# オペレーショナルリスク計量化と シナリオ分析

東京工業大学大学院イノベーションマネジメント研究科
中川 秀敏

日本銀行金融機構局金融高度化センター
シナリオ分析に関するワークショップ
2006年7月18日

本講演の一部は、日本トラスティ・サービス信託銀行との共同研究「オペレーショナルリスク計量化手法についての理論研究と実証分析」からの成果です。

ただし、本資料で紹介している手法が日本トラスティ・サービス信託銀行のリスク計量化手法であることを意味するものではありません。

また、本資料の意見・内容は全て発表者個人に属するものであり、発表者の属する組織および日本トラスティ・サービス信託銀行の公式見解ではありません。

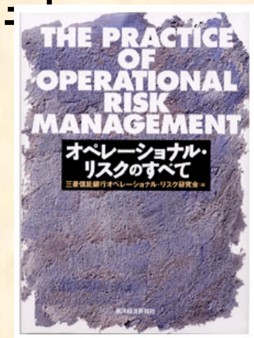
# OUTLINE

- 先進的計測手法の概要
- 実務上の問題点
  - 極値理論を利用したアプローチのレビュー
- シナリオ分析は有効か？
  - シナリオの作成
- 極値理論を用いたシナリオ活用法の一案
  - POTアプローチと確率ウェイト･モーメント法の適用

# 中川とオペレーショナルリスクの関わり

- MTBインベストテクノロジー研究所（現在の三菱UFJトラスト投資工学研究所）勤務時に、親会社のオペレーショナルリスクに関係する事故データの分析およびオペレーショナルリスク計測モデルの提案を行った
  - ニューメリカルテクノロジーズ社の開発したOperationalRiskBrowser™実装モデルの提案および検証もした

- 「オペレーショナル・リスクのすべて」三菱信託銀行オペレーショナル・リスク研究会編の第5章と付録を担当
  - 上記の本の内容に関連して講演や論文執筆等も何度か行ってきた



# 先進的計測手法の概要（１）

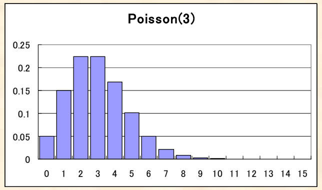
- 先進的計測手法（AMA, Advanced Measurement Approach）
  - 損失分布手法（LDA, Loss Distribution Approach）と呼ぶ場合もある
  - ここでは、Basel II で計上することなったオペレーショナルリスクのリスク量を、内部事故データを（場合によっては外部データやシナリオも含めて）利用して、ある期間内の累積損失額分布を特定し、99.9%Value at Risk(VaR) で計測する手法と定義する

# 先進的計測手法の概要（2）

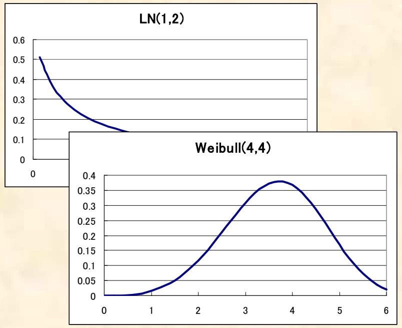
- 99.9%VaR計測までの大まかな流れ
  - 事故発生頻度（期間内の事故発生件数）
    - 例えば、半年間あるいは年間の事故発生件数がPoisson分布に従うと仮定
  - 事故発生時の（1件あたり）損失額
    - 例えば、対数正規分布, Weibull 分布、Gamma分布などのパラメトリックな分布の適用
    - 極値理論（EVT）を応用して、ある閾値以上の超過損失分布を一般パレート分布（GPD）を用いて表す方法もある
    - 経験分布（ノンパラメトリックな分布）を仮定することもある
  - 上の2つを組み合わせて、ある期間に対する累積損失額分布を考えて、その99.9%点をオペレーショナルリスクVaRとして求める
  - 累積損失額分布を求める方法としては
    - モンテカルロ・シミュレーションにより、累積損失額の乱数シナリオを多数生成し、そのヒストグラムを得る方法
    - Panjer漸化式や特性関数を利用して、累積損失額の確率分布を数学的手法で（近似的にでも）得る方法

