



日本銀行ワーキングペーパーシリーズ

リーマン・ショック直後の円高の定量的解釈 — スケープゴート・モデルによるアプローチ —

宇野洋輔[†]

yousuke.uno@boj.or.jp

中山 興[‡]

kou.nakayama@boj.or.jp

藤井崇史[§]

takanori.fujii@boj.or.jp

No.13-J-10
2013年8月

日本銀行
〒103-8660 日本郵便（株）日本橋郵便局私書箱30号

[†] 金融市場局（現・大阪支店）

[‡] 金融市場局（現・調査統計局）

[§] 金融市場局（現・静岡支店）

日本銀行ワーキングペーパーシリーズは、日本銀行員および外部研究者の研究成果をとりまとめたもので、内外の研究機関、研究者等の有識者から幅広くコメントを頂戴することを意図しています。ただし、論文の中で示された内容や意見は、日本銀行の公式見解を示すものではありません。

なお、ワーキングペーパーシリーズに対するご意見・ご質問や、掲載ファイルに関するお問い合わせは、執筆者までお寄せ下さい。

商用目的で転載・複製を行う場合は、予め日本銀行情報サービス局 (post.prd8@boj.or.jp) までご相談下さい。転載・複製を行う場合は、出所を明記して下さい。

リーマン・ショック直後の円高の定量的解釈*

— スケープゴート・モデルによるアプローチ —

宇野洋輔[†]・中山 興[‡]・藤井崇史[§]

2013年8月

【要 旨】

ドル/円レートは、リーマン・ショック直後に大きく円高方向に振れたが、金利差やインフレ格差といったファンダメンタルズのみに基づくモデルでは、為替レートの短期的かつ大規模な変動を十分に説明し切れなかったため、これまで定性的な説明がなされることが多かった。本稿では、こうしたドル/円レートの短期的かつ大規模な変動について、「スケープゴート・モデル」と呼ばれる比較的新しい為替レート決定モデルを用いることによって、これまでの定性的解釈に代替するような定量的解釈を示す。

実証分析の結果、リーマン・ショック直後の大幅な円高は、投資家が消費者物価に対する主観的なウエイト（評価）を引き下げ、マネーストックに対する主観的なウエイト（評価）を引き上げたことによって、それらの変数のドル/円レートへの影響が修正されたことによるものであることが示唆された。また、スケープゴート・モデルのパフォーマンスは、ファンダメンタルズのみを説明変数としたモデルと比べて、総じて良好であることも確認された。

キーワード：為替レート、円高、スケープゴート・モデル、合理的混同

* 本稿の作成過程で、岩壺健太郎教授（神戸大学）、西村清彦教授（東京大学）のほか、日本銀行の有識者・スタッフから有益なコメントを頂戴した。この場を借りて、深く感謝の意を表したい。ただし、ありうべき誤りは筆者に属する。本稿の内容と意見は、筆者ら個人に属するものであり、日本銀行の公式見解を示すものではない。

[†] 日本銀行金融市場局（現大阪支店、yousuke.uno@boj.or.jp）

[‡] 日本銀行金融市場局（現調査統計局、kou.nakayama@boj.or.jp）

[§] 日本銀行金融市場局（現静岡支店、takanori.fujii@boj.or.jp）

目 次

| | |
|--|----|
| 1. はじめに | 1 |
| 2. シンプルなスケープゴート・モデル | 2 |
| (1) モデルのセットアップ | 3 |
| (2) 情報不均一下での為替レート決定 | 4 |
| 3. 「合理的混同」メカニズムの検討 | 5 |
| (1) 複数のファンダメンタルズを有するスケープゴート・モデル..... | 6 |
| (2) 「合理的混同」が発生するメカニズムの検討 | 7 |
| 4. 実証分析の準備 | 10 |
| (1) データ選択に関する考え方 | 10 |
| (2) 実証の手順 | 11 |
| 5. 実証分析 | 12 |
| (1) リーマン・ショック直後の円高の定量的解釈 | 12 |
| (2) スケープゴート効果の大きさ | 14 |
| 6. スケープゴート・モデルのパフォーマンス | 15 |
| 7. おわりに | 16 |
| 参考文献 | 18 |
| 補論 1 : 為替レート決定式の導出..... | 19 |
| 補論 2 : カルマン・フィルターによるスケープゴート効果の描写 | 20 |
| 補論 3 : モデルの予測力を最大化する σ_d と τ_n の比率 | 22 |

1. はじめに

ドル/円レートは、リーマン・ショック直後に大きく円高方向に振れた（図表1）。こうしたドル/円レートの短期的かつ大規模な変動については、金利差やインフレ格差といったファンダメンタルズの変動だけでは説明し切れないことから、これまでは、「円キャリートレードの巻き戻し」や「グローバル投資家の安全通貨選好」といったキーワードを交えつつ、定性的な説明がなされることが多かったように見受けられる。

（図表1）ドル/円レート



（注1）月中平均。

（注2）以下の図表の直近値は、全て2013年3月。

（資料）Bloomberg

実際の為替レートが「円キャリートレードの巻き戻し」や「グローバル投資家の安全通貨選好」といった直接観察することが困難なさまざまな要素に影響されていることは、おそらく間違いないだろう。このため、これら観察困難な要素を全く勘案することなく、観察可能なファンダメンタルズのみを依拠したモデルを用いて為替レートの短期的な変動を説明しようとする試みは、これまで数多く試みられたが、ほとんど成功してこなかった¹。逆に言えば、これら観察困難な要素を為替レートに織り込もうとする市場参加者の行動を何らかの方

¹ Meese and Rogoff (1983、1988) がランダムウォーク・モデルの為替予測力を上回るような予測モデルが存在しないことを示して以来、多くの研究者が予測パフォーマンスの高い為替レート決定モデルの開発に挑んだものの、満足のいく予測精度の向上に成功したケースはほとんど見出すことができなかつた。なお、Cheung *et al.* (2005) は、予測力の評価基準によっては、例えば、特定の時期における ECM や、マルク/円レートに関して2国間の生産性格差を明示的に考慮した Balassa-Samuelson 型の為替モデルなどに短期的な予測精度の改善がみられるケースを指摘している（ただし、多くの場合、予測力向上が認められなかつた <do not point to any given model/specification combination as being very successful> と結論付けている）。

法で描写することができれば、短期的な為替レートの変動を上手く説明できる可能性があると考えられる。実際、最近の為替レート決定に関する研究では、従来のモデルで取り込み切れていなかった情報を上手く利用することによって、為替レートの予測パフォーマンスを改善する余地が残されていることが明らかになってきている²。こうした中、最近注目されている研究のひとつに、Bacchetta and van Wincoop (2004, 2006, 2009, 2011) による「スケープゴート・モデル」と呼ばれる為替レートの決定モデルがある。このモデルは、各投資家の保有する情報が不均一であり、かつ各投資家から観察不可能な変数が為替レートに影響を与えるような状況を想定している。この想定のもとでは、各投資家は、合理的な行動の結果として、観察不可能な変数が為替レートに及ぼす影響を観察可能な変数の影響であると誤認する。この各投資家の誤認は「合理的混同」と呼ばれ、為替レートをオーバーシュートさせるドライバーになるというものである。

