

2007年3月6日
金融高度化セミナー

個社別ULの解析的近似法と 与信ポートフォリオ・マネジメン トへの応用

日本銀行 金融機構局
金融高度化センター
肥後秀明

hideaki.higo@boj.or.jp
03-3277-1130

<http://www.boj.or.jp/theme/finsys/center/index.htm>



問題意識

(一昨年9月の地銀・地銀 セミナーで寄せられた質問)

- 与信ポートフォリオのリスク量(UL)を算出しているが、ポートフォリオ全体のULは取引先個社別にどのように配賦(分解)すればいいのか？
- 個社別のUL配賦ができたとして、それをプライシングや与信限度額にどう活用すればいいのか？



本日のプレゼンテーション

- ポートフォリオULをマートン型1-factorモデルで計測している場合の個社ULへの分解方法 (解析的近似法)
- 仮想サンプル・ポートフォリオを使った個社ULの計算とポートフォリオ運営への活用例
- 留意点と課題

前提となるリスク計測モデル

マートン型の1-factorモデル(デフォルトモード)

債務者 i の企業
価値の変化(率)

$$Y_i = \sqrt{R_i} X + \sqrt{1-R_i} \varepsilon_i$$

共通
ファクター

固有
ファクター

X と ε_i は互
いに独立な標準
正規確率変数

相関(X に対する感応度)
通常、業種別あるいは格付・業種別に設定

デフォルト
確率

デフォルト時
エクスポージャー

デフォルト時
損失率

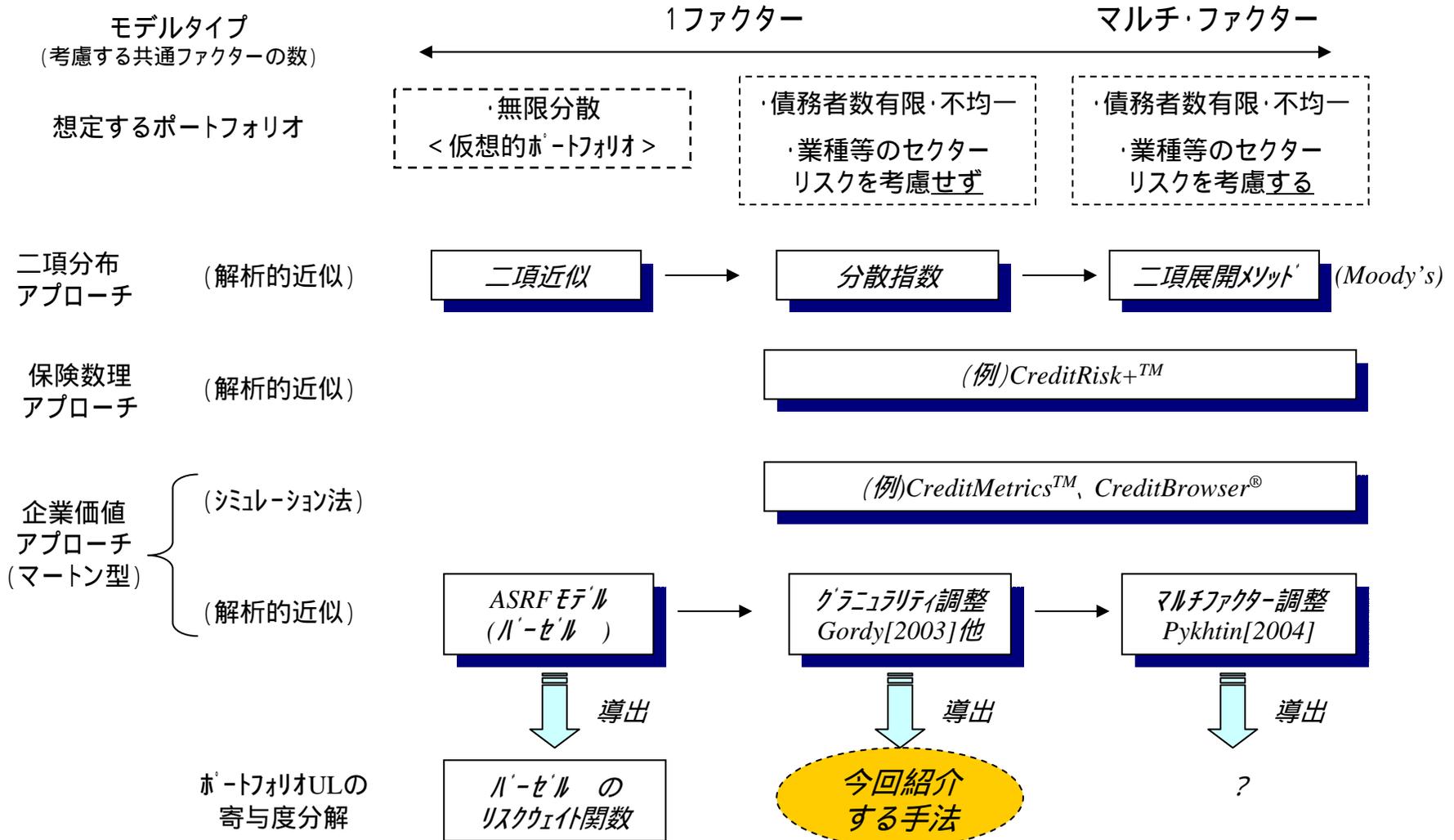
$Y_i < N^{-1}(PD_i)$ の時、 $EAD_i \times LGD_i$ の損失が発生

$Y_i \geq N^{-1}(PD_i)$ の時、損失は発生しない

N^{-1} は標準正規分布
の分布関数の逆関数

今回紹介する解析的近似法は、このモデルにのみ適用可能(次頁参照)

信用リスク計測モデルの鳥瞰図



CreditRisk+™はCredit Suisse Groupの、CreditMetrics™はRiskMetrics Groupの、CreditBrowser®はニューメリカルテクノロジーズ(株)の登録商標です

UL分解の概念定義・算出法

債務者 i の限界UL
(UL感応度)

$$ML_{\alpha}(i) \equiv \frac{\partial}{\partial EAD_i} UL_{\alpha}$$

信頼水準 α におけるポートフォリオUL

債務者 i のEADによる偏微分

(債務者 i のEADが微小変化したときに、ポートフォリオULがどれだけ変化するか)

 次ページの図

債務者 i の個社UL
(UL寄与度)

$$UL_{\alpha}(i) \equiv EAD_i \times ML_{\alpha}(i)$$

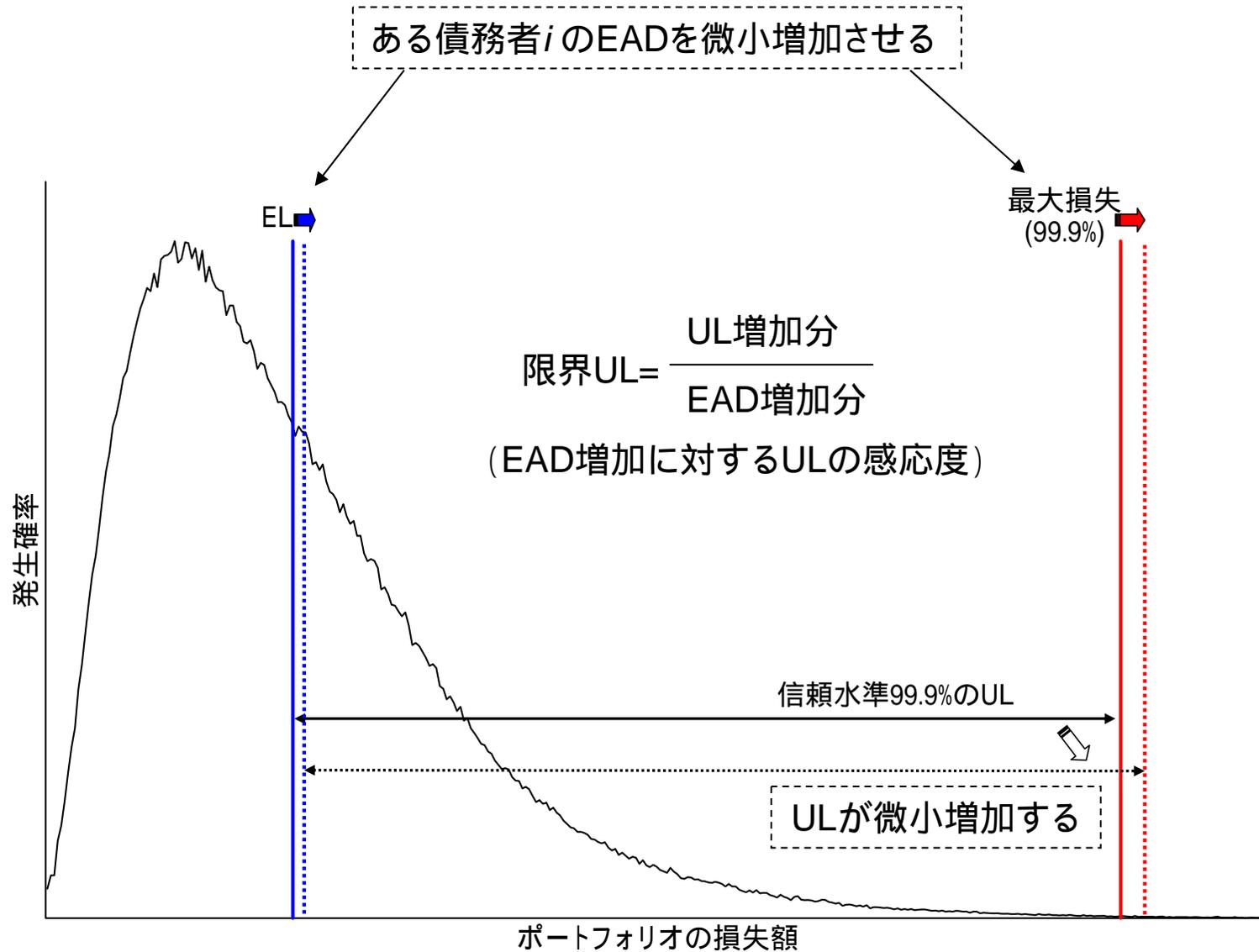
特徴
(利便性)

$$\sum_i UL_{\alpha}(i) = UL_{\alpha}$$

(この方法による個社ULの合計値はポートフォリオ全体のULに一致する)

**ポートフォリオULを、個社別に(綺麗に)分解したい場合には便利
(綺麗に分解するための定義式)**

限界ULの概念図



なぜ 個社UL = ポートフォリオULか (直感的理解)

| | | | |
|---|-------------|-------------|-----|
| 各債務者の与信額 | EAD_1 | EAD_2 | ... |
| ポートフォリオが信頼水準 (UL) を被った時に各債務者がデフォルトしている確率 (条件付デフォルト確率) | $PD_{1 UL}$ | $PD_{2 UL}$ | ... |
| デフォルト時損失率 | LGD_1 | LGD_2 | ... |

$$\text{ポートフォリオUL (UL)} = EAD_1 \times PD_{1|UL} \times LGD_1 + EAD_2 \times PD_{2|UL} \times LGD_2 + \dots$$

$$\underbrace{EAD_1 \times PD_{1|UL} \times LGD_1}_{\text{債務者1の限界UL}} \leftarrow \frac{UL}{EAD_1} = PD_{1|UL} \times LGD_1$$