# 先進的計測手法の概要（3）

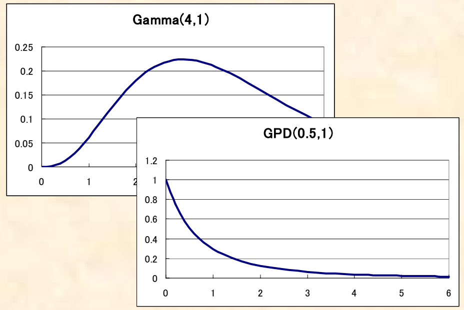
- 発生頻度の分布
  - Poisson 分布




- 損失額の分布




  - 対数正規分布
  - Weibull分布
  - Gamma分布
  - GPD

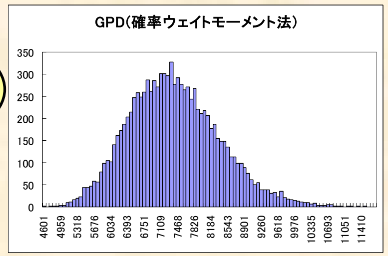



  - 高損失部分にGPD（POTアプローチ）
  - ノンパラメトリックな手法

累積損失額モデル

**複合Poissonモデル**

モンテカルロ・シミュレーション



# 先進的計測手法の概要（4）

- 先進的計測手法によるオペリスク計測のためにやるべきこと

※前段として、ビジネスライン／イベントタイプごとに適用するのか、銀行全体で計測するのかなどを決めておく必要がある

## ①モデルの決定

- 事故発生頻度および損失額分布の決定
- 累積損失額分布の計算方法の決定
- POTアプローチを用いる場合、低損失と高損失を分ける閾値の決定

## ②モデルの含むパラメータの推定

- Poisson分布の平均（＝分散）パラメータ
- 損失額分布のパラメータ

# 実務上の問題点（１）

- モデルの決定に関する疑問
  - 事故発生頻度の期間ごと平均を一定と考えて良いのか？（≒Poisson分布以外は使えないのか？）
  - 損失額の分布としてどの分布を用いるのが適当か？
  - 発生頻度と損失額、あるいは連続する損失額は独立と考えて良いのか？
  - セルごとにリスクを算出する場合、セル間の依存関係をどのようにとらえたら良いのか？
  - POTアプローチを用いる場合、閾値をどの程度に設定したらよいのか？

# 実務上の問題点（２）

- モデルの含むパラメータの推定に関する疑問
  - 事故件数は実損ベースで考えるべきか、見なし事故も含めて考えるべきか？
  - 損失額の数字が横並びのケースなどをどう考えればよいか？
  - そもそもデータ件数が少ないのに、最尤法による推定の精度は保証されるのか？
  - その他のパラメータ推定法を使った場合でも、その推定値をどこまで信頼できるのか？
  - あまり高額損失のデータがないのに、POTアプローチを適用できるのか？

# 実務上の問題点（3）

- 疑問のいくつかに対する処方箋として
  - シナリオ分析の活用が有効であるのか？
  - あるいは、シナリオ分析と組み合わせることを考えた場合に、適切なモデルや推定手法は自ずと決まってくるのか？

- 個人的見解ではあるが、
  - 本来は、シナリオ分析と内部損失データを利用した計測手法とは切り離して両者を互いに補完的に扱うのが望ましいと考える
  - シナリオを組み合わせてもパラメトリックな手法の適用はそもそも難しいと考える
  - しかし、シナリオ（外部事例をスケーリングしたようなものも含む）を内部データと組み合わせて、パラメトリックな手法でオペリスク99.9%VaR を計算する方法も考えられないではない

あとで、極値理論を利用して、外部データやシナリオを含む高損失データだけを用いてオペリスクVaRを算出する方法について一案を説明する

# シナリオ作成(1)

Basel II の3つの柱について

- Minimum capital requirements - リスク計測の精緻化
- Supervisory review - 銀行自身によるリスク認定・評価・監視・管理態勢の策定
- Market discipline - 情報開示の充実

- 市場リスクや信用リスクについても同じことが言えるが、特にオペレーショナルリスクに関して言えば、リスクの定量化手法だけを追求しても得るものは少ない。
- 銀行全体としてのリスク管理フレームワークの策定や情報開示に対する積極的な姿勢が重要と考える。
- Embrechts-Furrer-Kaufmann(2003) の Conclusion からの引用:

> Keeping in mind that most serious operational risk losses can not be judged as mere accidents, it becomes obvious that the only way to gain control over operational risk is to improve the quality of control over the possible sources of huge operational losses.
>
> It is exactly here that Pillar 2, and to a less extent Pillar 3, becomes extremely important.