本稿では、リーマン・ショック直後のドル/円レートの大規模な変動について、スケープゴート・モデルを用いて、これまでの定性的解釈に代替するような定量的解釈を示すことを試みる。以下、第2節では、Bacchetta and van Wincoop (2004, 2006) で示されたシンプルなスケープゴート・モデルを簡単に紹介する。第3節では、Bacchetta and van Wincoop (2009) に基づいて、同モデルの核心部分である「合理的混同」のメカニズムについて、実証分析を前提とした計算方法を交えつつ詳細に検討する。第4節では、実証分析に用いるデータと具体的な実証手順を説明する。第5節では、リーマン・ショック直後の円高について実証分析を行い、定量的な解釈を提示する。第6節では、スケープゴート・モデルのパフォーマンスについて検討し、本稿で扱った同モデルの限界についても言及する。第7節では、本稿の分析内容をまとめるとともに、今後の課題および拡張の方向性を述べる。

2. シンプルなスケープゴート・モデル

ここでは、Bacchetta and van Wincoop (2004, 2006) に基づいて、為替レートに影響を及ぼす要因がマネーストックのみであるシンプルなスケープゴート・モデルのアウトラインを紹介する。

² 最近の研究では、外国為替市場は強基準では効率的ではなく、準強基準で効率的であることを支持する実証結果が示されており、いわゆるファンダメンタルズとして利用される公的情報以外の何らかの情報を上手く利用することによって為替レートの予測パフォーマンスを改善する余地が残されていることが示唆されている。例えば、岩壺 (2011) などを参照。

(1) モデルのセットアップ

タイムホライズンは無限期間で、将来時点には不確実性があるものとする。また、同じ財を生産していて、異なる通貨が流通している 2 つの国があり、これらの国の間では、以下の通り、購買力平価が成立しているものとする。

$$\ln P_t = \ln P_t^* + \ln S_t \quad (\forall t) \quad (1)$$

P と P^* は、2 つの国の通貨で測った財の価格、 S は為替レートである。以下でも、アスタリスクを付すことにより、2 つの国の変数を区別する。なお、ここでは小国開放経済を仮定する。

このモデルには、 L 人の投資家がいて、各投資家はこのモデルの構造を理解しているものとする。投資家 j は、初期保有 w^j 、為替レート S 、債券利回り i と i^* 、を所与として、標準的な負の指数効用関数で表現される効用を最大化するように自国通貨 M^j と自国債券 \tilde{b}^j 、他国債券 \tilde{b}_F^j への投資を行う。なお、簡単化のために、各投資家の選好構造は同じであるとする。

$$-E_t^j[\exp\{-\gamma[(1+i_t)w^j + [\ln(S_{t+1}/S_t) + i_t^* - i_t]\tilde{b}_{F,t}^j - i_t \cdot M_t^j/P_t + y_{t+1}^j]\}] \quad (\forall t, j) \quad (2)$$

ここで、 γ は絶対的リスク回避度のパラメータ、 y^j は財の生産によって得られる所得を示している。また、財の生産は、為替レートと実質マネーストックに依存しているものとする。

$$y_{t+1}^j = \tilde{b}_t^j \cdot \ln S_{t+1} + (M_t^j/P_t) [\ln(M_t^j/P_t) - 1]/\alpha \quad (\forall t, j) \quad (3)$$

なお、 α (>0) は財の生産に関するパラメータである。 L 人の投資家は、将来のマネーストックに関して、異なるシグナル x_t^j を受け取るものと仮定する。このため、 L 人の投資家は、将来のマネーストックについて異なる情報を持つことになる。なお、このシグナルは、平均ゼロ、分散一定の正規分布に従う確率変数であるとする。

$$x_t^j \sim N(0, \sigma_x) \quad (\forall t, j) \quad (4)$$

各投資家の保有する情報が不均一であることから、最適な債券ポジションは投資家によって異なることになる。また、投資家 j の自国債券ポジション \tilde{b}^j は、各投資家に共通したポジション \tilde{b} と投資家 j に固有のポジションを合成したものであり、投資家 j は各投資家に共通したポジション \tilde{b} を直接観察できないものと仮定する（以下、 \tilde{b} を「観察不可能な変数」と呼ぶ）。したがって、投資家 j は、

他の投資家 $k \neq j$ の自国債券ポジション \tilde{b}^k を観察することもできない。ただし、各投資家は、この各投資家に共通したポジションが平均 \bar{b} 、分散一定の正規分布に従う確率変数であることは知っているものとする。

$$\tilde{b}_t \sim N(\bar{b}, \sigma_b) \quad (\forall t) \quad (5)$$

(2) 情報不均一下での為替レートの決定

各投資家の通貨保有に関する最適解の 1 階の必要条件と通貨市場の需給一致条件から、(6)式が得られる。

$$\begin{aligned} m_t - p_t &= -\alpha \cdot i_t \\ m_t^* - p_t^* &= -\alpha \cdot i_t^* \end{aligned} \quad (6)$$

ただし、マネーストック m と財の価格 p は対数値である。また、他国債券保有に関する最適解の 1 階の必要条件と小国開放経済の仮定から、(7)式が得られる。

$$\bar{E}_t[\ln S_{t+1}] - \ln S_t = i - i_t^* + \gamma \cdot \tilde{b}_t \cdot \sigma_b^2 \quad (7)$$

ここで、 $\bar{E}_t[\ln S_{t+1}]$ は、将来の為替レートに関する L 人の投資家の期待値の平均を表している。(1)式、(6)式、(7)式より、情報が不均一の下での為替レートは、(8)式のように決定される（導出は補論 1 を参照）。

$$\begin{aligned} \ln S_t &= (1 - \lambda)(F_t + b_t) + \lambda \bar{E}_t[F_{t+1}], \\ F_t &= (m_t - m_t^*), \quad \lambda = \frac{\alpha}{1 + \alpha}, \quad b_t = -\alpha \gamma \cdot \tilde{b}_t \cdot \sigma_b^2 \end{aligned} \quad (8)$$

(8)式は、為替レートが、現在のマネーストック、将来のマネーストックに関する投資家の期待値の平均、観察不可能な変数、に依存して決定されることを示している。ここで、 L 人の投資家が受け取るシグナルは平均ゼロと仮定しているため、将来のマネーストックに関する各投資家の期待値の平均は、将来のマネーストックに等しい。加えて、各投資家はこのモデルの構造を理解していると仮定しているため、将来のマネーストックに関する各投資家の期待値の平均が将来のマネーストックに等しいことを知っている。このことは、観察される為替レートの実現値（実績値）が将来のマネーストックに関するシグナルになることを意味している。このため、このモデルの均衡では、各投資家は、為替レートから将来のマネーストックに関する他の投資家の期待値を類推していくという行動をとることになる。

もつとも、(8)式には各投資家に共通のポジション b が含まれている。すなわち、このモデルの均衡においては、為替レートが観察不可能な変数に依存しているため、観察される為替レートからは、将来のマネーストックに関する他の投資家の期待値が完全に明らかとはならない。換言すれば、各投資家は、為替レートから将来のマネーストックに関する他の投資家の期待値を識別することができない。このため、このモデルの均衡では、「合理的混同」と呼ばれる現象が生じることになる。「合理的混同」によって為替レートが変動するメカニズムの詳細は次節で検討することとし、ここでは、「合理的混同」について直観的な説明にとどめる。