債務者1の個社UL

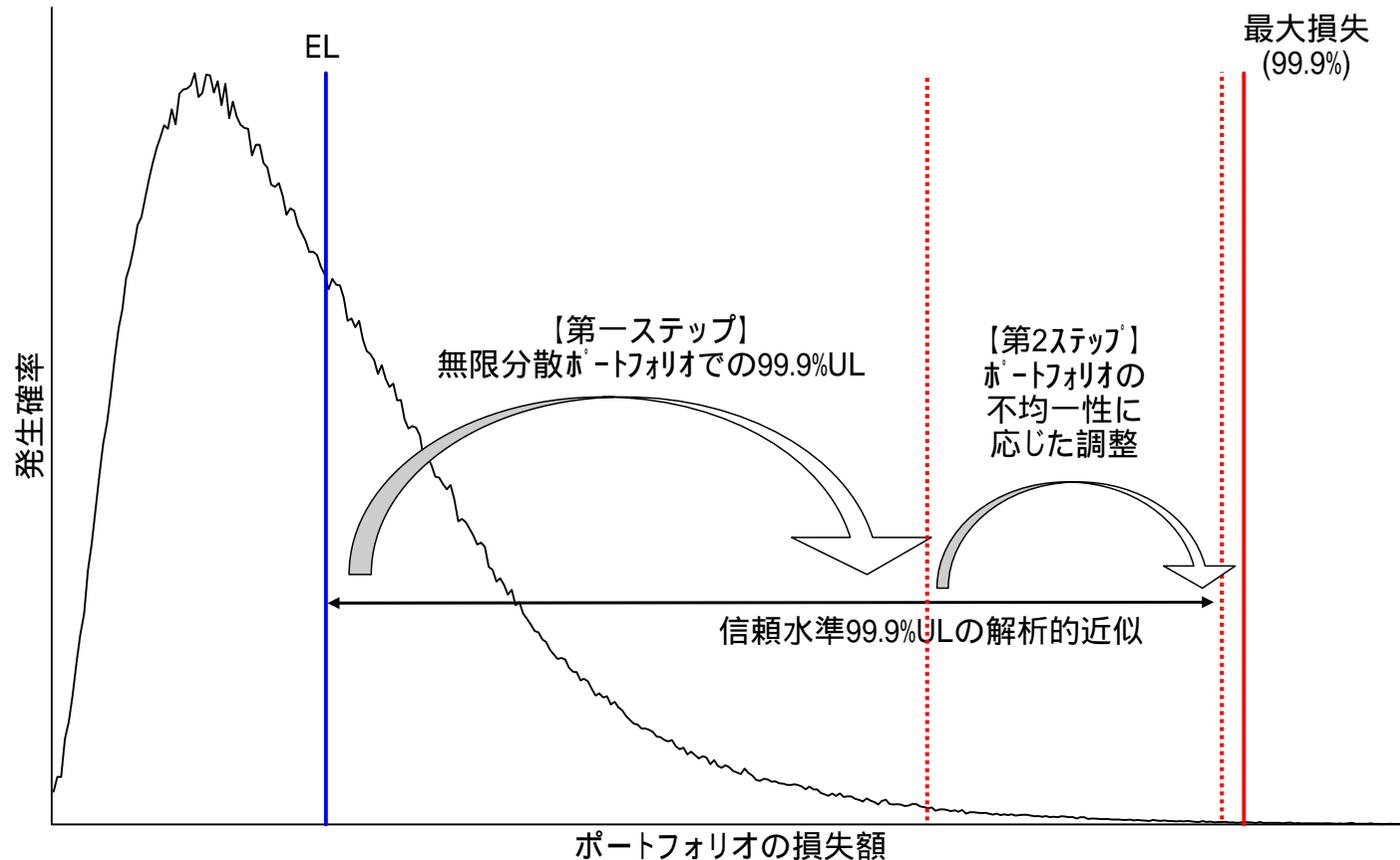
条件付期待損失率 (ストレス状況でのEL)

債務者1の個社UL + 債務者2の個社UL + ... = ポートフォリオUL (に戻る)
「ポートフォリオEL = 個社EL」のアナロジー

限界ULをどのように算出するか

- 一般的に、マートン型モデルでのポートフォリオULはモンテカルロ・シミュレーションによって算出されている
- モンテカルロ・シミュレーションは限界UL(微分)を計算するのには不向き
 - 「微小変化」と「シミュレーション誤差」との区別が難しい
 - 不可能ではないが 計算時間は長くかかる
- 解析的なポートフォリオULの算出方法があれば、モンテカルロ・シミュレーションに拠らずに限界ULを算出できる…
- ポートフォリオULの解析的近似法
 - Gordy[2003]、Martin and Wilde[2002]、Canabarro, Picoult and Wilde[2003]、安藤[2005]
 - 近似精度については安藤[2005]が整理(債務者数が少ない、あるいは極端に集中したポートフォリオでない限り、近似誤差は数%以内)

ポートフォリオULの解析的近似法



詳しくは参考文献(巻末)をご参照下さい

限界ULの解析的近似式の意味

- 安藤[2005]のポートフォリオULの解析的近似式をEADで微分して限界ULの「解析的近似解」を算出

解析的近似式 = …別添資料p5の(4式)

$$= \underbrace{\text{無限分散ポートフォリオでの限界UL}}_{\text{バーセルのリスクウェイト関数}} \pm \text{ポートフォリオの不均一性に応じた調整}$$

バーセルのリスクウェイト関数

(注)ただし相関はバーセルのR関数ではなくp4のRを使用する

(利点)

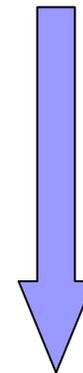
Excel等で簡易に実装可能

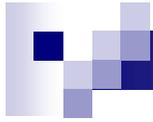
(留意点)

同じ債務者でも、ポートフォリオの規模や不均一性が異なれば限界ULは違う

(例)同一債務者、同一与信額でも自行ポートでの限界UL 他行ポートでの限界UL

(例)自行ポートフォリオの時系列的な変化 前期の限界UL 今期の限界UL





・仮想サンプル・ポートフォリオ分析事例

サンプル・ポートフォリオ設定

(1) 与信額・債務者数

| | | |
|------|--------|----|
| 総与信額 | 10,000 | 億円 |
| 債務者数 | 500 | 社 |

(2) 自己資本

| | | |
|-----------|------|----|
| Tier1自己資本 | 600 | 億円 |
| Tier1比率 | 6.0% | 億円 |

(3) 格付別PD

| 格付 | PD |
|----|-------|
| 1 | 0.2% |
| 2 | 0.5% |
| 3 | 1.0% |
| 4 | 2.0% |
| 5 | 3.0% |
| 6 | 5.0% |
| 7 | 10.0% |

(4) 業種別R

| 業種 | R |
|----|------|
| | 0.01 |
| | 0.04 |
| | 0.07 |
| | 0.10 |
| | 0.13 |
| | 0.15 |
| | 0.20 |
| | 0.25 |
| | 0.27 |
| | 0.30 |

(5) LGD

| | |
|-----|--------|
| 50% | (全先一律) |
|-----|--------|

(6) 格付別・業種別の分布

(先数)

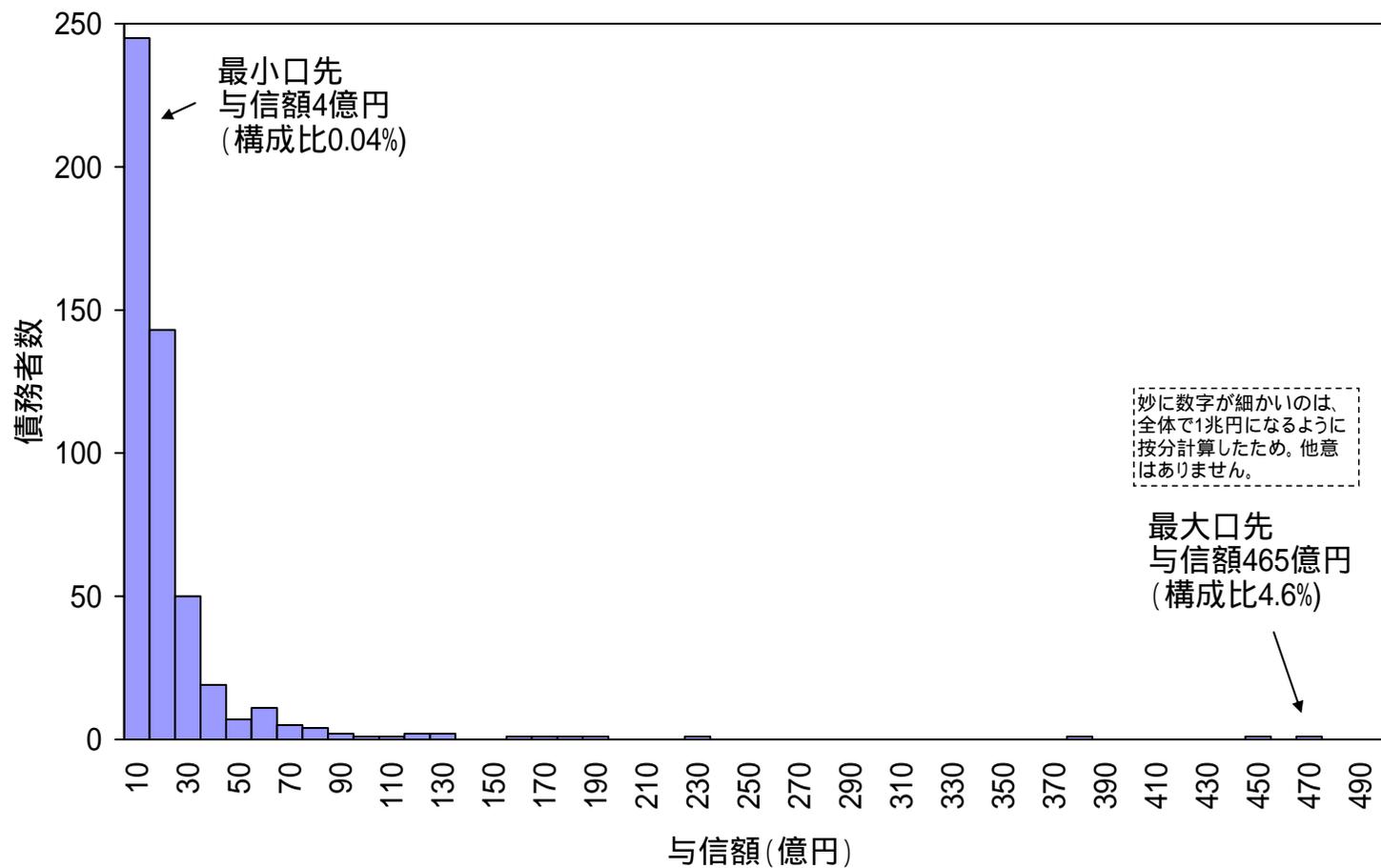
| 格付 | 業種 | | | | | | | | | | | 小計 | 構成比 |
|-----|-----|-----|-----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|------|------|-----|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | | |
| 1 | 13 | 9 | 9 | 7 | 7 | 9 | 11 | 7 | 8 | 14 | 94 | 19% | |
| 2 | 12 | 10 | 15 | 11 | 9 | 6 | 16 | 11 | 14 | 12 | 116 | 23% | |
| 3 | 11 | 16 | 5 | 7 | 8 | 16 | 9 | 21 | 8 | 13 | 114 | 23% | |
| 4 | 6 | 4 | 5 | 7 | 5 | 4 | 4 | 5 | 7 | 3 | 50 | 10% | |
| 5 | 6 | 4 | 3 | 4 | 3 | 3 | 2 | 5 | 4 | 4 | 38 | 8% | |
| 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 2 | 1 | 5 | 5 | 6 | 6 | 49 | 10% | |
| 7 | 3 | 5 | 5 | 2 | 3 | 5 | 4 | 5 | 3 | 4 | 39 | 8% | |
| 小計 | 57 | 54 | 48 | 44 | 37 | 44 | 51 | 59 | 50 | 56 | 500 | 100% | |
| 構成比 | 11% | 11% | 10% | 9% | 7% | 9% | 10% | 12% | 10% | 11% | 100% | --- | |