# シナリオ作成（２）

## シナリオ作成の目的

- （直接的には）少ない（特に高損失の）データを補完する
  - 内部データと整合・親和するか？
  - そもそも内部データを無視して、シナリオデータだけで考えれば済む話ではないか？
- （間接的には）自行の業務プロセスにおけるリスク源泉およびその影響度を把握する
  - むしろ、こちらの目的が本来は重要である
  - 単なるリスク計測目的を超えたシナリオ構築への展開

## シナリオ作成のステップ

1. ボトムアップ見地からのデータ収集
   - 損失事故データ
   - ◎業務単位ごとの作業量全体に関する統計データ
2. 外部事例の収集と整合性チェック・スケーリング
3. シナリオ作成

# シナリオ作成（３）

- ボトムアップ見地からのデータ収集
  - シナリオ作成のためにも、まず内部データの収集・整備は不可欠
  - 内部の状況を把握せずして、適切なシナリオ構築は不可能
  - 損失事故のデータは当然であるが、シナリオ作成のためにはむしろ業務単位ごとの作業量全体に関する統計データが必要
  - 例えば、業務単位ごとに
    - その業務の作業項目
    - その業務に実際に対応する従業員の時間あたりと経験年数
    - 各作業項目１単位あたりの作業工程数・作業時間

    といった業務の構成要素ものをきちんと把握する
  - 業務間に強い関係性がある場合は注意を払う必要がある
  - そのうえで
    - 過去の事故事例と上記の要素のひも付け
    - 事故の発生日時、直接損害額の概算、間接的長期的影響の判断

    を行い、損失データベースとして記録する

# シナリオ作成（4）

- 外部事例の収集と整合性のチェック・スケーリング
  - 金融機関の事例に限らず、巨額損失に至った外部事例は背景や結果を含めて、シナリオ作成の参考にするのが望ましい
    - 人為的ミスは金融業務の特性に因るところも大きいかもしれないが、疲労や過信といった一般的要因で考えることもできる
    - 同様にシステムエラーも金融関係のシステムの特殊性もあるかもしれないが、安定性にはいわゆるバスタブ曲線のような傾向があるとも考えられる
  - 整合性チェックは、収集した外部事例の背景や原因が自行で起こる可能性がどの程度あるかをチェックする目的で行う
  - スケーリングは、外部事例の損失額を自行の作業量や取引額を勘案して調整するのが望ましいときに行う。保守的な立場であれば損失額が大きくてもそのまま利用してもかまわないと考える

# シナリオ作成（5）

- シナリオ作成
  - 作成作業自体はリスク管理部署でも、作成責任は経営陣が負うべきと考える
  - スケーリングした外部損失データについて、発生頻度を対応させる
    - 最低限、「何年に1回」という発生頻度の見積もりが必要
    - システムエラーのようにシステム運用開始からの経過時間と関連させるようなことも可能
    - 同時あるいは連鎖的に発生する可能性があるものについても考慮してみる
  - 定量データとしては最低限、以下の4つの項目に注目することになる