今、投資家 j にとって、為替レートが予想以上に上昇したとしよう。この時、為替レートの上昇を観察した投資家 j は、2つの可能性について検討することになる。ひとつは、他の投資家が債券ポジションを変化させた可能性であり、もうひとつは、他の投資家が将来のマネーストックの増加に関するシグナルを受け取った可能性である。前者が真実なのであれば、投資家 j は、将来のマネーストックに関する自らの期待値を修正する必要はない。一方、後者が真実なのであれば、投資家 j は自らの期待値を修正しなければならない。モデルの均衡では、投資家 j は、前者と後者を識別できないため、「自らの期待値を修正する必要はない」と結論付けることができず、将来のマネーストックに関する自らの期待値を必ず幾分かは修正することを余儀なくされる。こうして、投資家 j は、為替レートから将来のマネーストックに関する他の投資家の期待値を合理的に類推した結果として、他の投資家の債券ポジションという観察不可能な変数が為替レートに及ぼす影響を、将来のマネーストックの変化の影響であると「誤認」してしまう。こうした「誤認」発生のプロセスが、「合理的混同」の直観的なメカニズムである。

3. 「合理的混同」メカニズムの検討

前節では、最もシンプルなスケープゴート・モデルを紹介した。スケープゴート・モデルの本質は、各投資家の保有する情報が不均一であり、かつ各投資家から観察不可能な変数が為替レートに影響を与える場合に、均衡において「合理的混同」と呼ばれる現象が生じることである。

本節では、Bacchetta and van Wincoop (2009) に基づいて、前節のモデルの表現を幾つかの点で修正しつつ、投資家の「合理的混同」による為替レートへの影響について詳細に検討する。なお、本節でのモデルの表現にかかる修正は、「合

理的混同」のメカニズムを簡潔かつ直接的にモデルに組み込むための技術的なものであり、上記のスケープゴート・モデルの本質を変えるものではない。

(1) 複数のファンダメンタルズを有するスケープゴート・モデル

前節では、為替レートに影響を与える「観察可能な変数（以下、ファンダメンタルズと呼ぶ）」として、マネーストックのみを扱ったが、ここでは、実証分析に堪えるように、ファンダメンタルズを複数 (N 個) に拡張する。具体的には、ファンダメンタルズとして、金利、消費者物価、実質 GDP、累積経常収支といった複数の経済指標を扱うことが可能となるようにモデルを修正する。

また、前節のシンプルなスケープゴート・モデルでは、各投資家が将来のファンダメンタルズに関して異なるシグナルを受け取るという設定のもとで、為替レート自体がシグナルとなることを示した。ここでは、それを直接的に記述する。すなわち、各投資家は、為替レートの実績値という各投資家に共通したシグナル Δd_t を受け取りつつ、それぞれ異なる主観的なウェイトに基づいて最適化行動をとっているものとする。

まず、 F_t をファンダメンタルズの線形和として表現すると、

$$F_t = \sum_n \beta_{n,t} \cdot f_{n,t} = \sum_n \sum_{i=0}^{\infty} \beta_{n,t-i} \cdot \Delta f_{n,t-i} \quad (9)$$

となる。ここで、 $f_{n,t}$ は無限過去から t 時点までの各時点でのファンダメンタルズの変化 $\Delta f_{n,t-i}$ を成分を持った、無限次元ベクトルであり、 $\beta_{n,t}$ はそれらに係るウェイト $\beta_{n,t-i}$ を成分を持った無限次元ベクトルである³。さらに、各成分 $\beta_{n,t-i}$ は、以下のような時間に関して独立かつ同一の確率変数であると仮定する。

$$\beta_{n,t-i} \sim N(\bar{\beta}_n, \tau_n) \quad (\forall t) \quad (10)$$

ここで、 $\bar{\beta}_n$ と τ_n は、各投資家の主観的なウェイトの平均と分散である。各投資家は $\beta_{n,t}$ が正規分布に従うことは知っているが、他の投資家の主観的なウェイトを観察することができないため、 $\bar{\beta}_n$ も観察することができない。そのため、投資家 j の主観的なウェイトを

$$E_t^j[\beta_{n,t}] = \beta_n^j \quad (\forall t, j) \quad (11)$$

と定義すると、主観的なウェイト β_n^j は必ずしも $\beta_n^j = \bar{\beta}_n$ とはならない。

³ 本稿では、ベクトルを太字で、成分を細字で表すことで、両者を区別している。

前節におけるシンプルなスケープゴート・モデルの為替レート決定式である(8)式は、現在のファンダメンタルズ、将来のファンダメンタルズに関する各投資家の期待値の平均値、観察不可能な変数、という3つの変数の線形結合になっている。本節では、将来に関する不確実性を投資家間の主観に関する不確実性に置き換えているため、為替レート決定式は、現在のファンダメンタルズの線形和、ファンダメンタルズの線形和に関する各投資家の期待値の平均値、観察不可能な変数という3つの変数の線形結合となる。

$$\ln S_t = (1 - \lambda)(\bar{F}_t + b_t) + \lambda \bar{E}_t[F_t]$$

$$\bar{F}_t = \sum_n^N \sum_{i=0}^{\infty} \bar{\beta}_n \cdot \Delta f_{n,t-i} = \sum_n^N \bar{\beta}_n \cdot f_{n,t}, \quad f_{n,t} = \sum_{i=0}^{\infty} \Delta f_{n,t-i} \quad (12)$$

(12)式の階差をとると、以下の(13)式を得る。

$$\Delta \ln S_t = (1 - \lambda) \left\{ \sum_n^N \bar{\beta}_n \Delta f_{n,t} + \Delta b_t \right\} + \lambda \sum_n^N \bar{E}_t[\beta_{n,t} \Delta f_{n,t}]$$

$$+ \lambda \sum_n^N \sum_{i=1}^{\infty} \Delta f_{n,t-i} (\bar{E}_t[\beta_{n,t-i}] - \bar{E}_{t-1}[\beta_{n,t-i}]) \quad (13)$$

(2) 「合理的混同」が発生するメカニズムの検討

(13)式から明らかな通り、このモデルの均衡では、為替レートに対して、各投資家の期待値の平均値 $\sum_n^N \bar{E}_t[\beta_{n,t} \Delta f_{n,t}]$ が影響を及ぼすことになるため、以下では、各投資家が期待値を合理的に計算していくプロセスについて詳細に議論する。これは、前節で簡単に言及した「合理的混同」が発生するメカニズムそのものであり、スケープゴート・モデルの核心部分である。

各投資家は、為替レートの実績値というシグナルを受け取ると、その情報を所与として条件付き確率 $P(\{\beta_{n,t} | \forall n\} | \Delta d_t)$ を最大にするように、自らの主観的なウェイトを修正していく。本稿では、状態方程式と観測方程式をそれぞれ、以下の(14)式の通りに定めることにより、主観的なウェイトの修正過程をカルマン・フィルターによって描写する⁴。なお、為替レートの実績値という各投資家に共通したシグナル Δd_t は、各投資家が自らの主観的なウェイトを修正する前の

⁴ 主観の修正プロセスは、様々な方法で表現可能である。本稿では、カルマン・フィルターによってそれを描写しているが、他の方法による同プロセスの描写は今後の課題である。

為替レートであり、同ウエイトを修正した後の、このモデルの均衡における為替レート $\Delta \ln S_t$ とは異なる点に留意されたい。

$$\begin{aligned} \text{状態方程式：} \quad & \beta_{n,t} \sim N(\beta_n^j, \tau_n) \quad (\forall t) \\ \text{観測方程式：} \quad & \Delta d_t = \sum_n^N \Delta f_{n,t} E_t^j[\beta_{n,t}] + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_d) \quad (\forall t) \end{aligned} \quad (14)$$

シグナル Δd_t は、各投資家の主観的なウエイトが修正される前の為替レートの実績値であるため、

$$\Delta d_t = \sum_n^N \bar{\beta}_n \cdot \Delta f_{n,t} + (1 - \lambda) \Delta b_t \quad (15)$$

