数である（分布に関するパラメトリックな前提は何ら存在しない）。一般的なヒストリカル法では、信頼水準  $p$  についてこの ECDF の一般化逆関数により実際に発生したデータの中から VaR の値（標本分位点）が選ばれる<sup>87</sup>。また、ES は、VaR を超えるデータの単純平均として定義される。

<sup>87</sup> ヒストリカル法の VaR の前提となる階段状の ECDF の  $1-p$  分位点には区間  $[q_{1-p}^-, q_{1-p}^+)$  が対応する。

$$VaR_p^+[X] = q_{1-p}^+ = -\inf\{x \mid P[X \leq x] > 1-p\}, \quad 0 < p < 1 \quad (\text{本文(1)式と同じ})$$

$$VaR_p^-[X] = q_{1-p}^- = -\inf\{x \mid P[X \leq x] \geq 1-p\}, \quad 0 < p < 1$$

本稿では、ヒストリカル法の VaR を  $q_{1-p}^-$  として計算した。より厳密な VaR と分位点の関係については、Artzner et al. [1999] の Definition 3.2 に詳細な説明がなされている。

$$\begin{aligned} \text{VaR}_p[X] &= F_n^{-1}(1-p), \quad 0 < p < 1 \\ \text{ES}_p[X] &= \frac{1}{1-p} \sum_i \{-X_i \mid -X_i \geq \text{VaR}_p[X]\}, \quad 0 < p < 1 \end{aligned} \tag{B 22}$$

ヒストリカル法は、i.i.d.な確率変数  $X$  の真の分布関数を  $F(x)$ 、その経験分布関数を  $F_n(x)$  とすると、

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_x |F_n(x) - F(x)| = 0 \quad n \text{ はサンプルサイズ} \tag{B 23}$$

となること（Glivenko–Cantelli の定理）に理論的根拠を置いている。これは、サンプルサイズ  $n$  が十分大きければ、その標本は母集団に近いとみなせることを意味しているが、 $n$  が小さい時には必ずしも近似がうまくいかないことも考えられる。無条件モデルにおいては、暗黙にデータの独立性を前提としているので、通常 i.i.d. の条件は満たされていると想定する（ボラティリティ変動も考慮しない）。

経験分布を用いた VaR の推計値のバイアスについては、安藤 [2004] などの先行研究では過小推計の可能性が指摘されている<sup>88</sup>。ヒストリカル法による確率変数  $X$  に関する  $\text{VaR}_p[X]$  の標準偏差は、 $n$  が十分大きい場合、以下の計算式で得られる（山井、吉羽[2001b]<sup>89</sup>）。

$$\sigma_{\text{VaR}_p[X]} = \frac{1}{f(q_{1-p})} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, \quad 0 < p < 1 \tag{B 24}$$

$\sigma_{\text{VaR}_p[X]}$  は  $\text{VaR}_p[X]$  の標準偏差、 $f(x)$  は  $X$  の密度関数、 $q_{1-p}$  は  $X$  の  $1-p$  分位点

また、 $n$  が十分大きい場合、データからブートストラップ（復元抽出）して作成した標本も母集団に近いとみなせることから、データからブートストラップ標本を複数作成し、それらの平均値として VaR、ES を求め、同時にそのばらつきを計算する方法もある。実務で使われているヒストリカル法には、他にも

<sup>88</sup> Inui et al. [2005] は、ヒストリカル法による VaR について、分布のコンベクシティを仮定した理論的考察に基づき過大推計となる可能性があるとして指摘した。これに対して安藤 [2004] では、株、為替、金利などの実際の金融市場データを前提にした数値分析の結果から過大推計の可能性は無視し得るとの結論が示された。

<sup>89</sup> この式からも VaR の推計値のばらつきは、 $n$  が大きいほど小さくなるのがわかる。同様に ES の推定値の分散も  $n$  が大きくなれば小さくなる。ES の推定値の分散の計算式についても山井・吉羽 [2001b] の補論 1 で導出されている。

様々なバリエーションがあり、GARCH モデルなどと組み合わせてボラティリティの変動を調整した上でヒストリカル法を適用する Filtered historical simulation<sup>90</sup>なども使われている<sup>91</sup>。また、離散データの間を補完するかたちで発生確率を計算し、リスク量計算に反映する考え方もある。