    ・ビジネスライン　・イベントタイプ　・損失額　・発生頻度
  - さらに可能であれば
    - 依存関係など

# シナリオ作成（6）

- シナリオ作成（具体例と解釈）
  - 例えばあるセル（ビジネスラインとイベントタイプの組合せ）上で「想定損失額が10億円で、20年に一度程度の発生可能性がある」というシナリオを設定した
    - 「想定損失額が5千万円で、1年に一度程度の発生可能性がある」というのとは全く意味が異なる
    - そのセルの1年あたり平均事故件数が50件とした場合、20年間で約1000件の事故が見込まれ、そのうちの1件（ワーストケース）が損失10億円になると解釈
      - 事故発生時の損失額が10億円超になる確率が0．1％程度という解釈が自然だと考える
      - 逆にいうと、そのセルについての99.9％VaRを天下り的に10億円と定めていることになるのでは？
    - 「○○年に一度」という見込み頻度の与え方よりは、ボトムアップ分析から「処理件数○○件に一度」とか「作業時間△△に一度」のような与え方ができる方が理想的である
      - 事故発生パターンを「失敗学」のような立場から分析する試みなどが考えられる
      - 働き過ぎや油断がミスにつながる？
      - 導入直後のシステムは不安定？
      - ビジネススタイルの変更予定などは？

# シナリオ作成（7）

- シナリオ作成（利用の仕方）
  - シナリオ・データをどのように利用するか
    - 良いシナリオが作成できるようなリスク監査体制があること自体が、リスク管理上大きな財産とも言える
    - 相関性などを盛り込みストレステスト的に極端なケースを考える
    - 内部データと組合せて1件あたり損失額分布の推定を行う
      - 両者を同等な立場で利用するのは抵抗がある
    - 提案したい方法は（統計的に認知されているとは言えないが）
      - まず内部データを損失額について昇順に並べ、対応する累積経験分布に基づく確率を各損失データに付与
      - シナリオデータは、損失額と対応する見込み発生確率が与えられることを想定しているので、損失額と見込み発生確率のペアの形で内部データと融合させる
      - 融合させたデータセットに対して、損失額分布の推定を行う。ただし、その際にシナリオデータと推定された結果にズレが発生する可能性があることに注意

# 極値理論を用いたシナリオ活用法の一案（1）

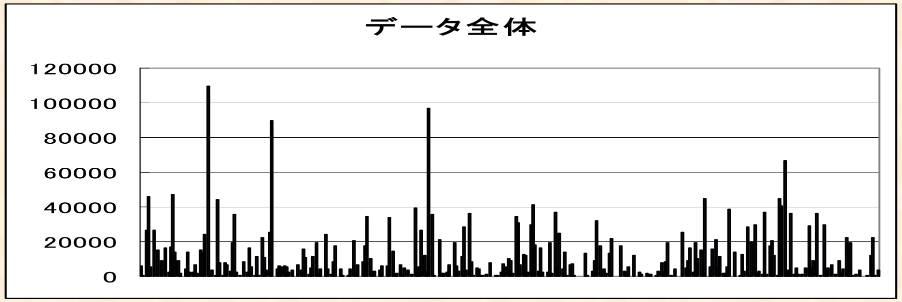
- VaRをリスク尺度として考える場合、大きな影響を与えるのは、低損失額の事故よりも、頻度は少ないかもしれないが「巨額」な損失事故である
- その場合、損失額分布全体の精緻なモデル化よりも、分布の右裾部分に問題意識を特化する方が合理的とも思える

↓

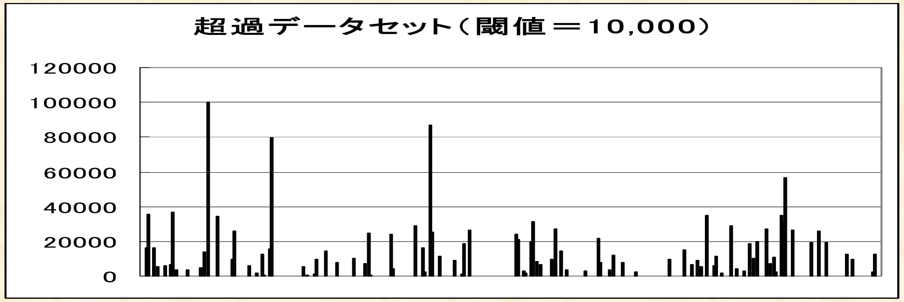
- 極値理論(Extreme Value Theory, EVT)の応用。
- オペレーショナル・リスクの計量化を統計的アプローチの観点で論じている論文において、1つの潮流を形成。
- 今回はPeak-over-Threshold(POT)アプローチと呼ばれる方法を応用したモデルを紹介