で与えられる。以上のセットアップのもとで、条件付き確率 $P(\{\beta_{n,t} | \forall n\} | \Delta d_t)$ を最大化するような解は以下の通りとなる（詳細については、補論2参照）。

$$\begin{aligned} \mu_{n,t}^j &= \beta_n^j + \Delta \mu_{n,t}^j \\ \Delta \mu_{n,t}^j &= G_{n,t} \left(\Delta d_t - \sum_n^N \beta_n^j \cdot \Delta f_{n,t} \right), \quad G_{n,t} = \frac{\Delta f_{n,t} \cdot \tau_n}{\sigma_d + \sum_n \Delta f_{n,t}^2 \cdot \tau_n} \end{aligned} \quad (16)$$

さらに、L人の投資家についての平均をそれぞれ $\mu_{n,t}, \Delta \mu_{n,t}$ とすると、

$$\begin{aligned} \mu_{n,t} &= \bar{\beta}_n + \Delta \mu_{n,t} \\ \Delta \mu_{n,t} &= G_{n,t} (1 - \lambda) \Delta b_t, \quad G_{n,t} = \frac{\Delta f_{n,t} \cdot \tau_n}{\sigma_d + \sum_n \Delta f_{n,t}^2 \cdot \tau_n} \end{aligned} \quad (17)$$

となる。(17)式からは、修正されたウエイト $\mu_{n,t}$ は、観察不可能な変数 Δb_t の影響を受けていることがわかる。最後に、(13)式における「合理的混同」によってウエイトが修正される部分 $\sum_n^N E_t^j[\beta_{n,t} \Delta f_{n,t}]$ を(17)式を用いて書き換えた上で、過去のウエイトの期待値は時間の変化に応じて（每期遡って）更新されないという仮定を置くことによって、(13)式の右辺第3項を捨象すると⁵、為替レート決定式は、以下のように整理することができる。

⁵ Fratzscher *et. al.* (2012) においても、(1) 過去のファンダメンタルズに基づくウエイトの期待値の変化を実証的に捉えることが困難であること、(2) 為替レート変動に対する影響度が(12)式の第1項や第2項と比べて小さいと考えられる (may also be of second order importance) ことから、この左辺第3項を捨象している。

$$\Delta \ln S_t = \sum_n^N \bar{\beta}_n \cdot \Delta f_{n,t} + (1 - \lambda) \Delta b_t + \lambda \sum_n^N \Delta \mu_{n,t} \cdot \Delta f_{n,t} \quad (18)$$

$$\Delta \mu_{n,t} \cdot \Delta f_{n,t} = G_{n,t} (1 - \lambda) \Delta b_t \cdot \Delta f_{n,t} = \frac{\Delta f_{n,t}^2 \cdot \tau_n}{\sigma_d + \sum_n \Delta f_{n,t}^2 \cdot \tau_n} (1 - \lambda) \Delta b_t$$

(18)式は、「合理的混同」のメカニズムを端的に表現している。すなわち、「合理的混同」の結果として生じる主観的なウェイトの修正 $\Delta \mu_{n,t} \cdot \Delta f_{n,t}$ は、ファンダメンタルズの変動幅 $\Delta f_{n,t}^2$ が大きいほど、あるいは観察不可能な変数の変化 Δb_t が大きいほど大きくなる。直観的に言えば、観察不可能な変数の影響によって為替レートが変動した際、各投資家は、観察可能なファンダメンタルズのうち、変動幅の相対的に大きな変数が為替レートの変動要因になっていると考える。より正確には、ファンダメンタルズの変動幅の大きさに応じて、自らの主観的なウェイトを修正する⁶。繰り返しになるが、こうした主観的なウェイトの修正は、各投資家が、観察された為替レートの変動の背後にある要因（観察不可能な変数によるのか、あるいは自らの主観的なウェイトが他の投資家のそれと異なっていることによるのか）を識別できないことに起因している。

なお、主観的なウェイトの修正がファンダメンタルズの変動幅 $\Delta f_{n,t}^2$ に依存するということは、ファンダメンタルズの変動の方向とは無関係に、スケープゴート効果の大きさが定まること、すなわち、ファンダメンタルズが為替レートに対して整合的な動きをしている場合に限らず、非整合的な動きをしている場合にも、「合理的混同」が生じることを意味している。この点、Fratzscher *et. al.* (2012)では為替レートに対してファンダメンタルズが整合的に変化する場合に限定して「合理的混同」が定義されているのに対し、本稿では、整合的な場合と非整合的な場合の両方を含めて、「合理的混同」が生じるものとして扱っている。

⁶ こうしたメカニズムは、相対的に変動幅の大きなファンダメンタルズがスケープゴートにされていると解釈できることから、このモデルは、「スケープゴート・モデル」と呼ばれている。ただし、スケープゴートとしてただ1つのファンダメンタルズが選ばれるわけではなく、変動幅の大きさに比例して複数のファンダメンタルズがスケープゴートにされる点にも留意されたい。その意味では、このモデルは「Scapegoat Model」ではなく、「Scapegoats Model」と呼称する方がモデルの特性をより正確に表現することになるのかもしれない。なお、英語のscapegoatにimplyされている「真実の犯人（原因）は他にいるが、見せしめ的に罪（原因）を着せられている」といった意味は、ここには含まれていない。

4. 実証分析の準備

(1) データ選択に関する考え方

本稿の実証分析では、(18)式のファンダメンタルズ $\Delta f_{n,t}$ として、マネーストック (M3) 平残前年比の米日差、消費者物価指数前年比の米日差、2 年国債利回り (月中平均) の米日差、日本の累積経常収支対名目 GDP 比を用いる。また、観察不可能な変数 Δb_t としては、1 期前の為替レートとファンダメンタルズで説明される部分との乖離 $\Delta S_{t-1} - \sum_n^N \bar{\beta}_n \cdot \Delta f_{n,t-1}$ を用いる⁷。

こうしたデータの選択は、外国為替市場における投資家を次のように想定していることになる。すなわち、各投資家は、①マネーストック、消費者物価、2 年国債利回り、日本の累積経常収支が為替レートに影響を与えることを知っている。また、②これら 4 変数以外にも、為替レートに影響を与える観察不可能な変数が存在することも知っている。しかしながら、③これら 4 変数以外の変数 (観察不可能な変数) がどのように為替レートに影響を与えるかは知らない。結果として、④観察不可能な変数が為替レートに与える影響を、4 変数による影響であると誤認してしまう。

この 4 つの変数のみをファンダメンタルズと考えるような投資家像は、果たして現実的だろうか。市場参加者の中には、例えば、IMM ネットポジションや「政策期待」と呼ばれるような追加的な金融緩和に関する期待が為替レートに影響を与えているのではないかと考える向きもあるだろう。しかも、IMM ネットポジションはマネーストックなどと同様に、観察可能 (データが入手可能) である。これらは、ファンダメンタルズではないのだろうか。

この点、スケープゴート・モデルが想定する観察不可能な変数とは、それがデータとして実際に目にすることができないことを意味しているわけでは必ずしもない。仮に観察可能な変数であったとしても、それを為替レートにどう織り込むべきか市場参加者が分からなければ、スケープゴート・モデルにおいて

⁷ Fratzscher *et. al.* (2012) では、 Δb_t の代理変数として為替のオーダーフロー・データを用いている。Evans and Lyons (2002) が示しているように、確かにオーダーフロー・データを使うと、モデルの説明力が著しく高まるが、そうしたモデルの説明力の向上は、合理的混同によるものというより、オーダーフロー・データの導入によるものである可能性が高い。実際、Fratzscher *et. al.* (2012) における日本円やカナダドルに対するモデルの説明力向上は、合理的混同の影響というより、むしろオーダーフロー・データを取り入れたことによるところが大きくなっている。本稿では、個別金融機関の非公表データであるオーダーフロー・データを用いる代わりに、1 期前の推計誤差を観察不可能な変数として内生的に扱うこととする。