(与信額)

| 格付 | 業種 | | | | | | | | | | | 小計 | 構成比 |
|-----|-------|-----|-------|-----|-----|-------|-----|-------|-----|-----|--------|------|-----|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | | |
| 1 | 139 | 117 | 193 | 135 | 66 | 200 | 287 | 549 | 112 | 220 | 2,017 | 20% | |
| 2 | 122 | 109 | 781 | 102 | 103 | 118 | 304 | 310 | 245 | 119 | 2,313 | 23% | |
| 3 | 412 | 140 | 106 | 76 | 513 | 452 | 97 | 273 | 54 | 195 | 2,320 | 23% | |
| 4 | 157 | 66 | 94 | 109 | 37 | 70 | 43 | 43 | 151 | 17 | 787 | 8% | |
| 5 | 94 | 53 | 176 | 34 | 33 | 28 | 23 | 157 | 49 | 41 | 688 | 7% | |
| 6 | 136 | 98 | 267 | 255 | 11 | 6 | 92 | 155 | 85 | 107 | 1,213 | 12% | |
| 7 | 19 | 96 | 68 | 18 | 155 | 161 | 24 | 59 | 23 | 39 | 662 | 7% | |
| 小計 | 1,078 | 680 | 1,685 | 729 | 919 | 1,036 | 871 | 1,546 | 719 | 737 | 10,000 | 100% | |
| 構成比 | 11% | 7% | 17% | 7% | 9% | 10% | 9% | 15% | 7% | 7% | 100% | --- | |

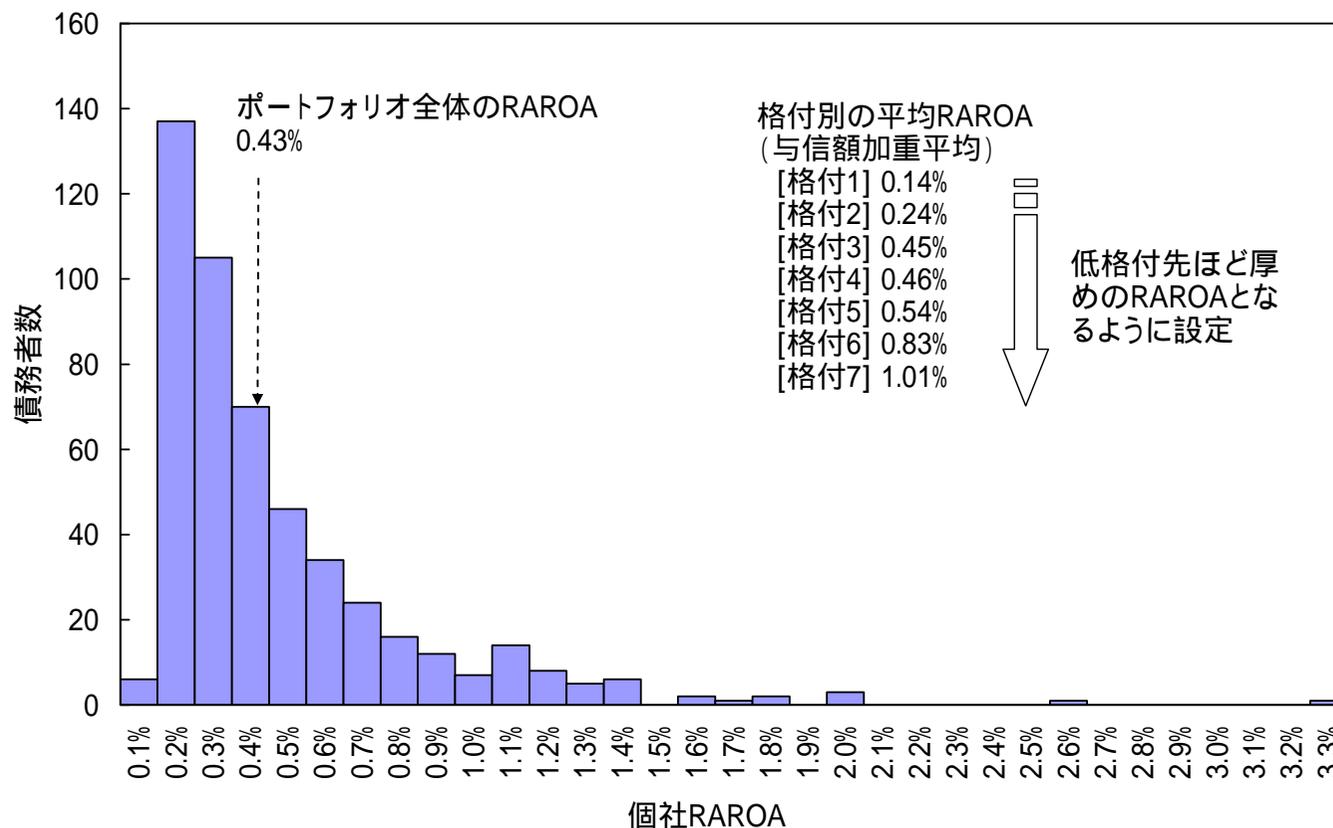
サンプル・ポートフォリオ設定

与信額の分布



サンプル・ポートフォリオ設定

個社RAROA(= 貸出金利 - 資金調達レート - EL率 - 経費率)の分布



(注1) 簡便のため貸出金利、経費率等は設定せず(直接に個社RAROAを設定)

(注2) 簡便のため個社RAROAがマイナスとなる先はなし

サンプル・ポートフォリオの課題

(1) ポートフォリオ全体のリスク評価

| | | | |
|---------|---|----------|----|
| 総与信額 | A | 10,000.0 | 億円 |
| 99.9%UL | B | 678.3 | 億円 |

(ULは10万回のモンテカルロ・シミュレーションで算出)



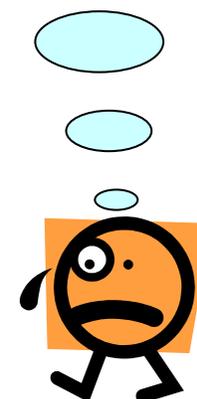
| | | | |
|-----------|---|-------|----|
| Tier1自己資本 | C | 600.0 | 億円 |
|-----------|---|-------|----|

(2) ポートフォリオ全体の収益性評価

| | | | |
|---------|----------------|-------|----|
| RAROA | D | 0.43% | |
| 超過収益(額) | $E=A \times D$ | 43.0 | 億円 |
| RAROC | E/B | 6.34% | |
| ROE | E/C | 7.16% | |



| | |
|-------|-----|
| 目標ROE | 10% |
|-------|-----|



リスク量削減のためのアプローチ(その1) 与信額基準の大口先抽出

大口与信先を選定するのはいいが...

| 順位 | 企業名 | 与信額 (億円) | 純与信額(億円) (未保全額) | | 格付 | | 超過収益 (億円) |
|----|-------|-------------|--------------------|--------|----|-------|--------------|
| | | | | Tier1比 | | PD | |
| 1 | #0001 | 465 | 232 | 38.7% | 1 | 0.2% | 0.50 |
| 2 | #0002 | 447 | 223 | 37.2% | 2 | 0.5% | 1.37 |
| 3 | #0003 | 374 | 187 | 31.2% | 3 | 1.0% | 1.23 |
| 4 | #0004 | 223 | 112 | 18.6% | 3 | 1.0% | 1.13 |
| 5 | #0005 | 188 | 94 | 15.7% | 3 | 1.0% | 1.72 |
| 6 | #0006 | 175 | 87 | 14.6% | 6 | 5.0% | 1.82 |
| 7 | #0007 | 164 | 82 | 13.7% | 5 | 3.0% | 0.77 |
| 8 | #0008 | 159 | 79 | 13.2% | 6 | 5.0% | 1.33 |
| 9 | #0009 | 129 | 65 | 10.8% | 7 | 10.0% | 1.21 |
| 10 | #0010 | 123 | 61 | 10.2% | 2 | 0.5% | 0.29 |
| 11 | #0011 | 119 | 60 | 10.0% | 6 | 5.0% | 1.02 |
| 12 | #0012 | 110 | 55 | 9.2% | 2 | 0.5% | 0.20 |
| 13 | #0013 | 109 | 55 | 9.1% | 2 | 0.5% | 0.23 |
| 14 | #0014 | 92 | 46 | 7.7% | 1 | 0.2% | 0.12 |
| 15 | #0015 | 90 | 45 | 7.5% | 4 | 2.0% | 0.32 |
| 16 | #0016 | 81 | 40 | 6.7% | 2 | 0.5% | 0.16 |
| 17 | #0017 | 79 | 39 | 6.6% | 3 | 1.0% | 0.32 |
| 18 | #0018 | 78 | 39 | 6.5% | 7 | 10.0% | 0.65 |
| 19 | #0019 | 75 | 38 | 6.3% | 3 | 1.0% | 0.25 |
| 20 | #0020 | 75 | 37 | 6.2% | 6 | 5.0% | 0.33 |

PDが低く、超過
収益のある先の
与信を削減する
必要あるの？



...リスク(UL)
基準で評価でき
ないか？

解析的近似法によるポートフォリオUL・個社UL算出

解析的近似法ワークシート(Excel)