本稿では、データ補完は行わず、VaR の定義式に従って単純に ECDF から VaR を求め、そこから VaR を超える損失の単純平均として ES を計算した。

リスク量計算に ECDF を用いる際の留意点としては、観察されたデータの最大値・最小値を超える収益率変動の確率は定義によりすべてゼロとなってしまう点が挙げられる。実際には、そうした値が生じる確率はゼロではないため、特にサンプルサイズが少ない場合にはリスク量の過小推計などの影響を及ぼす可能性がある。

#### (4) カーネルスムージング

カーネルスムージングとは、「確率分布の平滑化」の意味であり、観察されたデータを元に経験分布の平準化を行い、連続した密度関数（カーネル密度関数）を得る手法である。このカーネル密度関数を用いて VaR、ES を計算することができる<sup>92</sup>。

$n$  個の i.i.d. な確率変数  $X_1, X_2, \dots, X_n$  について共通の連続した分布関数  $F(x)$  と密度関数  $f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$  を考える。分布関数  $F(x)$  は、ヒストリカル法と同様に経験分布（ECDF）により推計することができるが、ECDF は連続でない階段関数であるため、 $\frac{d}{dx} F(x)$  から密度関数  $f(x)$  を直接求めることはできない。カーネルスムージングは、この密度関数をノンパラメトリックに推計する。

カーネル密度関数  $\hat{f}(x; X_{i=1, \dots, n})$  は、一般的に次のように定義される<sup>93</sup>。

<sup>90</sup> Filtered historical simulation の詳細は、Hull and White [1998]、Barone-Adesi et al. [2000]、Barone-Adesi [2008] を参照されたい。

<sup>91</sup> この他、標本を昇順に並べ替えた順序統計量の密度関数を推定し、それを用いて VaR、ES を計算する方法もある（Harrell-Davis 推定量）。ヒストリカル法による VaR の各種計算法については、安藤 [2004] を参照されたい。

<sup>92</sup> ヒストリカル法では、基本的に実際に発生したデータに確率が等しく付与される。これに対し、カーネルスムージング（によるリスク量計算）では、実際には発生していない値も含めてすべての収益率変動に確率を与えてリスク量計算を行う。

<sup>93</sup> 必ずしも厳密な説明ではないが、カーネルスムージングの仕組みは、ヒストグラムと対比して考えるとわかりやすい。ヒストグラムの場合、密度関数  $\hat{f}(x)$  は、

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{n} \frac{x \text{ が含まれるビンにあるデータ数}}{x \text{ を含むビンの幅}}$$

$$\hat{f}(x; X_{i=1, \dots, n}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_h(x - X_i) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h}\right)$$

$$K_h(x) = \frac{1}{h} K\left(\frac{x}{h}\right), h > 0 \quad (\text{B 25})$$

$X_i$  は  $i$  番目のデータに対応する確率変数、 $h$  はバンド幅（平滑化パラメータ）

ここで、 $K(x)$  はカーネル関数（スムージングカーネル）と呼ばれる関数であり、一般的に、以下のような性質を持つ関数がカーネル関数  $K(x)$  の候補となり得るとされる。

$$K(x) = K(-x), \int_{-\infty}^{\infty} K(x) dx = 1, \int_{-\infty}^{\infty} xK(x) dx = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 K(x) dx := \kappa_2 < \infty \quad (\text{B 26})$$

一般的には、左右対称で正の値をとり、 $x=0$  で最大値、その前後で単調増加・減少する連続関数（単峰型の密度関数）がカーネル関数として選ばれることが多い。

カーネル関数の候補には、複数の関数が存在する。例えば、

#### Epanechnikov カーネル

$$K(u) = \begin{cases} \frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{5}u^2\right) / \sqrt{5}, & |u| < \sqrt{5} \\ 0, & |u| \geq \sqrt{5} \end{cases} \quad (\text{単峰の山型}) \quad (\text{B 27})$$

#### ガウシアンカーネル

$$K(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \quad (\text{正規分布型}) \quad (\text{B 28})$$