は、観察不可能な変数と同義である。つまり、市場参加者は、①為替レートと変数の間に何らかの理論的なバックグラウンド（マネタリーアプローチ、購買力平価説、金利平価説、フローアプローチ）があり、かつ、②それに基づいて為替レートへの変数の織り込み方を認識しているものに限って、為替レートを説明するファンダメンタルズとして利用することが可能となる。

これを踏まえると、IMM ネットポジションは、市場参加者にとって入手可能な計数ではあるものの、市場参加者は、IMM ネットポジションが為替レートの「巻き戻し」をドライブすると考える場合もあれば、為替レートと同一方向に動くと考えられる場合もあり、IMM ネットポジションを為替レートにどう織り込むべきか（ドル買い要因か、ドル売り要因か）を必ずしも先験的に知っているわけではないと考えられる。このため、市場参加者にとっては、スケープゴート・モデルの世界におけるファンダメンタルズではないと考えられる。

このほか、「政策期待」に関する考え方も、IMM ネットポジションの場合と基本的に同じである。例えば、米国金融政策に関する追加的な緩和期待の高まりは、マネーストックの増加や米金利低下によるドル売り要因になる場合がある一方、それによって米国経済が改善されるとの見方からドル買い要因になる場合もある。このため、「政策期待」に関しても、IMM ネットポジションの場合と同様に、為替レートへの作用（の方向性）が必ずしも自明ではないことから、市場参加者にとって、ファンダメンタルズには含まれていない。

（２）実証の手順

(18)式が示すように、スケープゴート効果（「合理的混同」による主観的なウエイト修正の影響）の大きさ $\Delta\mu_{n,t} \cdot \Delta f_{n,t}$ は、各投資家の主観的なウエイトのばらつき τ_n と各時点の為替レートの変化から得られるシグナルのばらつき σ_d の相対的な大きさ（比率）に依存している。このため、(18)式を推定するという作業は、第1項の $\bar{\beta}_n$ と、 τ_n と σ_d の比率を定めることに他ならない。

τ_n と σ_d に関して、これらの値を先験的に定めることは困難である。また、何らかのデータからこれらを同時に推定していくことも難しい。このため、本稿では、まず、為替レートをファンダメンタルズに回帰することによって $\bar{\beta}_n$ を推定する⁸。 $\bar{\beta}_n$ が時間に関して独立かつ同一であるという仮定により、 τ_n と σ_d の比

⁸ パラメータの内挿推計期間は1992年1月～2012年6月。推計結果は以下の通り（括弧内はt値）。マネーストック（M3）平残前年比の米日差：-0.0027 (-1.71)、消費者物価指数前年比の米日差：-0.0027 (-1.69)、2年国債利回り（月中平均）の米日差：0.0078 (4.87)、日本の累積経常収支対名目GDP比：-0.0029 (-1.81)。この結果、補論3で示すように、 τ_n と σ_d の比

率が $\bar{\beta}_n$ の影響を受けることに伴う計算の煩雑さを回避することができる。その後、 $\bar{\beta}_n$ の推定値を所与として、(18)式の標本外（アウト・オブ・サンプル）予測精度を最大化するように、 τ_n と σ_d の比率をセットするという手順を採用した（具体的な τ_n と σ_d の比率の設定手順は、補論3参照）。

この結果、 $\bar{\beta}_n$ を所与として、投資家の主観的なウエイト $\mu_{n,t}$ が過去1期間のシグナルのみに基づいて更新されていくプロセスを繰り返すこととなる。

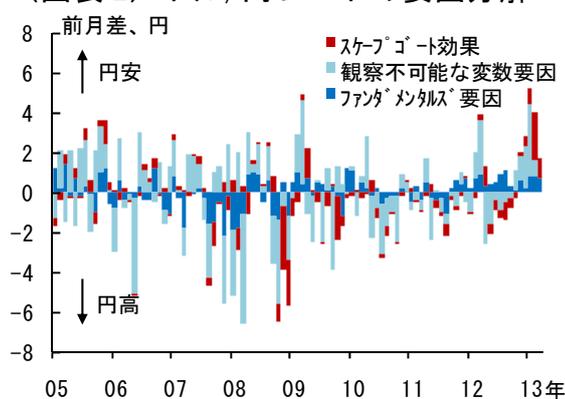
5. 実証分析

本節では、(17)式に基づいた実証結果を示し、リーマン・ショック直後のドル/円レートの短期的かつ大規模な変動について、定量的な解釈を提示する。

（1）リーマン・ショック直後の円高の定量的解釈

スケープゴート・モデルを用いて、ドル/円レートを①ファンダメンタルズで説明される部分 $\bar{\beta}_n \cdot \Delta f_{n,t}$ 、②観察不可能な変数で説明される部分 Δb_t 、③スケープゴート効果 $\Delta \mu_{n,t} \cdot \Delta f_{n,t}$ の3つに要因分解したものが図表2である。要因分解の結果をみると、2008年秋のリーマン・ショック直後にドル/円レートが大きく円高方向に振れたところでスケープゴート効果が円高方向に寄与していること、すなわち、「合理的混同」が生じた結果、ドル/円レートがオーバーシュートした様子が窺われる。また、足もとでは、スケープゴート効果が円安方向に寄与していることを確認することができる。

（図表2）ドル/円レートの要因分解



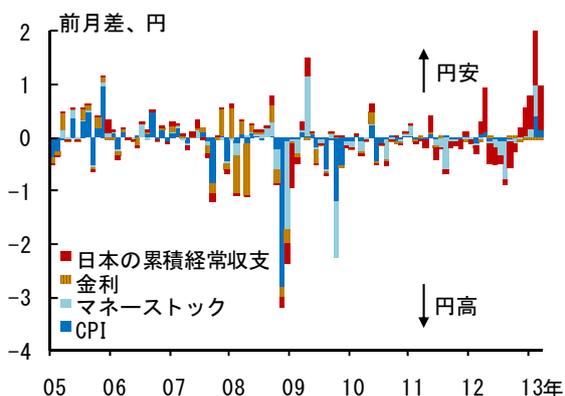
（資料）総務省「消費者物価指数」、内閣府「国民経済計算」、日本銀行「マネーストック」「国際収支統計」、Bloomberg

率が $\bar{\beta}_n$ の影響を受けることなく、0.14と設定される。

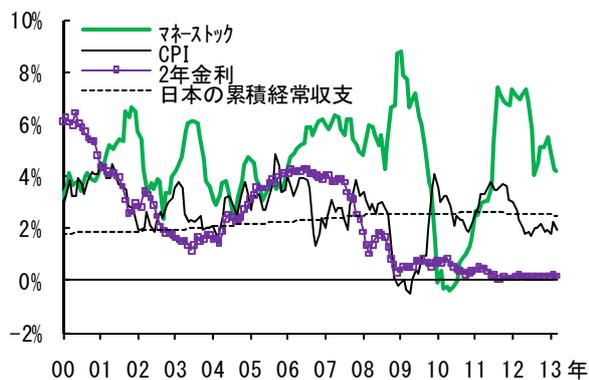
さらに、スケープゴート効果の発生した部分に着目して、「ファンダメンタルズである 4 変数が各々の程度スケープゴートにされたか」について要因分解を試みたものが図表 3 である。スケープゴート効果の内訳をみると、リーマン・ショック直後には、消費者物価とマネーストックがスケープゴートにされた様子を確認することができる。