1. 与信ポートフォリオデータ

| 債務者数 | 500 | | | | |
|------|-------|-------|------------|-------|-------|
| 記号 | p_i | x_i | θ_i | R_i | r_i |
| 企業名 | PD | EAD | LGD | 相関 | RAROA |
| #001 | 0.2% | 465 | 50% | 0.25 | 0.1% |
| #002 | 0.5% | 447 | 50% | 0.07 | 0.3% |
| #003 | 1.0% | 374 | 50% | 0.13 | 0.3% |
| #004 | 1.0% | 223 | 50% | 0.01 | 0.5% |
| #005 | 1.0% | 188 | 50% | 0.15 | 0.9% |
| #006 | 5.0% | 175 | 50% | 0.07 | 1.0% |
| #007 | 3.0% | 164 | 50% | 0.07 | 0.5% |
| #008 | 5.0% | 159 | 50% | 0.10 | 0.8% |
| #009 | 10.0% | 129 | 50% | 0.13 | 0.9% |
| #010 | 0.5% | 123 | 50% | 0.20 | 0.2% |
| #011 | 5.0% | 119 | 50% | 0.25 | 0.9% |
| #012 | 0.5% | 110 | 50% | 0.25 | 0.2% |
| #013 | 0.5% | 109 | 50% | 0.07 | 0.2% |
| #014 | 0.2% | 92 | 50% | 0.20 | 0.1% |
| #015 | 2.0% | 90 | 50% | 0.27 | 0.4% |
| #016 | 0.5% | 81 | 50% | 0.25 | 0.2% |
| #017 | 1.0% | 79 | 50% | 0.25 | 0.4% |
| #018 | 10.0% | 78 | 50% | 0.15 | 0.8% |
| #019 | 1.0% | 75 | 50% | 0.07 | 0.3% |
| #020 | 5.0% | 75 | 50% | 0.01 | 0.4% |
| #021 | 1.0% | 69 | 50% | 0.15 | 0.4% |
| #022 | 5.0% | 68 | 50% | 0.30 | 0.7% |
| #023 | 1.0% | 68 | 50% | 0.30 | 0.7% |
| #024 | 3.0% | 63 | 50% | 0.25 | 0.7% |
| #025 | 10.0% | 61 | 50% | 0.04 | 1.0% |
| #026 | 0.2% | 60 | 50% | 0.10 | 0.1% |

2. 解析的近似法によるポートフォリオUL

| 意味 | 記号 | 値 |
|--------------------------|----------------------|---------|
| 信頼水準 | α | 99.90% |
| ①ポートフォリオULの算出 | | |
| Xの $1-\alpha$ 分位点 | $x_{1-\alpha}$ | -3.090 |
| ポートフォリオの期待損失額 | EL | 101.0 |
| $X=x_{1-\alpha}$ での期待損失額 | l | 704 |
| lのxによる偏微分(1階) | l'_x | -417 |
| lのxによる偏微分(2階) | l''_x | 164 |
| lの分散 | v | 20,518 |
| vのxによる偏微分(1階) | v'_x | -10,887 |
| グラニュラリティ調整項 | $\Delta g_\alpha(L)$ | 72.5 |
| ポートフォリオULの解析的近似 | UL_α | 675.1 |

②限界UL、個社ULの算出

注意事項
 (1) 入力可能なセルは、□で囲んだセルです。
 (2) それ以外のセルは、数式等を保護するためロックされています。ワークシートを変更する場合は、セルのロックを解除してください(パスワードは1234)。
 (3) PD=0%、100%の先は取り除くこと。

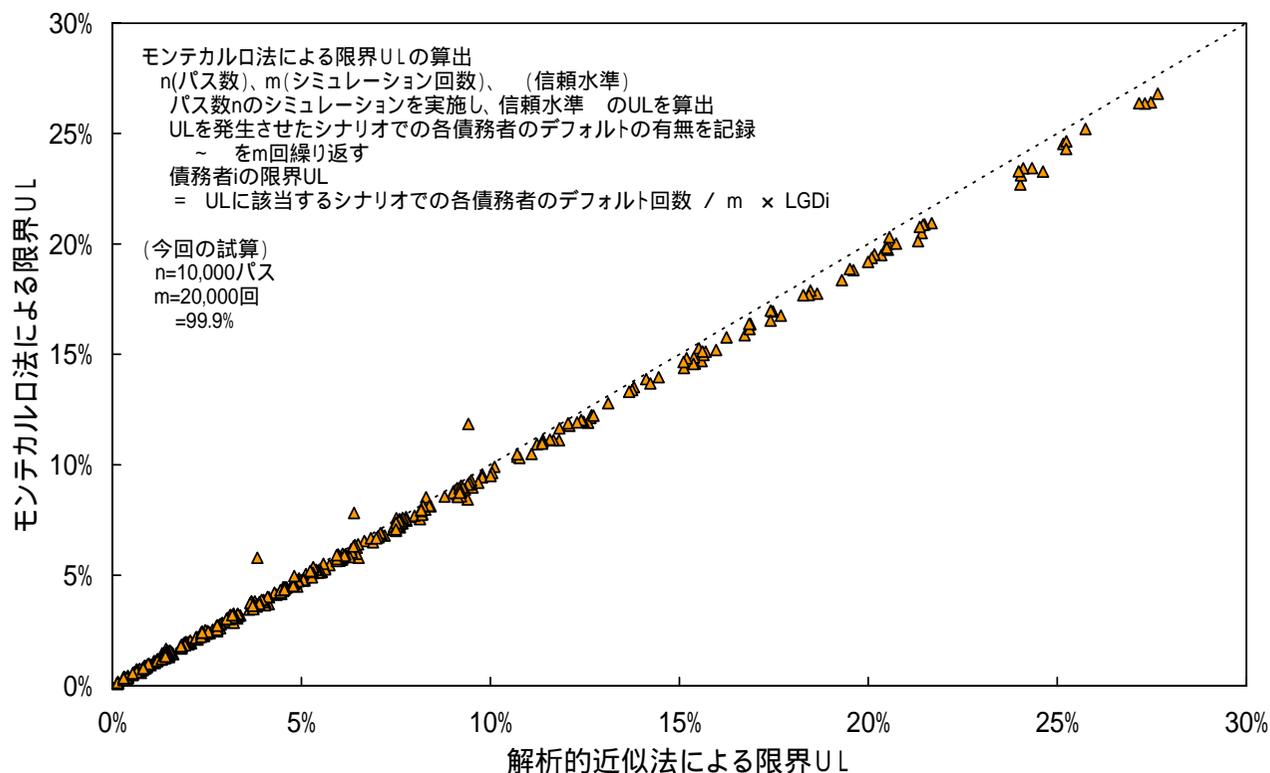
3. 解析的近似法による限界UL・個社UL

| 記号 | $ML_\alpha(i)$ | $UL_\alpha(i)$ | $\Sigma UL_\alpha(i)$ |
|------|----------------|----------------|-----------------------|
| 企業名 | 限界UL | 個社UL | Σ 個社UL |
| #001 | 6.4% | 29.7 | 675.1 |
| #002 | 3.8% | 17.1 | |
| #003 | 9.4% | 35.3 | |
| #004 | 1.4% | 3.2 | |
| #005 | 7.5% | 14.2 | |
| #006 | 11.8% | 20.7 | |
| #007 | 8.3% | 13.7 | |
| #008 | 14.1% | 22.4 | |
| #009 | 21.4% | 27.7 | |
| #010 | 5.3% | 6.5 | |
| #011 | 24.0% | 28.7 | |
| #012 | 6.5% | 7.2 | |
| #013 | 1.9% | 2.1 | |
| #014 | 2.5% | 2.3 | |
| #015 | 15.6% | 14.0 | |
| #016 | 6.0% | 4.9 | |
| #017 | 9.4% | 7.4 | |
| #018 | 20.5% | 15.9 | |
| #019 | 2.9% | 2.2 | |
| #020 | 3.0% | 2.3 | |
| #021 | 5.5% | 3.8 | |
| #022 | 24.6% | 16.7 | |
| #023 | 11.1% | 7.5 | |
| #024 | 16.7% | 10.5 | |
| #025 | 9.1% | 5.5 | |
| #026 | 1.1% | 0.7 | |

ポートフォリオUL(解析的近似)の、モンテカルロ法UL(678.3)からの乖離は 0.5%
 このポートフォリオでは、解析的手法でモンテカルロ法をうまく近似できている

個社別の限界ULでの比較

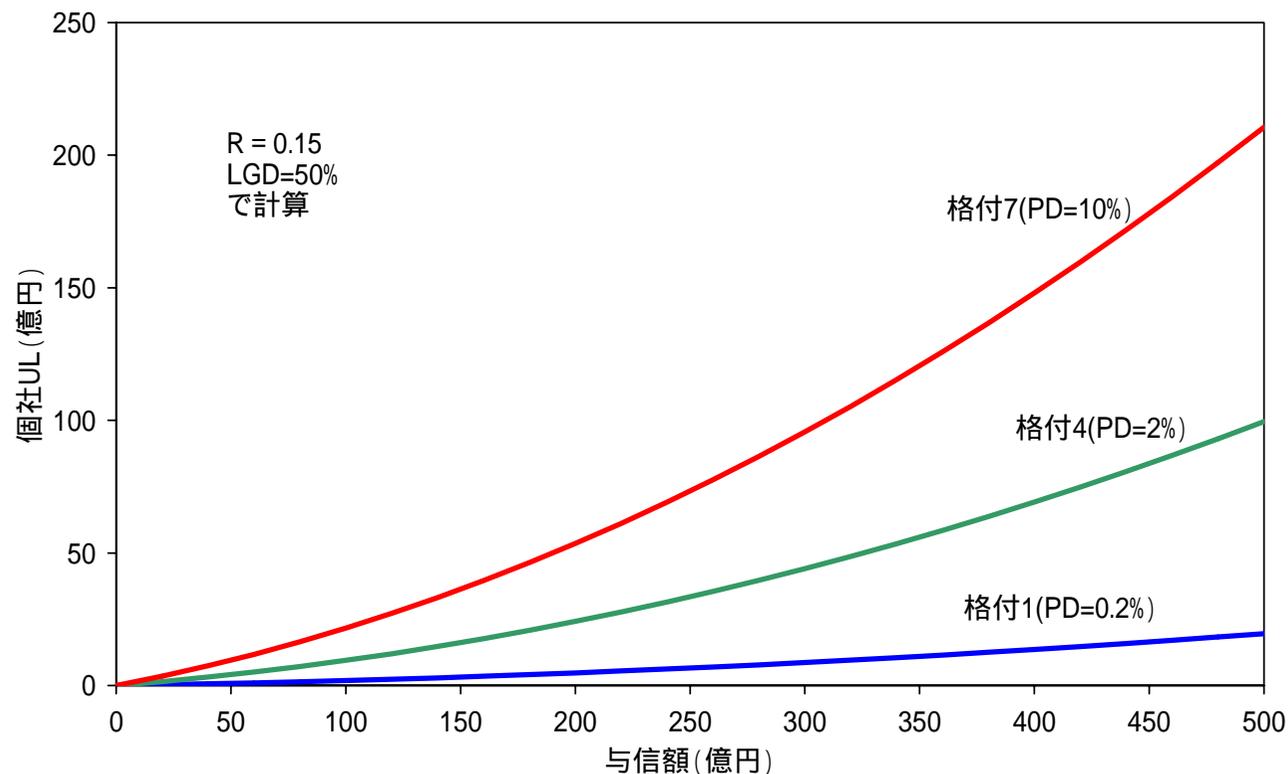
モンテカルロ法で算出した限界UL v.s. 解析的近似法による限界UL



個社別の限界ULでも、解析的近似法はモンテカルロ法の結果とほぼ一致
(計算負荷は遥かに軽い)