などがよく使われるが、この他にも、Biweight、Triangular、Rectangular などのカーネル関数が存在する。

カーネル密度関数  $\hat{f}(x; X_{i=1, \dots, n})$  の値は、(B 25)式のようにデータ  $X_1, X_2, \dots, X_n$  が独立同一の密度関数  $f(x)$  に従うことから確率変動する。カーネル密度関数

と表される。カーネル関数に含まれるバンド幅  $h$  は、直観的には、ヒストグラムのビン（グラフの棒に対応）の幅に対応すると考えてよい。ただし、カーネルスムージングの場合、ヒストグラムのようにビンを設定してデータを区切るのではなく、個々のデータの位置を中心にして左右対称な滑らかな密度関数をデータの数だけ描いていくイメージとなる。カーネル密度関数はこれらの密度関数を積み上げたものであり、任意の点の確率密度は、近接する周辺のデータの位置における複数の密度関数を合計してスケールしたものとなっている。この個々の密度関数の周辺への広がり度合いを設定するのがバンド幅  $h$  である。

$\hat{f}(x; X_{i=1,\dots,n})$ の値の平均と分散は、

$$E[\hat{f}(x; X_{i=1,\dots,n})] \approx f(x) + \frac{f''(x)}{2} h^2 \kappa_2, \quad \text{var}[\hat{f}(x; X_{i=1,\dots,n})] \approx \frac{f(x)}{nh} \int K(x)^2 dx \quad (\text{B } 29)$$

$E[\hat{f}(x; X_{i=1,\dots,n})]$ 、 $\text{var}[\hat{f}(x; X_{i=1,\dots,n})]$ は  $\hat{f}(x; X_{i=1,\dots,n})$ の値の平均と分散を表す

$\kappa_2$  は(B 26)の  $\kappa_2$  と同じ

となる<sup>94</sup>。例えば、 $K(x)$ がガウシアンカーネルの場合は、

$$E[\hat{f}(x; X_{i=1,\dots,n})] \approx f(x) + \frac{f''(x)}{2} h^2, \quad \text{var}[\hat{f}(x; X_{i=1,\dots,n})] \approx f(x) \frac{1}{2\sqrt{\pi}nh} \quad (\text{B } 30)$$

となる。すなわち、カーネル密度関数  $\hat{f}(x; X_{i=1,\dots,n})$ の値は、真の密度関数  $f(x)$ の値に対してバイアスを持ち、その大きさは  $f''(x)$ とバンド幅  $h$ に比例する<sup>95</sup>。

スムージングの効果の観点からバンド幅  $h$ を大きくとれば、個々の密度関数がより広範囲に影響を及ぼし合い、積み上げで得られる全体の密度関数（カーネル密度関数）はより滑らかになる（この時、バイアスは大きい）。反対にバンド幅を狭くとれば、滑らかさは低下するが、密度関数は多峰型を示すなどして細かな変化を捉えられる（バイアスは小さい）。一方、ばらつきについては、データ数  $n$ 、バンド幅  $h$ が大きいほどばらつきは小さくなる（バイアスとばらつきの間でバンド幅  $h$ についてのトレードオフの関係が存在する）。

カーネルスムージングでは、カーネル関数の選択とバンド幅の決定を行わなければならない<sup>96</sup>が、カーネル関数の選択は、通常、データ数が十分あれば最終的に密度関数にはそれほど影響しないことが知られている（Yu et al. [2010]）。一方で、バンド幅については、スムージングの程度を決める重要なパラメータ

<sup>94</sup> ガウシアンカーネル以外の場合などについては、Chen [2005]、Sheather [2004]に詳しい説明がなされている。

<sup>95</sup> バイアス項のうち、 $f''(x)$ については、 $f(x)$ の頂点付近では  $f''(x) < 0$ なので

$\hat{f}(x; X_{i=1,\dots,n})$ は過小推計、 $f(x)$ のボトムでは  $f''(x) > 0$ なので  $\hat{f}(x; X_{i=1,\dots,n})$ は過大推計となる。バンド幅  $h$ が大きいほどこのバイアスが強調され、より強く平滑化される。