この点についてやや仔細にみると、リーマン・ショック直後、ドル/円レートが円高方向に大きく振れるなかで、消費者物価の米日差は、ドル/円レートと非整合的にゼロ近傍まで急速に縮小した（図表 4）。スケープゴート・モデルに則して言えば、各投資家は、ドル/円レートが円高方向に大きく振れた原因について、観察不可能な変数によるものなのか、あるいは変動幅が大きかった消費者物価の米日差に関する他の投資家の主観的なウエイトが修正されたことによるものなのかを識別することができなかったということになる。このため、各投資家は、変動幅の大きな消費者物価米日差を最大のスケープゴートにして、為替レートに対する影響度（主観的なウエイト）を修正することとなる。その際、為替レートに対して消費者物価米日差は非整合的な動きをみせていたため、その影響度を縮小すべく、主観的なウエイトを下方修正した。なお、この時の消費者物価に起因する円高方向へのスケープゴート効果の定量的なインパクトは、前月差で 3 円程度となっている。

（図表 3）スケープゴート効果の内訳 （図表 4）ファンダメンタルズの推移



（資料）総務省「消費者物価指数」、内閣府「国民経済計算」、日本銀行「マネーストック」「国際収支統計」、Bloomberg



（注）マネーストックと CPI は前年比の米日差、2 年金利は米日差。

（資料）総務省「消費者物価指数」、内閣府「国民経済計算」、日本銀行「マネーストック」「国際収支統計」、Bloomberg

また、その翌月には、ドル/円レートが引き続き円高方向に大きく振れる中、マネーストックの米日差がドル/円レートと整合的に急拡大した（前掲図表 4）。この結果、各投資家は、変動幅の大きなマネーストック米日差を最大のスケー

プゴートにして、為替レートに対する影響度（主観的なウエイト）を修正する。その際、為替レートに対してマネーストック米日差は整合的な動きをみせていたため、その影響度を増幅すべく、主観的なウエイトを上方修正した。この時のマネーストックに起因する円高方向へのスケープゴート効果の定量的なインパクトは、前月差で2円程度となっている。

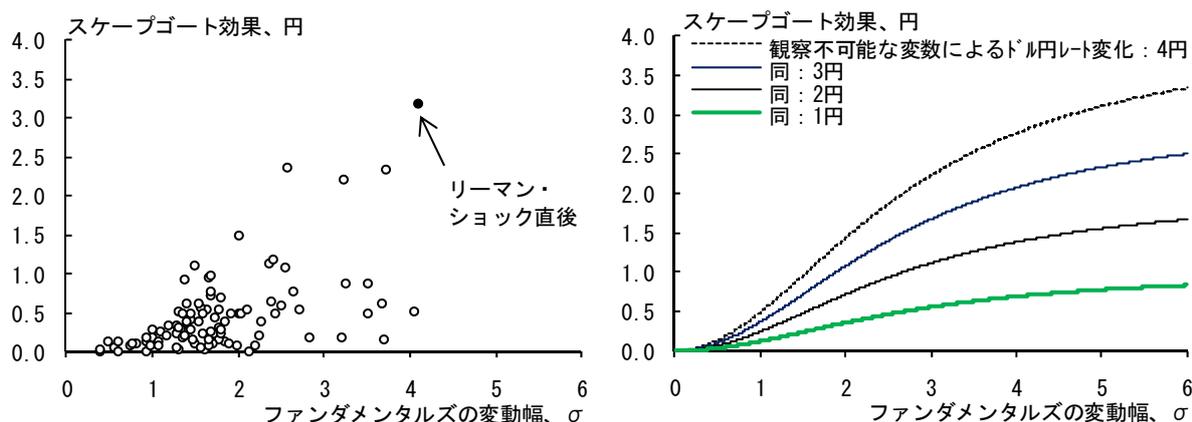
なお、足もとでは、わが国の累積経常収支によってスケープゴート効果が生じている様子を確認することができる。

（2）スケープゴート効果の大きさ

上でみたように、リーマン・ショック直後には、円高方向に2～3円程度のスケープゴート効果が発生していた。ところで、(18)式によれば、スケープゴート効果の大きさは、①観察不可能な変数の変化 Δb_t と、②ファンダメンタルズの変動幅 $\Delta f_{n,t}^2$ に依存している。したがって、リーマン・ショック直後には、観察不可能な変数が大幅に変化したか、ファンダメンタルズの変動幅が急拡大したか、あるいはその両方が同時に生じたものと考えられる。

そこで、ファンダメンタルズの変動幅とスケープゴート効果の大きさの組合せをプロットしてみると、リーマン・ショック直後は、ファンダメンタルズの変動幅が 4σ 強、観察不可能な変数の変化も前月差で4円以上と、いずれの要因も非常に大きかった様子がわかる。その結果、スケープゴート効果も約3.5円と非常に大きなものとなった（図表5）。

（図表5）ファンダメンタルズの変動幅とスケープゴート効果



（注）ファンダメンタルズの変動幅は、マネーストック、2年国債利回り、消費者物価の米日差、および日本の累積経常収支の4変数についての前月比（平均ゼロ、分散1に基準化）の二乗和の平方根。

（資料）総務省「消費者物価指数」、内閣府「国民経済計算」、日本銀行「マネーストック」「国際収支統計」、Bloomberg

因みに、ファンダメンタルズの変動幅とスケープゴート効果の関係をみると、

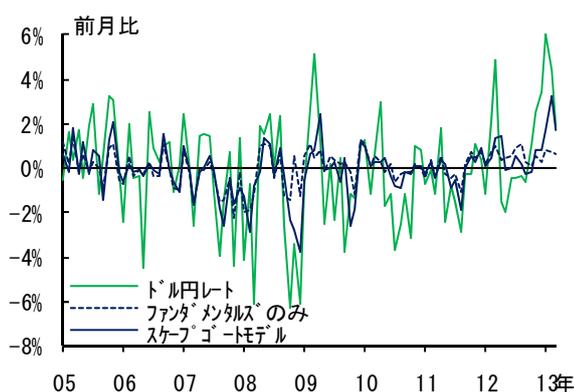
リーマン・ショック直後並みにファンダメンタルズが変動する局面（変動幅 4σ 強）では、観察不可能な変数によってドル/円レートが1円変化する場合には0.7円程度のスケープゴート効果が発生している。一方、平常時（同 1.5σ 程度）においては、同じ条件下でのスケープゴート効果は、概ね0.3円程度にとどまる様子も確認できる。

6. スケープゴート・モデルのパフォーマンス

前節では、スケープゴート・モデルを用いて、リーマン・ショック直後の円高に関する定量的解釈を提示した。本節では、こうした解釈の正当性を確認するために、スケープゴート・モデルのパフォーマンスをチェックする。

そこで、(18)式に基づいて、ファンダメンタルズのみモデル $\bar{\beta}_n \cdot \Delta f_{n,t}$ と、それにスケープゴート効果を付加したスケープゴート・モデル $(\bar{\beta}_n + \Delta\mu_{n,t}) \cdot \Delta f_{n,t}$ を比較する。まず、標本内（イン・サンプル）予測を比較したものが図表6である。振れが大きくて見にくいだが、リーマン・ショック直後や足もとなど、大きく振れている箇所を中心に、スケープゴート・モデルの方が、よりドル/円レートの実績値に近い推計値となっている。