個社ULの特徴

格付別 (= PD別) の個社UL



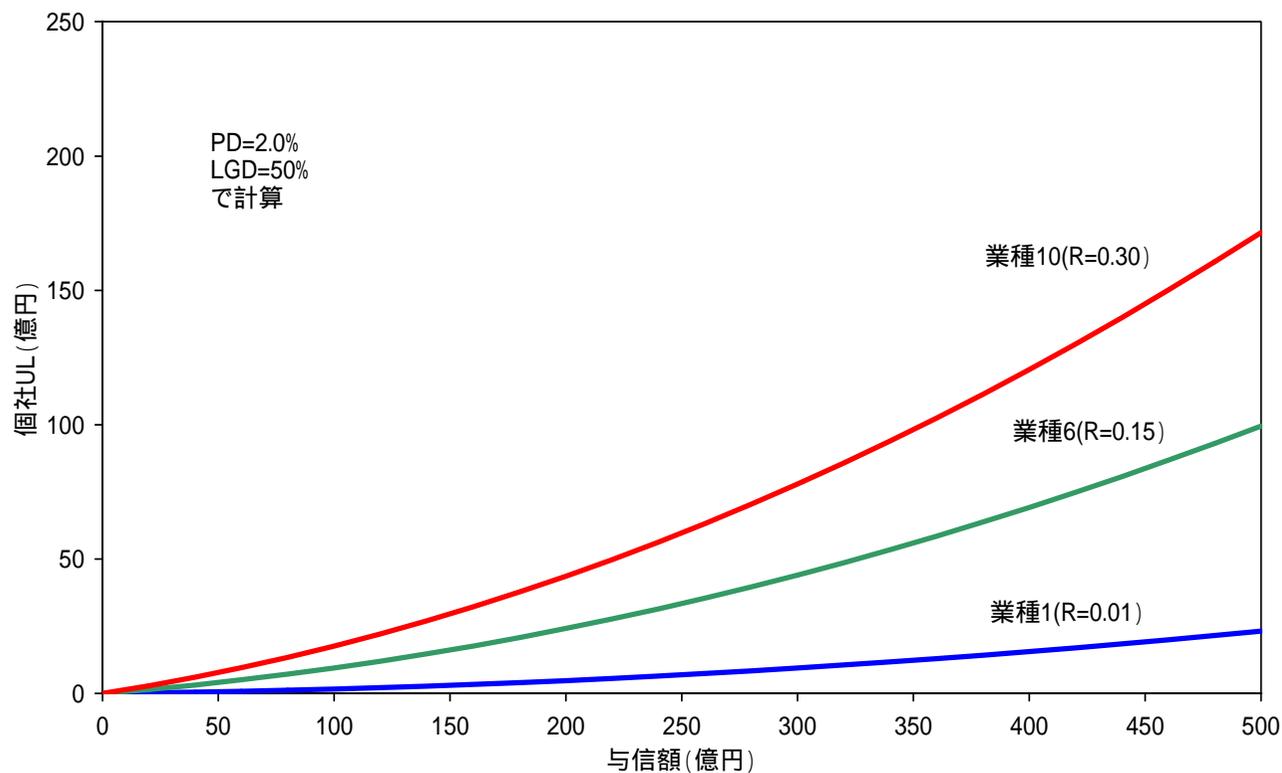
・個社ULは、与信額とPDの増加関数

・与信額が大きくなるほど、PDに対しより感応的(傾きが急)

(注)このグラフはサンプル・ポートフォリオに基づいて作成されたもの。異なるポートフォリオで計算するとグラフの形状も変化

個社ULの特徴

業種別 (= R別) の個社UL



- ・個社ULは、与信額と相関(R)の増加関数
 - ・与信額が大きくなると、Rに対しより感応的(傾きが急)
- (注)前頁と同じ

リスク量削減のためのアプローチ(その2) 個社UL基準の大口先抽出

個社UL上位20社

| 順位 | 企業名 | 与信額 (億円) | 格付 | 業種 | | 個社UL(億円) | | |
|----|-------|-------------|----|-------|---|----------|--------|------|
| | | | | PD | R | | Tier1比 | |
| 1 | #0003 | 374 | 3 | 1.0% | | 0.13 | 35.3 | 5.9% |
| 2 | #0001 | 465 | 1 | 0.2% | | 0.25 | 29.7 | 5.0% |
| 3 | #0011 | 119 | 6 | 5.0% | | 0.25 | 28.7 | 4.8% |
| 4 | #0009 | 129 | 7 | 10.0% | | 0.13 | 27.7 | 4.6% |
| 5 | #0008 | 159 | 6 | 5.0% | | 0.10 | 22.4 | 3.7% |
| 6 | #0006 | 175 | 6 | 5.0% | | 0.07 | 20.7 | 3.4% |
| 7 | #0002 | 447 | 2 | 0.5% | | 0.07 | 17.1 | 2.9% |
| 8 | #0022 | 68 | 6 | 5.0% | | 0.30 | 16.7 | 2.8% |
| 9 | #0018 | 78 | 7 | 10.0% | | 0.15 | 15.9 | 2.6% |
| 10 | #0005 | 188 | 3 | 1.0% | | 0.15 | 14.2 | 2.4% |
| 11 | #0015 | 90 | 4 | 2.0% | | 0.27 | 14.0 | 2.3% |
| 12 | #0007 | 164 | 5 | 3.0% | | 0.07 | 13.7 | 2.3% |
| 13 | #0024 | 63 | 5 | 3.0% | | 0.25 | 10.5 | 1.8% |
| 14 | #0027 | 59 | 6 | 5.0% | | 0.20 | 10.5 | 1.7% |
| 15 | #0033 | 54 | 7 | 10.0% | | 0.15 | 10.4 | 1.7% |
| 16 | #0035 | 52 | 5 | 3.0% | | 0.25 | 8.4 | 1.4% |
| 17 | #0023 | 68 | 3 | 1.0% | | 0.30 | 7.5 | 1.2% |
| 18 | #0017 | 79 | 3 | 1.0% | | 0.25 | 7.4 | 1.2% |
| 19 | #0012 | 110 | 2 | 0.5% | | 0.25 | 7.2 | 1.2% |
| 20 | #0073 | 28 | 7 | 10.0% | | 0.25 | 7.0 | 1.2% |

与信額基準では上位20に入らなかった先

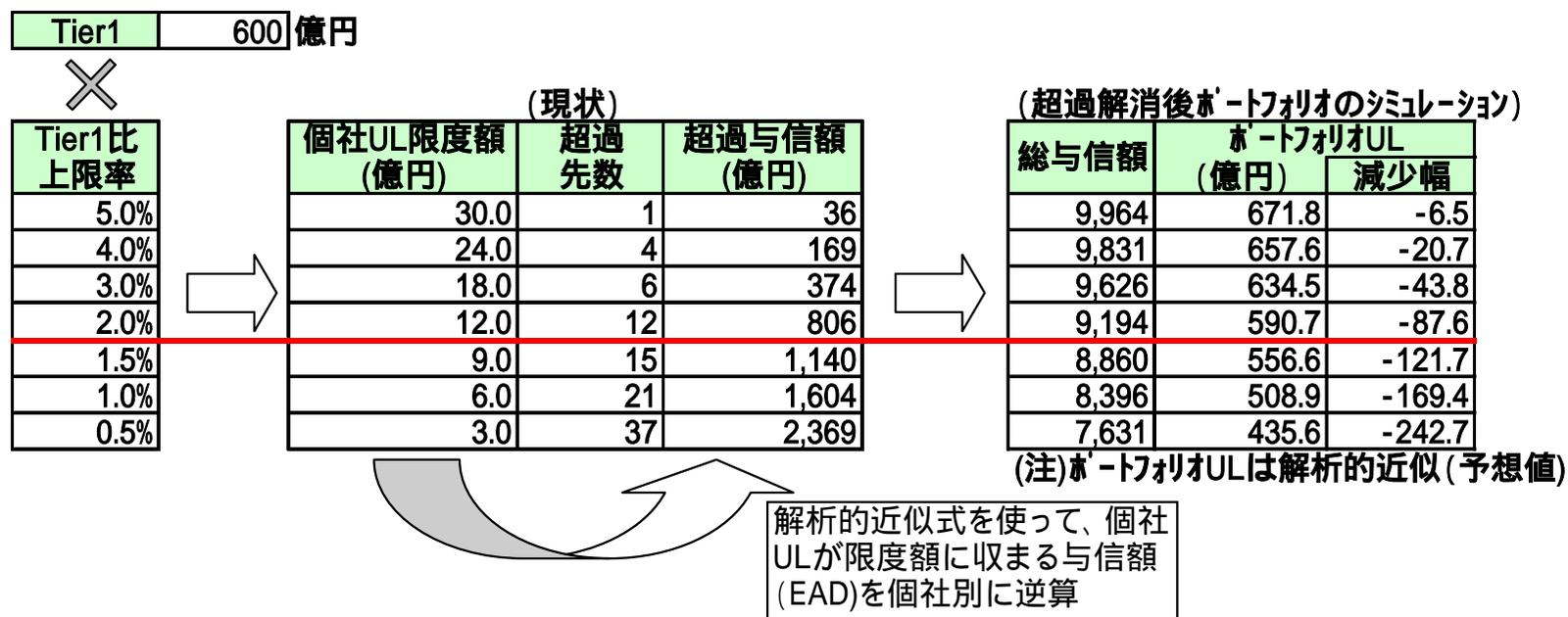
個社ULを基準に
与信限度を決めて
はどうか



PD、Rの高い先が大口先として抽出される

個社UL基準の与信限度枠設定

ポートフォリオULが目標値 (Tier1 600億円) に収まるように、個社ULに限度枠を設定した場合



サンプル・ポートフォリオでは、Tier1比2.0%を目処に限度額を設定し、かつ限度枠が遵守されればポートフォリオULはTier1内に収まる (与信削減対象先は12社)

残る課題・・・収益性

個社UL限度枠超過(12社)解消後のポートフォリオ(予想値)

(1) リスク評価

| | | (現状) | (削減後) | |
|---------|---|--------|-------|----|
| 総与信額 | A | 10,000 | 9,194 | 億円 |
| 99.9%UL | B | 678.3 | 590.3 | 億円 |