# 極値理論を用いたシナリオ活用法の一案（2）

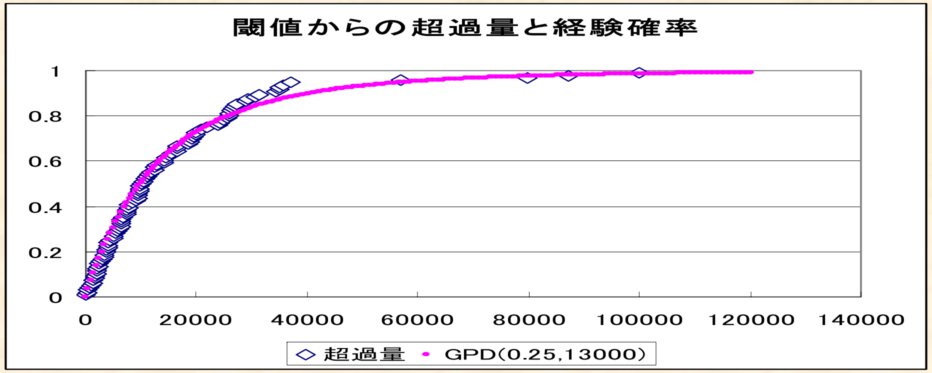
POTアプローチのイメージ




あるデータセットに対し、閾値を10,000と設定して、それを超えるデータだけを対象にする。




閾値10,000からの超過量を表示




超過量を昇順に並べて、それに適当な確率を割りあてて、超過量の経験分布を作成する。（図の◇）

その超過量の経験分布を一般パレート分布(GPD)で近似する。

# 極値理論を用いたシナリオ活用法の一案（3）

- 一般パレート分布（Generalized Pareto Distribution）の分布関数

$$G(x;\xi,\beta)=\begin{cases}1-\left(1+\dfrac{\xi}{\beta}x\right)^{-\frac{1}{\xi}} & (\xi\neq 0)\\ 1-\exp\left(-\dfrac{x}{\beta}\right) & (\xi=0)\end{cases}\qquad \begin{cases}x\geq 0 & (\xi\geq 0)\\ 0\leq x\leq -\dfrac{1}{\xi} & (\xi<0)\end{cases},\ \beta>0$$

  – $\xi$ が大きくなるほど裾が厚くなる（ $\xi>1$ では平均すら存在しない）

- （$u$ に対する）超過分布関数

$X$: 事故発生時の損失額を表す確率変数として：

$$P(X-u\leq x\mid X>u)=\frac{P(X\leq x+u)-P(X\leq u)}{P(X>u)}$$

# 極値理論を用いたシナリオ活用法の一案（4）

- 理論的には、元々の損失額の分布が（ある条件を満たしていれば）どのような分布であっても、十分大きな閾値 $u$ に対する超過分布関数をGPDで近似できる

$$P(X-u \le x \mid X>u) \approx G(x;\xi,\beta) \qquad \text{for } x>u$$

  - もっともどの程度の u であれば良いか、ということまでは理論は示さないので、閾値の決め方は慎重に行うべき
  - 慎重を期すためには、Kolmogorov−Smirnov や Anderson−Darling などの適合度検定を実施して高損失データの経験分布とGPDの分布としての適合性をテストするのが望ましい

# 極値理論を用いたシナリオ活用法の一案（5）

- GPDのパラメータ推定法をどうするか・・・
  - 最尤法
    - サンプル数が多ければ、推定量は理論的に望ましい性質をもつが、小サンプルや同じ数字が固まるような場合は？
    - シナリオを利用して推定することを考えた場合、内部データと同等の扱いにしてしまうと単純に適用するのが難しい
  - モーメント法
    - データ数が少ない場合のパラメータ推定法として利用されるケースが多い
    - 仮定する分布によっては、高次のモーメントが存在しない場合もあるので適用できない場合もある。（例：GPDでξ＞1の場合など）
    - シナリオを利用して推定することを考えた場合、内部データと同等の扱いにしてしまうと単純に適用するのが難しい
  - 最小二乗法（推定というよりキャリブレーション）
    - 等ウェイトで考えた場合、全体としてのフィット感は高まるが、リスク管理上重要な低頻度・高損失部分でのかい離がむしろ大きくなることも起こりうる。
    - シナリオを利用する場合、内部データとは「経験累積確率」の大きさで区別されることになる