（図表6）推計値の比較



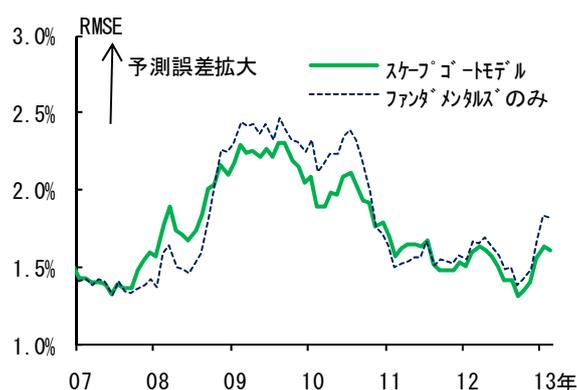
（資料）総務省「消費者物価指数」、内閣府「国民経済計算」、日本銀行「マネーストック」「国際収支統計」、Bloomberg

次に、標本外（アウト・オブ・サンプル）予測を比較しても、同様の結論を得ることができる。すなわち、スケープゴート・モデルは、リーマン・ショック直後や足もとのように為替レートが大きく変動する局面における予測誤差（RMSE）の拡大が、ファンダメンタルズのみモデルに比べて抑制されている

様子がわかる（図表 7）。このように、スケープゴート・モデルのパフォーマンスは、ファンダメンタルズのみモデルと比べ、総じて改善していると言えよう⁹。

もっとも、図表 7 を仔細にみると、例えば、2007 年の後半など、スケープゴート・モデルの予測力がファンダメンタルズのみモデルに比べ、幾分悪化している箇所も見出される。これは、スケープゴート・モデルが、ファンダメンタルズのみモデルにオーバーシュート特性を付加したものであるため、為替レートが短期間で一方向に大きく動くリーマン・ショックのような局面では高い予測力を発揮する一方、為替レートが小刻みに反発を繰り返す 2007 年後半のような局面では、オーバーシュート特性が却ってパフォーマンスを悪化させる方向に作用する側面を有していることを示している。

（図表 7）スケープゴート・モデルの予測誤差



（注）図の予測誤差は、1992 年から 2004 年までの期間で推計した後、例えば 2007 年 1 月には、2005 年 2 月から 2007 年 1 月までの 2 年間の予測誤差の平均値を表示したもの。
 （資料）総務省「消費者物価指数」、内閣府「国民経済計算」、日本銀行「マネーストック」「国際収支統計」、Bloomberg

7. おわりに

リーマン・ショック直後のドル/円レートの短期的かつ大規模な変動については、金利差やインフレ格差といったファンダメンタルズの変動だけでは説明し切れないことから、これまでは、「円キャリートレードの巻き戻し」や「グロー

⁹ 平均二乗誤差（RMSE）によって予測力を比較する手法は、Meese and Rogoff (1983) における予測力検証の過程で用いられているものと基本的に同じである。

バル投資家の安全通貨選好」といったキーワードを交えつつ、定性的な説明がなされてきた。

本稿では、スケープゴート・モデルを用いて、こうした短期的かつ大規模な為替レート変動に対する定量的な解釈を試みた。分析の結果、リーマン・ショック直後の短期的かつ大規模な円高は、投資家が消費者物価に対する主観的なウエイト（評価）を引き下げ、マネーストックに対する主観的なウエイト（評価）を引き上げたことによって、それらの変数のドル/円レートに対する影響度が修正されたことによるものであることが示唆された。

また、スケープゴート・モデルは、為替レートが短期間で一方向に大きく動く局面での予測力が高い一方、為替レートが小刻みに反発を繰り返す局面では、ファンダメンタルズのみモデルと比べて予測力が低下するという面も有している。こうした予測力の低下に関しては、投資家の主観的なウエイト更新メカニズムを過去 1 期間のシグナルに基づくものと仮定（学習効果は 1 期のみと仮定）していることが何がしか影響している可能性も考えられる。予測力改善の見地から、より粘着的なシグナル効果（投資家のウエイト修正への学習効果がより持続的となるメカニズム）を考慮する等によってモデルを拡張・改良していくことについては、今後の研究課題としたい。

以 上

参考文献

- Bacchetta, Philippe, and Eric van Wincoop, "A Scapegoat Model of Exchange Rate Determination," *American Economic Review*, Papers and Proceedings 94, pp. 114-118, 2004
- , "Can Information Heterogeneity Explain the Exchange Rate Determination Puzzle?" *American Economic Review* 96, pp. 552-576, 2006
- , "On the Unstable Relationship between Exchange Rates and Macroeconomic Fundamentals," NBER Working Paper No. 15008, 2009
- , "Modeling Exchange rates with Incomplete Information," Paper written for *the Handbook of Exchange Rates*, 2011
- Cheung, Yin-Wong, Menzie D. Chinn and Antonio Garcia Pascual, "Empirical Exchange Rate Models of the Nineties: Are Any Fit to Survive?" *Journal of International Money and Finance* 24, pp.1150-1175, 2005
- Engel, Charles, and Kenneth D. West, "Exchange Rates and Fundamentals," NBER Working Paper No. 10723, 2004
- Evans, Martin D. D. and Richard K. Lyons, "Order Flow and Exchange Rate Dynamics," *Journal of Political Economy*, vol. 110, no. 1, 2002
- Fratzscher, Marcel, Lucio Sarno and Gabriele Zinna, "The Scapegoat Theory of Exchange Rates: The First Tests," ECB Working Paper Series No. 1418, 2012
- Meese, Richard A. and Kenneth Rogoff, "Empirical Exchange Rate Models of the Seventies: Do They Fit Out of Sample?" *Journal of International Economics* 14, pp. 345-373, 1983
- , "What Is Real? The Exchange Rate-Interest Differential Relation over the Modern Floating-Rate Period," *Journal of Finance*, Vol. XLIII, No. 4 (September), pp. 933-948, 1988
- 岩壺健太郎「為替予測の最先端研究」、2011年度日本金融学会秋季大会（国際金融パネル）報告ペーパー、2011

補論 1 : 為替レート決定式の導出

ここでは、(1)式、(6)式、(7)式を基に為替レート決定式を導出する。まず、(1)式、(6)式、(7)式から価格 p と債券利回り i を消去した式を導出し、以下のように整理する。

$$\ln S_t = (1 - \lambda)(F_t + b_t) + \lambda \bar{E}_t[\ln S_{t+1}]$$

$$F_t = (m_t - m_t^*), \quad \lambda = \frac{\alpha}{1 + \alpha}, \quad b_t = -\alpha\gamma \cdot \tilde{b}_t \cdot \sigma_b^2$$

上式は逐次計算を行うことによって、以下のように展開できる。

$$\ln S_t = (1 - \lambda)(F_t + b_t) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \bar{E}_t^k[(1 - \lambda)F_{t+k}] + \lambda^\infty \bar{E}_t^\infty[\ln S_{t+\infty}]$$