<sup>96</sup> カーネル関数の選択や最適なバンド幅の設定には、MSE(mean squared error、密度関数の局所的な当てはまりをみる指標)、MISE (mean integrated squared error、密度関数の全体の当てはまりをみる指標)、AMISE (asymptotic MISE)などが比較選択の基準とされる。カーネルについては、MISE 基準では Epanechnikov カーネルが最も効率が良く、これを基準にその他の要件も考慮して比較・選択されることが多い。最適なバンド幅は、これらの基準およびその比率などに関する最適化基準を適宜設定し、その答えを元に設定される。カーネル関数の選択、バンド幅の設定の考え方については、Sheather [2004]に簡潔にまとめられている。バンド幅選択の手法については、Zucchini [2003]でも詳しい説明がある。

であり、密度関数の形状を大きく左右する。このため、バンド幅の設定がリスク量計算にも大きな影響を及ぼす。バンド幅の設定には、数多くの手法が存在するが、比較的よく使われるのは、Silverman [1986]による次の計算式 (Silverman's rule of thumb)<sup>97</sup>である。

$$h = \left( \frac{4\hat{\sigma}^5}{3n} \right)^{1/5} \approx 1.06\hat{\sigma}n^{-1/5} \quad \hat{\sigma} \text{ は標本標準偏差} \quad (\text{B } 31)$$

本稿のシミュレーションでは、カーネルには、ガウシアンカーネルを使用し、バンド幅については、上記の計算式を用いて設定した。これらの設定は、本来は、実際のデータをみながら必要に応じて修正を加えて調整することが望ましいが、シミュレーションでは全て同一の設定とした。

VaR の計算については、推計したカーネル密度関数から分布関数を計算し、その逆関数を用いて信頼水準に対応する VaR 値を得ることができる。分布関数  $\hat{F}_n(x; X_{i=1,\dots,n})$  は、

$$\hat{F}_n(x; X_{i=1,\dots,n}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n G\left(\frac{x - X_i}{h}\right), \quad G(x) = \int_{-\infty}^x K(u)du \quad (\text{B } 32)$$

となるので、ここから、信頼水準  $p$  の VaR は、

$$\hat{F}_n^{-1}(1-p; X_{i=1,\dots,n}) = \text{VaR}_p, \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n G\left(\frac{\text{VaR}_p - X_i}{h}\right) = 1-p \quad (\text{B } 33)$$

を満たす  $\text{VaR}_p$  となる。本稿では、分布関数の逆関数  $\hat{F}_n^{-1}(\cdot)$  をニュートン法で計算することにより  $\text{VaR}_p$ <sup>98</sup> を得た。また、ES については、推計した VaR の値と定義式の本文(1)式から数値積分によって計算した。

<sup>97</sup> 正規分布、ガウスカーネルを前提に下記の MISE の最小化により得られるバンド幅  $h$ 。

$$\text{MISE}(h) = E \left[ \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{f}(x; X_{i=1,\dots,n}) - f(x))^2 dx \right] \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi}nh} + \frac{h^4}{4} \int_{-\infty}^{\infty} f''(x)^2 dx$$

この計算方法には、1.06 とは異なる係数を用いるなど、若干の変形版も存在する。本稿では、このままの形でバンド幅を計算した。

<sup>98</sup>  $\text{VaR}_p$  の推計値は漸近的に真の  $\text{VaR}_p$  に収束し (Yoshihara [1995])、その分散については、データ数が少ないほど、信頼水準が高くなるほど大きくなることが知られている (Chen [2005])。本稿ではシミュレーション結果から直接ばらつきを計算した。カーネルスムージングによる  $\text{VaR}_p$  の推計値の漸近的な平均、分散の導出等については Chen [2005] に詳細な説明がある。