(ULは10万回のモンテカルロ・シミュレーションで算出)

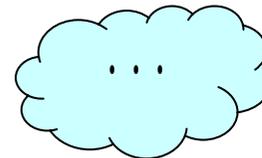
| | | | |
|-----------|---|-----|----|
| Tier1自己資本 | C | 600 | 億円 |
|-----------|---|-----|----|

収益性は改善するの？
余資運用先は？

(2) 収益性評価

| | | (現状) | (削減後) | |
|---------|----------------|--------|--------|----|
| RAROA | D | 0.430% | 0.425% | |
| 超過収益(額) | $E=A \times D$ | 43.0 | 39.1 | 億円 |
| RAROC | E/B | 6.3% | 6.6% | |
| ROE | E/C | 7.2% | 6.5% | |

| | |
|-------|-----|
| 目標ROE | 10% |
|-------|-----|



ULがTier1に収まったのはいいが、ROEはむしろ低下

個社ULによる収益性評価

$$\text{現在のROE} - \text{目標ROE (10\%)} = \frac{\text{超過収益}}{\text{Tier1資本}} - \text{目標ROE}$$

(注) 与信限度超過
解消後はポートフォリオ
UL Tier1資本な
ので単純化

$$= \frac{\text{超過収益}}{\text{ポートフォリオUL}} - \text{目標ROE}$$

$$= \frac{\text{超過収益} - \text{目標ROE} \times \text{ポートフォリオUL}}{\text{ポートフォリオUL}}$$

$$= \frac{(\text{与信額} \times \text{個社RAROA}) - \text{目標ROE} \times \text{個社UL}}{\text{ポートフォリオUL}}$$

$$= \frac{(\text{与信額} \times \text{個社RAROA}) - \text{目標ROE} \times (\text{与信額} \times \text{限界UL})}{\text{ポートフォリオUL}}$$

$$= \frac{\{\text{与信額} \times (\text{個社RAROA} - \text{目標ROE} \times \text{限界UL})\}}{\text{ポートフォリオUL}}$$

$$= \frac{(\text{個社別の資本コスト控除後収益})}{\text{ポートフォリオUL}}$$

資本コスト率 = 目標ROE
とした場合

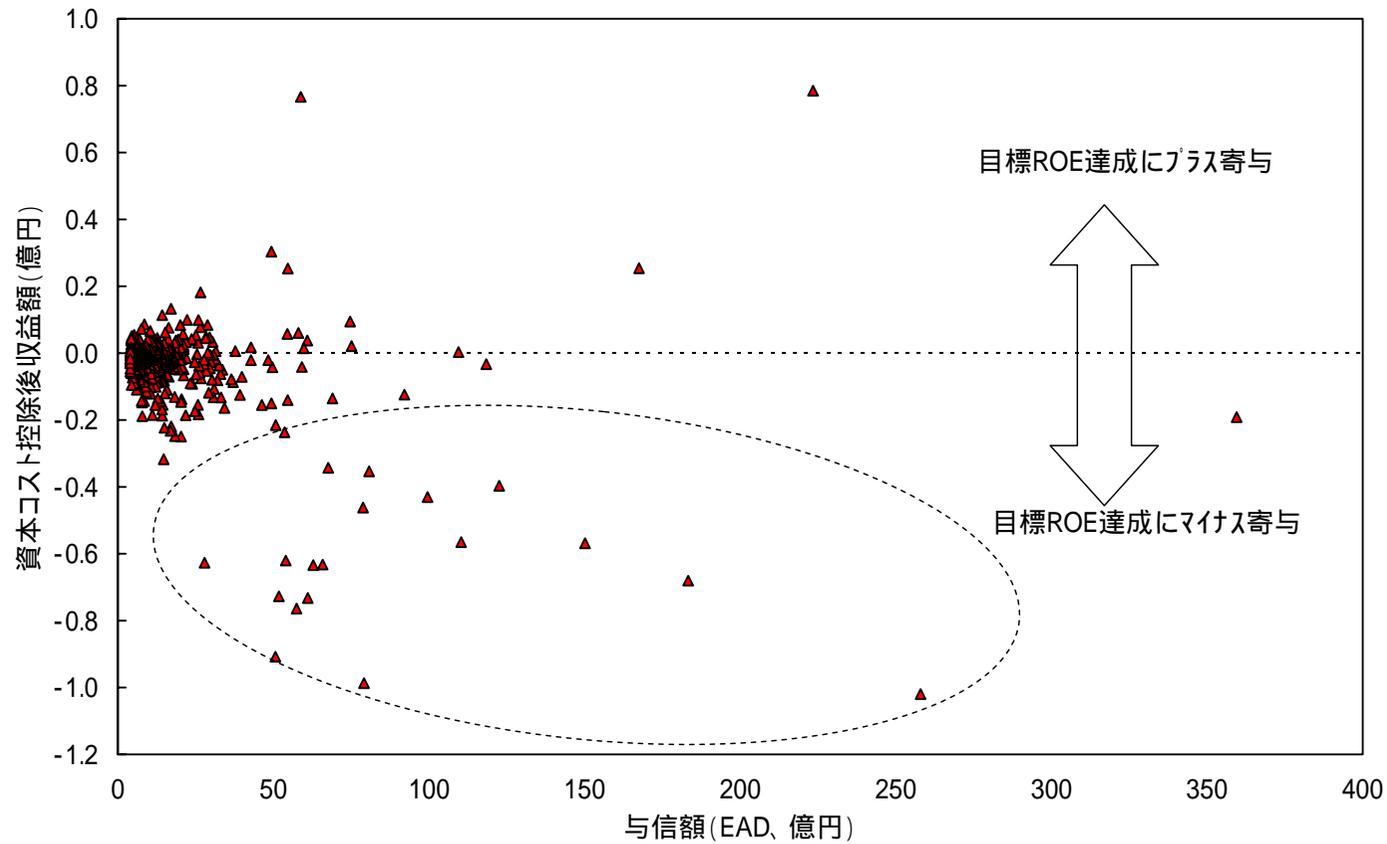
$$\text{ポートフォリオUL} = \text{個社UL}$$

$$\text{個社UL} = \text{与信額} \times \text{限界UL}$$

低ROEの原因を、個社レベルへ分解

個社別の資本コスト控除後収益 (サンプル・ポートフォリオ)

個社別の資本コスト控除後収益



資本コスト控除後収益に基づく資金再配分計画

資本コスト控除後収益(額)の下位先から、上位先へ資金再配分

下位10社(与信削減ターゲット先)

| 順位 | 企業名 | 資本コスト 控除後収益 (億円) | 与信額 EAD (億円) | PD | R |
|----|-------|------------------------|--------------------|-------|------|
| 1 | #0001 | -1.02 | 258 | 0.2% | 0.25 |
| 2 | #0015 | -0.99 | 79 | 2.0% | 0.27 |
| 3 | #0022 | -0.91 | 51 | 5.0% | 0.30 |
| 4 | #0011 | -0.76 | 57 | 5.0% | 0.25 |
| 5 | #0018 | -0.73 | 61 | 10.0% | 0.15 |
| 6 | #0035 | -0.73 | 52 | 3.0% | 0.25 |
| 7 | #0003 | -0.68 | 183 | 1.0% | 0.13 |
| 8 | #0024 | -0.63 | 63 | 3.0% | 0.25 |
| 9 | #0009 | -0.63 | 66 | 10.0% | 0.13 |
| 10 | #0073 | -0.63 | 28 | 10.0% | 0.25 |

| | |
|--|----------|
| Tier1 対比の 個社UL 与信限度によって 削減した額(前述12社) | 806 億円 |
| + | |
| 収益性基準での 削減対象与信額 (10社合計) | 897 億円 |
| | |
| 余裕資金 | 1,703 億円 |

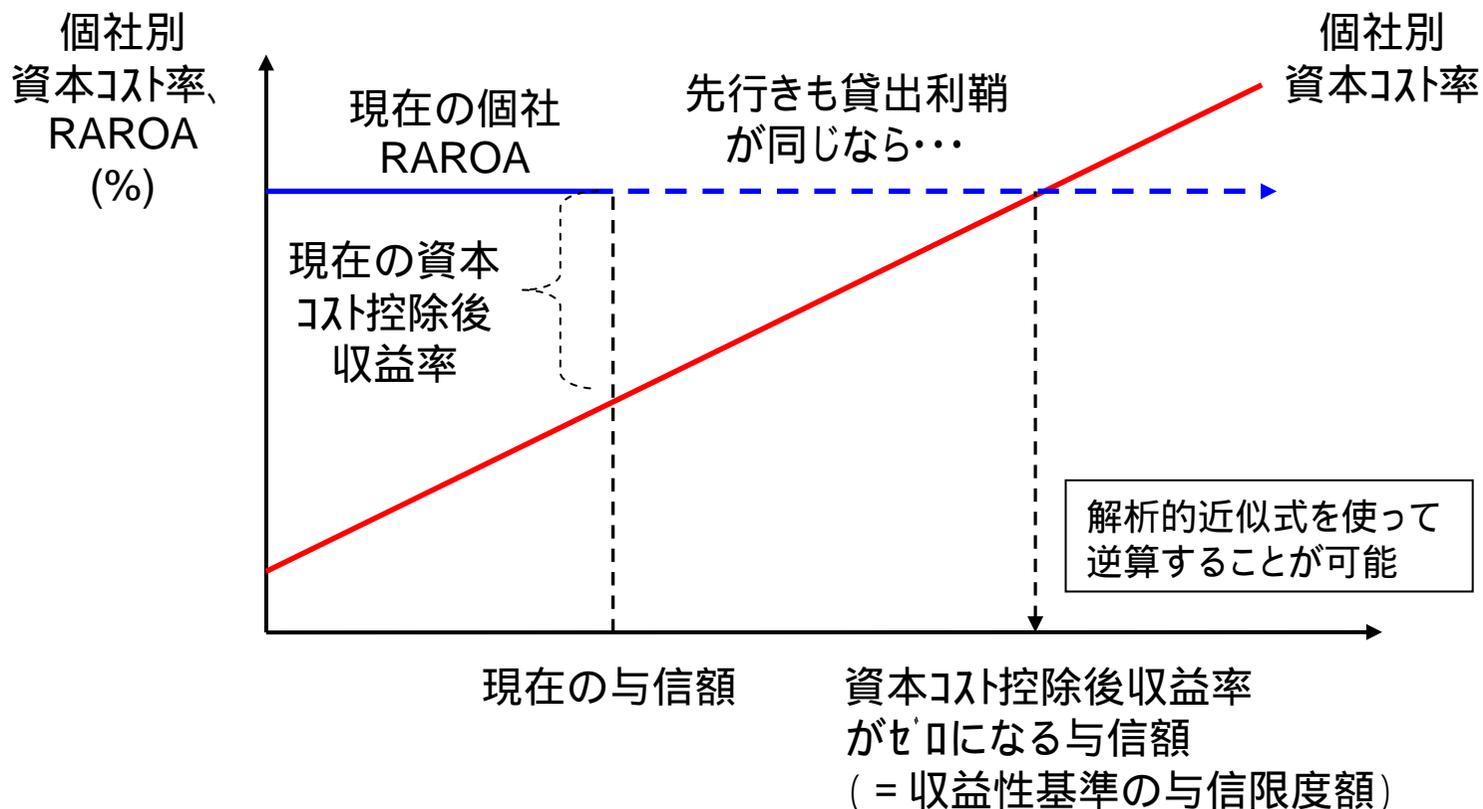
上位10社(与信増加ターゲット先)