ただし、

$$\bar{E}_t^k[F_{t+k}] = \bar{E}_t \left[\bar{E}_{t+1} \left[\dots \bar{E}_{t+(k-2)} \left[\bar{E}_{t+(k-1)}[F_{t+k}] \right] \right] \right]$$

$$\bar{E}_t^1[F_{t+1}] = \bar{E}_t[F_{t+1}]$$

である。また、 $|\lambda| < 1$ であるため、右辺第三項はゼロになる。ここで、為替レートの動きは時間推移に関してランダムであり、将来の期待値が現在の期待値と同じであるというマルチンゲール性

$$\bar{E}_t[F_{t+2} | \bar{E}_t[F_{t+1}]] = \bar{E}_t[F_{t+1}]$$

を適用することによって¹⁰、

$$\bar{E}_t^k[F_{t+k}] = \bar{E}_t[F_{t+1}]$$

となるため、為替レート決定式は

$$\ln S_t = (1 - \lambda)(F_t + b_t) + \lambda \bar{E}_t[F_{t+1}]$$

となる。

¹⁰ なお、期待値に対するマルチンゲール性の仮定は、高次の期待 (higher-order expectation) を考慮しないことを意味している。

補論 2 : カルマン・フィルターによるスケープゴート効果の描写

ここでは、カルマン・フィルターを用いてスケープゴート効果を描写する。為替レートの実績値からシグナル Δd_t という情報を得た投資家は、主観的なウエイトを、その情報の下で、最も確率の高いウエイト（条件付き確率 $P(\{\beta_{n,t} | \forall n\} | \Delta d_t)$ を最大にするウエイトの組み合わせ）へと修正していく。なお、本文中でも示している通り、確率変数である主観的なウエイト $\beta_{n,t}$ は、投資家 j からみると、以下のような時間に関して独立かつ同一の確率変数であると仮定している。

$$\beta_{n,t} \sim N(\beta_n^j, \tau_n) \quad (\forall t, j)$$

条件付き確率 $P(\{\beta_{n,t} | \forall n\} | \Delta d_t)$ を計算するにあたり、解析的に直接計算することは難しいため、ベイズの定理を用いて以下のように展開する。

$$\begin{aligned} P(\{\beta_{n,t} | \forall n\} | \Delta d_t) &= \frac{P(\{\beta_{n,t} | \forall n\} \cap \Delta d_t)}{P(\Delta d_t)} = \frac{P(\Delta d_t | \{\beta_{n,t} | \forall n\}) \cdot P(\{\beta_{n,t} | \forall n\})}{P(\Delta d_t)} \\ &\propto P(\Delta d_t | \{\beta_{n,t} | \forall n\}) P(\{\beta_{n,t} | \forall n\}) \end{aligned}$$

各ファンダメンタルズにかかるウエイトの事前分布は独立とする。ただし、シグナルから条件が付くことで、ウエイトの分布は相互に依存するため、事後分布（条件付き確率分布）は互いに独立ではなくなる点に注意しよう。

$$P(\{\beta_{n,t} | \forall n\}) = \prod_n^N P(\beta_{n,t})$$

確率変数は、それぞれ正規分布に従っているため、 $P(\Delta d_t | \{\beta_{n,t} | \forall n\})$ の平均と分散は以下の通りとなる。

$$P(\Delta d_t | \{\beta_{n,t} | \forall n\}) : \begin{cases} E(\Delta d_t | \{\beta_{n,t} | \forall n\}) := \sum_n^N \beta_{n,t} \cdot \Delta f_{n,t} \\ V(\Delta d_t | \{\beta_{n,t} | \forall n\}) := \sigma_d \end{cases}$$

したがって、条件付き確率 $P(\{\beta_n | \forall n\} | \Delta d_t)$ は以下のように計算される。

$$P(\{\beta_{n,t} | v_n\} | \Delta d_t)$$

$$\propto \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_n \sum_t \frac{(\beta_{n,t} - \beta_n^j)^2}{\tau_n}\right) \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_t \frac{(\Delta d_t - \sum_n \beta_{n,t} \Delta f_{n,t})^2}{\sigma_d}\right)$$

投資家はこの尤度を最大にするように行動することから、修正されたウェイト $\mu_{n,t}$ は、1階の必要条件として、以下の条件を満たす。

$$-\frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial \beta_{n,t}} = 0$$

この条件式の左辺は、次のように展開できる。

$$-\frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial \beta_{n,t}} = \frac{\beta_{n,t} - \beta_n^j}{\tau_n} - \Delta f_{n,t} \cdot A_t, \quad A_t = \frac{\Delta d_t - \sum_n \beta_{n,t} \Delta f_{n,t}}{\sigma_d}$$

よって、上の条件式の解 $\mu_{n,t}^j$ は、

$$\mu_{n,t}^j = \beta_n^j + \Delta f_{n,t} \cdot \tau_n \cdot A_t^j, \quad A_t^j = \frac{\Delta d_t - \sum_n \mu_{n,t}^j \Delta f_{n,t}}{\sigma_d}$$

となる。さらに、 $\mu_{n,t}^j$ を A_t^j の定義式に代入してウェイトを用いずに表現すると、 A_t^j は次のようになる。

$$A_t^j = \frac{\Delta d_t - \sum_n \beta_n^j \Delta f_{n,t}}{\sigma_d + \sum_n \Delta f_{n,t}^2 \cdot \tau_n}$$

これを $\mu_{n,t}^j$ に再度代入することによって、本文中の(16)式を得る。

以上

補論3：モデルの説明力を最大化する σ_d と τ_n の比率

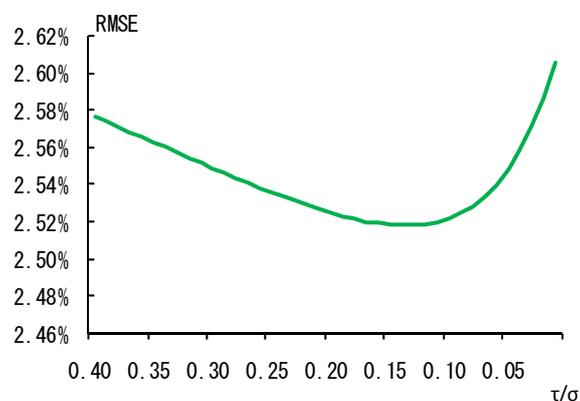
ここでは、スケープゴート・モデルの説明力を最大化する分散 σ_d と分散 τ_n の比率を決定する手順を説明する。まず、為替レートの実績値 $\Delta \ln S_t$ と各投資家の主観的なウェイトに基づいた為替レートの標本外予測値 $\Delta \ln S_t^j$ は、それぞれ次のように書くことができる。

$$\Delta \ln S_t = \sum_n^N \bar{\beta}_n \Delta f_{n,t} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_d), \quad \Delta \ln S_t^j = \sum_n^N \beta_{n,t-1}^j \Delta f_{n,t}$$

これは、為替レートの実績値と各投資家の主観的なウェイトに基づいた為替レートの標本外予測値の乖離が、①各投資家の主観的なウェイトがその平均値から乖離すること、②観察不可能な変数の分散がゼロでないこと、の2点に起因することを示している。ここで、各 n について $\tau_n = \tau$ と仮定する。また、各投資家の主観的なウェイトは互いに独立であると仮定すると、RMSEは、

$$\text{RMSE} = \sqrt{\sum_{j,t} (\Delta \ln S_t - \Delta \ln S_t^j)^2} = \sqrt{N\tau + \sigma_d}$$

となる（ファンダメンタルズの時系列方向の分散は1に基準化している）。この式から、スケープゴート・モデルの説明力がシグナルの分散 σ_d と各投資家の主観的なウェイトの分散 τ に依存していることがわかる。 τ/σ_d を横軸に取り、 τ/σ_d の変化に伴うRMSEの推移をプロットすると、下図に示すような下に凸の曲線となる。



この図より、 $\tau/\sigma_d = 0.14$ 付近で **RMSE** が最小値をとることがわかる。このため、本稿ではスケープゴート・モデルの予測誤差を最小化する（つまり、スケープゴート・モデルの説明力を最大化する） σ_d と τ の比率として、**0.14**を用いることとする。

以 上