## 参考文献

- Acerbi, C. and Tasche, D., [2002]. “On the coherence of expected shortfall.” *Journal of Banking & Finance*, Vol.26, No.7, pp.1487–1503.
- Alexander, C. and Sarabia, J., [2012]. “Quantile Uncertainty and Value at Risk Model Risk.” *Risk Analysis*, Vol.32, No.8, pp.1293–308.
- Alexander, C. and Sheedy, E., [2008]. “Developing a stress testing framework based on market risk models.” *Journal of Banking & Finance*, Vol.32, No.10, pp.2220–2236.
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.M. and Heath, D., [1999]. “Coherent measures of risk.” *Mathematical Finance*, Vol.9, No.3, pp.203–228.
- Balkema, A. and DeHaan, L., [1974]. “Residual life time at great age.” *The Annals of Probability*, Vol.2, No.5, pp.792–804.
- Barone-Adesi, G., [2008]. “A GARCH option pricing model with filtered historical simulation.” *Review of Financial Studies*, Vol.21, No.3, pp.1223–1258.
- Barone-Adesi, G., Giannopoulos, K. and Vosper, L., [2000]. “Filtering historical simulation. Backtest analysis.” *Universita della Svizzera Italiana, City University Business School and Westminster Business School and London Clearing House Working Paper*, pp.1–36.
- Basel Committee on Banking Supervision, [2012]. “Fundamental review of the trading book - consultative document.”
- Board of Governors of the Federal Reserve, [2011]. “Guidance on Model Risk Management.”
- Bollerslev, T., [1986]. “Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity.” *Journal of Econometrics*, Vol.31, pp.307–327.
- Borak, S., Misiorek, A. and Weron, R., [2011]. “Models for heavy-tailed asset returns.” In P. Cizek, ed. *Statistical Tools for Finance and Insurance*. Springer.

- Borkovec, M. and Klüppelberg, C., [2001]. “The tail of the stationary distribution of an autoregressive process with ARCH (1) errors.” *Annals of Applied Probability*, Vol.11, No.4, pp.1220–1241.
- Butler, J.S. and Schachter, B., [1996]. “Improving Value-at-Risk Estimates by Combining Kernel Estimation with Historical Simulation.” *Office of the Comptroller of the Currency, Economic & Policy Analysis, Working Paper*, Vol.96-1, pp.1–20.
- Chen, S.X., [2005]. “Nonparametric Inference of Value-at-Risk for Dependent Financial Returns.” *Journal of Financial Econometrics*, Vol.3, No.2, pp.227–255.
- Danielsson, J. and DeVries, C., [2000]. “Value-at-risk and extreme returns.” *Annales d’Economie et de Statistique*, Vol.60, pp.236–269.
- Dowd, K., [2000]. “Assessing VaR Accuracy.” *Derivatives Quarterly*, Vol.6, No.3, pp.61–63.
- Embrechts, P., Klüppelberg, C. and Mikosch, T., [1997]. *Modelling extremal events: for insurance and finance*, Springer.
- Engle, R.F. and Manganelli, S., [2004]. “CAViaR: Conditional Autoregressive Value at Risk by Regression Quantiles.” *Journal of Business and Economic Statistics*, Vol.22, No.4, pp.367–381.
- Frain, J.C., [2008]. “Value at Risk (VaR) and the  $\alpha$ -stable distribution.” *TEP Working Paper 0308*, pp.1–52.
- Gilli, M. and Këllezi, E., [2006]. “An application of extreme value theory for measuring risk.” *Computational Economics*, Vol.27, No.1, pp.1–23.
- Hull, J. and White, A., [1998]. “Incorporating volatility updating into the historical simulation method for value-at-risk.” *Journal of Risk*, Vol.1, No.1, pp.5–19.
- Inui, K., Kijima, M. and Kitano, A., [2005]. “VaR is subject to a significant positive bias.” *Statistics & Probability Letters*, Vol.72, No.4, pp.299–311.