| 順位 | 企業名 | 資本コスト 控除後収益 (億円) | ① 与信額 EAD (億円) | PD | R | ② Tier1 対比 与信限度 | ③ 収益性基準 与信限度 | ④ 総合 与信限度 =min{②,③} | 与信 増加額 ④-① | 与信 増加額 (累積) |
|----|-------|------------------------|-------------------------|-----|------|-----------------------|--------------------|------------------------------|------------------|-------------------|
| 1 | #0004 | 0.78 | 223.4 | 1% | 0.01 | 462 | 1,011 | 462 | 239 | 239 |
| 2 | #0028 | 0.77 | 58.8 | 1% | 0.01 | 462 | 2,983 | 462 | 404 | 643 |
| 3 | #0039 | 0.30 | 49.3 | 1% | 0.01 | 462 | 1,427 | 462 | 413 | 1,056 |
| 4 | #0030 | 0.25 | 54.7 | 2% | 0.01 | 329 | 617 | 329 | 275 | 1,330 |
| 5 | #0077 | 0.18 | 26.5 | 5% | 0.01 | 212 | 410 | 212 | 185 | 1,516 |
| 6 | #0130 | 0.13 | 17.1 | 10% | 0.15 | 59 | 155 | 59 | 42 | 1,558 |
| 7 | #0174 | 0.11 | 14.2 | 5% | 0.01 | 212 | 460 | 212 | 198 | 1,755 |
| 8 | #0094 | 0.10 | 22.2 | 1% | 0.01 | 462 | 1,028 | 462 | 440 | 2,196 |
| 9 | #0081 | 0.10 | 25.9 | 2% | 0.01 | 329 | 489 | 329 | 303 | 2,499 |
| 10 | #0020 | 0.09 | 74.6 | 5% | 0.01 | 212 | 146 | 146 | 71 | 2,570 |

与信限度一杯まで与信額拡大
できるとすれば、上位7社分

収益性基準の与信限度額(前頁表)

個社別のRAROAが現状と同じまま推移すると、ある与信額以上では資本コスト控除後収益がマイナス転化



(注) 与信額が増加しても、資本コスト率の上昇を賄うように貸出利鞘を厚くできるなら、収益性基準の与信限度額は不要

資金再配分計画が実現したら・・・

資金再配分(下位10社 上位7社)後のポートフォリオ(予想値)

| (1)リスク評価 | (現状) | (1)12社削減 後<前掲> | (1)+(2)資金 再配分後 | |
|----------|------|-------------------|-------------------|-----------|
| 総与信額 | A | 10,000 | 9,194 | 10,052 億円 |
| 99.9%UL | B | 678.3 | 590.3 | 554.7 億円 |

(ULは10万回のモンテカルロ・シミュレーションで算出)

| | | |
|-----------|---|-----|
| Tier1自己資本 | C | 600 |
|-----------|---|-----|

| (2)収益性評価 | (現状) | (1)12社削減 後<前掲> | (1)+(2)資金 再配分後 | |
|----------|-------|-------------------|-------------------|---------|
| RAROA | D | 0.430% | 0.425% | 0.511% |
| 超過収益(額) | E=A×D | 43.0 | 39.1 | 51.3 億円 |
| RAROC | E/B | 6.3% | 6.6% | 9.3% |
| ROE | E/C | 7.2% | 6.5% | 8.6% |

| | |
|-------|-----|
| 目標ROE | 10% |
|-------|-----|



(目標は未達だが)ROE、RAROCともに改善。
ULが目標よりやや小さいので、新たなリスクテイク余地あり。

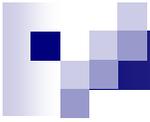
個社UL (解析的近似法) の利点

(モンテカルロ法で計測されたポートフォリオULとの乖離が小さいという前提の下で)

- Excel等で限界UL、個社ULを算出可能
 - ✓ プライシング、リスク管理へ応用可能
- What-if分析(社を したら~になる)が容易
 - ✓ ポートフォリオマネジメント(= 最適解の探索と実行)のツール
 - ✓ 個社別にターゲットを絞り込める



**「与信ポートフォリオ全体の問題解決」を個社レベルで検討できる
(より営業現場に近いレベルでの議論が可能)**

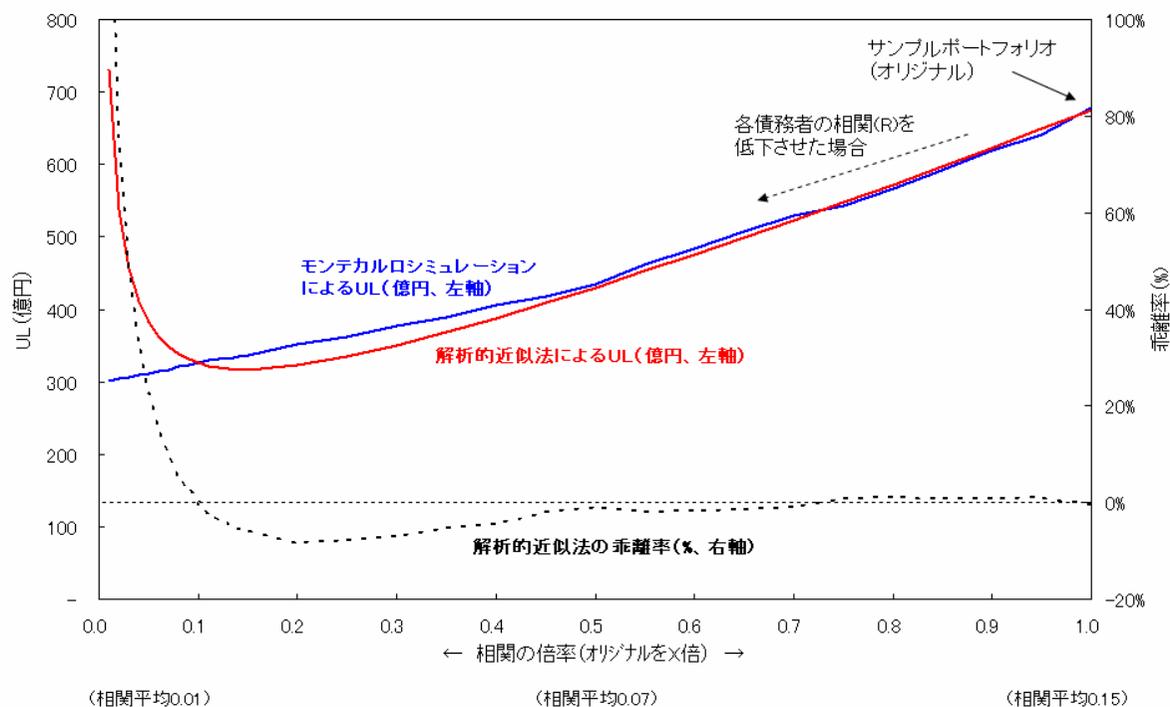


留意点と課題

■ 解析的近似法によりポートフォリオULも計算できるなら、モンテカルロ・シミュレーションは不要か？

- 否。解析的近似法の近似精度を確認するためにはモンテカルロ・シミュレーション法での結果と比較しなければならない。
- 今回紹介した近似手法は、債務者数が少ない場合や集中度が高い場合だけでなく、相関が低いあるいはデフォルト確率が低い状況でも近似精度が悪化。

(例) サンプル・ポートフォリオの各債務者の相関(R)を低下させた場合



(注) 各債務者の相関(オリジナルは0.01~0.30、平均0.15)を一律x倍(0.01倍~0.95倍)して再計算したものを。

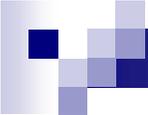


- 個社別にULが算出できれば、与信額基準での大口先管理は不要か？

- 否。個社ULはポートフォリオULへの影響度を計測するもの。どんな優良先でも、デフォルトすれば与信額(×損失率)の損害を被る
- 格付、業種とは関係なく「1先のデフォルトによる損害額はどこまで許容可能か」という観点からの大口先管理はあるべき(個社UL基準と役割を切り分けることが可能)

- 「個社UL=ポートフォリオUL」でなければならないのか？

- 否。ポートフォリオの分散効果が変わる(減少する)リスクに備えたければ、「個社UL>ポートフォリオUL」に調整するのが保守的
- 対照的な例: 投資銀行のリスク管理のスタイル

- 
- 個社別の採算性は、貸出利鞘 v.s. 資本コストだけでなく手数料収入等も含めた総合採算で見るとはならないか？
 - そうかもしれない
 - ただし、総合採算が「ドンブリ勘定」にならないようにしたければ、個社ULを使った資本コスト分析は有用(貸出利鞘 + 手数料収入で資本コストをカバーしているかをチェック)

 - 自行のポートフォリオの状況によって異なる個社UL(資本コスト率)でプライシングした金利は、貸出市場での金利水準から乖離するのではないか？
 - 個社ULはポートフォリオの構成や規模に依存するので、その可能性はある
 - 例えば、同額の大口融資であっても、小規模銀行にとっての個社ULは大規模銀行よりも大。資本コストを勘案したプライシングを導入すると、小規模銀行にとっての大口融資の採算レートは、市場金利よりも高くなる可能性がある

■ この手法をプライシングや限度額管理などに応用した場合の弊害は何か？

- リスク計測モデルの結果を個社別管理にまで応用するため、**より強い「モデル・リスク」**に晒される

(例) 仮想サンプル・ポートフォリオ資金再配分後の格付別・業種別与信額

与信額(億円)

| | 業種 | | | | | | | | | | | 小計 | 構成比 |
|-----|-------|-------|-------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|--------|-------|-----|
| | | | | | | | | | | | | | |
| 格付 | 1 | 139 | 117 | 193 | 135 | 66 | 200 | 287 | 84 | 112 | 220 | 1,552 | 15% |
| | 2 | 122 | 109 | 694 | 102 | 103 | 118 | 304 | 310 | 245 | 119 | 2,226 | 22% |
| | 3 | 1,468 | 140 | 106 | 76 | 139 | 431 | 97 | 273 | 54 | 195 | 2,980 | 30% |
| | 4 | 431 | 66 | 94 | 109 | 37 | 70 | 43 | 43 | 61 | 17 | 972 | 10% |
| | 5 | 94 | 53 | 161 | 34 | 33 | 28 | 23 | 42 | 49 | 41 | 559 | 6% |
| | 6 | 519 | 98 | 93 | 196 | 11 | 6 | 92 | 154 | 85 | 39 | 1,294 | 13% |
| | 7 | 19 | 96 | 68 | 18 | 26 | 126 | 24 | 31 | 23 | 39 | 470 | 5% |
| 小計 | 2,792 | 680 | 1,409 | 669 | 415 | 979 | 871 | 938 | 629 | 669 | 10,052 | 100% | |
| 構成比 | 28% | 7% | 14% | 7% | 4% | 10% | 9% | 9% | 6% | 7% | 100% | --- | |

1-factorモデル 「共通ファクターとの相関が低い業種のリスクは小さい」と評価
業種 (R=0.01)への集中を促す結果(モデル・リスク)

「業種 特有のリスク」が存在するかもしれない。それを把握するには、リスク計測モデルをmulti-factor化しなければならない。モデルの変更が現時点で困難であれば、業種集中に対し(経験則でもよいから)何らかの制約を課するのが1つの対処法



■ 限界UL、個社ULの安定性は？

- 今日紹介した限界UL、個社ULは、「現時点でのポートフォリオ」を前提に計算されるもの。ポートフォリオ構成が変わると(EAD、PD等が同じでも)限界UL、個社ULは変化する
- 実務に応用するのであれば、ある程度の「幅」をもった対応が必要

■ Multi-factorモデルでの解析的近似法は？

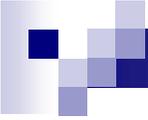
- 肥後[2006]で、Pykhtin[2004]の手法による解析的近似法を適用。
- 残念ながら近似精度はあまり良くなかった。計算速度も遅い。

■ Multi-factorモデルでの個社ULの解析的近似法は？

- 上記の結果からするとあまりよい結果は期待できない。

■ 多期間モデルでの個社ULの解析的近似法は？

- 今後の研究課題。



参考文献

Basel Committee on Banking Supervision, “An Explanatory Note on the Basel II IRB Risk Weight Functions,” Bank for International Settlements, July 2005
(<http://www.bis.org/bcbs/irbriskweight.htm>で入手可能)

Canabarro, E., E.Picoult and T. Wilde, “Analysing counterparty risk,” *Risk*, 16(9), 2003, pp.117-122.

Emmer, S., and D., Tasche, “Calculating credit risk capital charges with the one-factor model,” *Journal of Risk*, 7, 2005, pp.85-101
(<http://arxiv.org/abs/cond-mat/0302402> で入手可能)

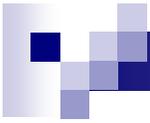
Gordy, M., “A risk-factor model foundation for rating-based bank capital rules,” *Journal of Financial Intermediation*, 12(3), July 2003, pp.199-232

Martin, R. and T. Wilde, “Unsystematic credit risk,” *Risk*, 15(11), 2002, pp.123-128

Pykhtin, M. “Multi-factor adjustment,” *Risk*, 17(3), 2004, pp.85-90

安藤美孝、「与信ポートフォリオの信用リスクの解析的な評価方法：極限損失分布およびグラニュラリティ調整を軸に」、『金融研究』、第24巻別冊第1号、日本銀行金融研究所、pp.39-120、2005年
(<http://www.imes.boj.or.jp/japanese/kinyu/2005/kk24-b1-2.pdf>で入手可能)

肥後秀明、「不均一な与信ポートフォリオのリスク計量におけるモンテカルロ・シミュレーションの効率化」、日本銀行ワーキングペーパーシリーズ、06-J-18、2006年
(<http://www.boj.or.jp/type/ronbun/ron/wps/wp06j18.htm>で入手可能)



本資料に記載している内容について、他の公表物に転載・複製する場合には、あらかじめ日本銀行金融機構局金融高度化センターまで連絡し、承諾を得て下さい

本資料に掲載されている情報の正確性については万全を期しておりますが、日本銀行金融機構局金融高度化センターは本資料の利用者が本資料の情報を用いて行う一切の行為について、何ら責任を負うものではありません

マートン型の 1-factor モデルにおける限界 UL、個社 UL の解析的近似¹

1. 前提となるモデルと記号

i : 債務者のインデックス ($i=1,2,\dots,M$)

p_i : 債務者 i のデフォルト確率 (PD)

π_i : 債務者 i に対する与信額 (EAD)

θ_i : 債務者 i のデフォルト時損失率 (LGD)

Y_i : 債務者 i の企業価値変化率 ($Y_i = \sqrt{R_i} X + \sqrt{1-R_i} \varepsilon_i$)

(注) X 、 ε_i は互いに独立な標準正規確率変数、 $\sqrt{R_i}$ は X に対する感応度

L_i : 債務者 i から生じる損失額 ($L_i = \pi_i \theta_i 1_{\{Y_i < N^{-1}(p_i)\}}$)

(注) $N(\bullet)$ は標準正規累積密度関数、 $N^{-1}(\bullet)$ は $N(\bullet)$ の逆関数

L : ポートフォリオの損失額 ($L = \sum_{i=1}^M L_i$)

¹ 金融高度化セミナー「個社別 UL の解析的近似法と与信ポートフォリオ・マネジメントへの応用」別添資料
日本銀行 金融機構局 金融高度化センター 肥後秀明 hideaki.higo@boj.or.jp 03-3277-1130

UL_α : 信頼水準 α でのポートフォリオのリスク量

$$UL_\alpha = q_\alpha(L) - EL$$

(注) $q_\alpha(L) = \inf\{y | \Pr(L \leq y) \geq \alpha\}$ (L の α 分位点)

$$EL = \sum_{i=1}^M \pi_i \theta_i p_i \quad (\text{ポートフォリオの期待損失額})$$

2. 限界 UL、個社 UL の定義

$ML_\alpha(i)$: 信頼水準 α における債務者 i の限界 UL (UL 感応度)

$$ML_\alpha(i) \equiv \frac{\partial UL_\alpha}{\partial \pi_i} \quad (1 \text{ 式})$$

$UL_\alpha(i)$: 信頼水準 α における債務者 i の個社 UL (UL 寄与度)

$$UL_\alpha(i) \equiv \pi_i ML_\alpha(i) \quad (2 \text{ 式})$$

(注) $\sum_{i=1}^M UL_\alpha(i) = UL_\alpha$ であるため、ポートフォリオ UL を各債務者に配分する方式として都合がよい。

3. ポートフォリオULの解析的近似

導出は安藤[2005]²を参照のこと。ここでは結果のみ記載。なお、記述簡素化のため、任意の関数 $h = h(x, y, \dots)$ の x による 1 階の偏微分を h'_x 、2 階の偏微分を h''_{xx} と表記する。

$$\begin{aligned} UL_\alpha &= q_\alpha(L) - EL \\ &\approx l|_{x=N^{-1}(1-\alpha)} + \Delta q_\alpha(L) - EL \end{aligned} \quad (3式)$$

(注1) l : $X = x$ という条件の下でのポートフォリオの期待損失額

$$l = E[L|X = x] = \sum_{i=1}^M \pi_i \theta_i \phi_i$$

(注2) ϕ_i : $X = x$ という条件の下での債務者 i のデフォルト確率

$$\phi_i = N\left(\frac{N^{-1}(p_i) - \sqrt{R_i} x}{\sqrt{1 - R_i}}\right)$$

² 「与信ポートフォリオの信用リスクの解析的な評価方法：極限損失分布およびグラニュラリティ調整を軸に」、『金融研究』、第24巻別冊第1号、日本銀行金融研究所、pp39-120、2005年。ただし、本論ではLGDの変動を考慮しないため、同論文での σ_i^2 (LGDの分散) はゼロと置いている。

(注3) $\Delta q_\alpha(L)$: グラニュラリティ調整項

$$\Delta q_\alpha(L) = -\frac{1}{2l'_x} \left(v'_x - v \left(\frac{l''_x}{l'_x} + x \right) \right) \Big|_{x=N^{-1}(1-\alpha)}$$

$$l'_x = \sum_{i=1}^M \pi_i \theta_i (\phi_i)'_x$$

$$l''_x = \sum_{i=1}^M \pi_i \theta_i (\phi_i)''_x$$

v : 条件付期待損失額 l の分散

$$v = \sum_{i=1}^M \pi_i^2 \theta_i^2 \phi_i (1 - \phi_i)$$

$$v'_x = \sum_{i=1}^M \pi_i^2 \theta_i^2 (\phi_i)'_x (1 - 2\phi_i)$$

$$(\phi_i)'_x = -\frac{\sqrt{R_i}}{\sqrt{1-R_i}} f\left(\frac{N^{-1}(p_i) - \sqrt{R_i}x}{\sqrt{1-R_i}}\right) \quad (f : \text{標準正規分布の確率密度関数})$$

$$(\phi_i)''_x = -\frac{R_i}{1-R_i} \frac{N^{-1}(p_i) - \sqrt{R_i}x}{\sqrt{1-R_i}} f\left(\frac{N^{-1}(p_i) - \sqrt{R_i}x}{\sqrt{1-R_i}}\right)$$

4. 限界 UL の解析的近似

(3) 式を(1)式に代入して下記を得る。

$$\begin{aligned}
 ML_\alpha(i) &\equiv \frac{\partial UL_\alpha}{\partial \pi_i} \\
 &\approx \frac{\partial}{\partial \pi_i} \left(l \Big|_{x=N^{-1}(1-\alpha)} + \Delta q_\alpha(L) - EL \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial \pi_i} \left(\sum_{i=1}^M \pi_i \theta_i \phi_i - \frac{1}{2l'_x} \left(v'_x - v \left(\frac{l''_x}{l'_x} + x \right) \right) - \sum_{i=1}^M \pi_i \theta_i p_i \right) \Big|_{x=N^{-1}(1-\alpha)} \\
 &= \underbrace{\theta_i (\phi_i - p_i) \Big|_{x=N^{-1}(1-\alpha)}}_{\text{無限分散本・トイオ材の限界UL}} - \underbrace{\theta_i \left(\frac{C}{2} \left(BC(\phi_i)'_x - C^2 v \left(l'_x(\phi_i)''_x - l''_x(\phi_i)'_x \right) + 2\pi_i \theta_i \left((\phi_i)'_x (1 - 2\phi_i) - A \phi_i (1 - \phi_i) \right) \right) \right) \Big|_{x=N^{-1}(1-\alpha)}}_{\text{グラニユラリティ調整項}} \quad (4 \text{ 式})
 \end{aligned}$$

(注) $A = \frac{l''_x}{l'_x} + x$

$B = vA - v'_x$

$C = \frac{1}{l'_x}$ (表記簡便のため)

5. 個社 UL の解析的近似

(4) 式で求められた限界 UL の解析的近似に π_i を乗じて個社 UL の解析的近似とする。³

以上

³ Emmer, S., and D., Tasche, "Calculating credit risk capital charges with the one-factor model," Journal of Risk, 7, 2005, pp.85-101 (http://arxiv.org/abs/cond-mat/0302402 で入手可能) も上記(4式)と同じ計算を行っている (Corollary 2.4)