- Kerkhof, J., Melenberg, B. and Schumacher, H., [2010]. “Model risk and capital reserves.” *Journal of Banking & Finance*, Vol.34, No.1, pp.267–279.
- Koponen, I., [1995]. “Analytic approach to the problem of convergence of truncated Lévy flights towards the Gaussian stochastic process.” *Physical Review E*, Vol.52, No.1, pp.1197–1199.
- Kunitomo, N. and Owada, T., [2006]. “Empirical likelihood estimation of Levy process.” *Graduate School of Economics, University of Tokyo Discussion Paper CIRJE-F-272*, pp.1–34.
- Lee, W., [2009]. “Applying Generalized Pareto Distribution to the Risk Management of Commerce Fire Insurance.” *Department of Banking and Finance, Tamkang University Working Paper*, pp.1–16.
- Makarov, M., [2006]. “Extreme value theory and high quantile.” *Journal of Operational Risk*, Vol.1, No.2, pp.51–57.
- Mandelbrot, B., [1963]. “The variation of certain speculative prices.” *Journal of Business*, Vol.36, No.4, pp.394–419.
- Mantegna, R. and Stanley, H., [2000]. *An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance*, Cambridge University Press.
- Mantegna, R. and Stanley, H., [1994]. “Stochastic process with ultraslow convergence to a gaussian: The truncated Levy Flight.” *Physical Review Letters*, Vol.73, pp.2946–2949.
- McNeil, A., Frey, R. and Embrechts, P., [2005]. *Quantitative risk management: concepts, techniques, and tools*, Princeton University Press.
- Misiorek, A. and Rafael, W., [2012]. “Heavy-tailed distributions in VaR calculations.” In J. E. Gentle, W. K. Härdle, and Y. Mori, eds. *Handbook of Computational Statistics*. Springer, pp. 1025–1059.
- Nolan, J., [2010]. “An introduction to stable distributions.” In *Stable distributions: models for heavy-tailed data*. Birkhauser.

- Pickands, J., [1975]. “Statistical inference using extreme order statistics.” *Annals of Statistics*, Vol.3, pp.119–131.
- Rachev, S., Kim, Y., Bianchi, M. and Fabozzi, F., [2011]. *Financial models with Lévy processes and volatility clustering*, Wiley.
- Rau-Bredow, H., [2004]. “Value at risk, expected shortfall, and marginal risk contribution.” In G. Szegö, ed. *Risk Measures for the 21st Century*. Wiley, pp. 61–68.
- Rockafellar, R.T. and Uryasev, S., [2002]. “Conditional value-at-risk for general loss distributions.” *Journal of Banking & Finance*, Vol.26, pp.1443–1471.
- Sheather, S.J., [2004]. “Density Estimation.” *Statistical Science*, Vol.19, No.4, pp.588–597.
- Sibbertsen, P., Stahl, G. and Luedtke, C., [2008]. “Measuring model risk.” *Leibniz University Discussion Paper*, Vol.1, No.409, pp.1–25.
- Silverman, B.W., [1986]. *Density Estimation*, Chapman & Hall.
- Yoshihara, K., [1995]. “The Bahadur representation of sample quantiles for sequences of strongly mixing random variables.” *Statistics & Probability Letters*, Vol.24, No.4, pp.299–304.
- Yu, K., Ally, A. and Yang, S., [2010]. “Kernel quantile-based estimation of expected shortfall.” *Journal of Risk*, Vol.12, No.4, pp.15–32.
- Zucchini, W., [2003]. “Applied smoothing techniques, part 1: Kernel Density Estimation.” [http://isc.temple.edu/economics/Econ616/Kernel/ast\\_part1.pdf](http://isc.temple.edu/economics/Econ616/Kernel/ast_part1.pdf).
- ダニエルソン ジョン、森本 祐司, [2000]. “市場リスクの予測について—EVTとGARCHモデルを用いたバリュー・アット・リスク算定の比較分析—.” 金融研究 日本銀行金融研究所, Vol.9, pp.1–28.
- 安藤美孝, [2004]. “ヒストリカル法によるバリュー・アット・リスクの計測：市場価格変動の非定常性への実務的対応.” 金融研究 日本銀行金融研究所, Vol.11, pp.1–42.

吉羽要直, [2013]. “ストレス状況を勘案した相関構造とリスク合算.” 日本銀行ワーキングペーパー, No.13-J-4, pp.1–34.

久保田幸長, [2009]. “市場 VaR 計測の問題点とパラメトリック法による改善.” *IMES Discussion Paper Series*, Vol.J, No.27, pp.1–42.

山井康浩、吉羽要直, [2001a]. “バリュー・アット・リスクのリスク指標としての妥当性について.” 金融研究 日本銀行金融研究所, Vol.4, pp.33–68.

山井康浩、吉羽要直, [2001b]. “期待ショートフォールによるポートフォリオのリスク計測—具体的な計算例による考察—.” 金融研究 日本銀行金融研究所, Vol.12, pp.53–94.