# 極値理論を用いたシナリオ活用法の私案（6）

- 確率ウェイト・モーメント法（Probability-Weighted Method of Moments)
  – ある大きな値に対して、想定する確率分布から計算される「その値を超える値が出る確率（非常に小さいはず）」のべき乗で重み付けした期待値を計算して、実際のデータから同様に計算したものと対応させて、モーメント法のようにパラメータを方程式の解として求める方法
  – 高次モーメントが存在しない場合にも対応。小サンプルの場合に経験的に有効であるという報告もある
    - ただし、下のような期待値が具体的に計算できないと適用は難しい。

$E[Z(1-F(Z;\theta))^r]$（$Z$:確率変数, $F$:$Z$が従う分布関数）

  – 「経験累積確率」の決め方が結果に影響を及ぼす（恣意性が残る）
    - 外部データの発生頻度の評価とも関係する
    - シナリオを組み入れて推定した結果は、元のシナリオとズレが生じる可能性がある

# まとめ（１）

- 最適な「分布」×「推定法」の組合せを一般論で示すことはできない
  - 統計的な理論で裏付けするのは難しい
  - 絶対的な規準があるわけでもない
    →過去の水準と比べて、同程度が良いのか、過大評価するのがいいのか

- 外部事例やシナリオを利用した損失額分布の推定の難しさ
  - スケーリング、発生率の評価を適切に行えるか？
  - 巨額損失事例を適用すると、推定のプロセスで非常に大きなインパクトがあり、モデルを度外する結果になることも

# まとめ（2）

- モデルの完成型はおそらく・・・無い
  - オペレーショナル・リスク計量モデルについての議論を継続的に行っていくことで、少しずつ改良されていくことになるだろう
  - ビジネス・プロセスを精査するとともに、失敗学や心理学、システム理論などに基づくエラー予測なども取り入れていくべき
  - 結局は、事故事例データの分析を定性的にも定量的にも十分に行っていく必要がある。個々の金融機関の問題としてではなく、業界全体の問題として智恵を共有していく体制が必要だろう

# 参考文献

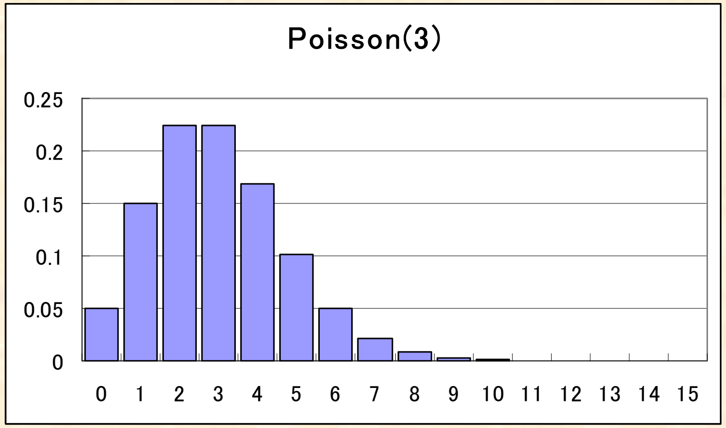

- Embrechts, P., Klüppelberg, C., Mikosch, T., “Modelling Extreme Events”, Springer (1997)
- Embrechts, P., Furrer, H., Kaufmann, R., “Quantifying Regulatory Capital for Operational Risk. Derivatives Use”, Trading & Regulation 9(3), 217-233 (2003)
- Frachot, A., Georges, P., Roncalli, T., “Loss Distribution Approach for Opérational Risk”, Working Paper, Groupe de Recherche Opéraionnelle, Crédit Lyonnais (2001)
- King, J. L., “Operational Risk: Measurement and Modelling” , John Wiley & Sons(2001)
  – 齋藤治彦・小黒直樹訳「オペレーショナルリスク管理」, シグマベイズキャピタル(2002)
- 三菱信託銀行オペレーショナル・リスク研究会, 「オペレーショナル・リスクのすべて」, 東洋経済新報社(2002)

# 参考：ポアソン分布

- ある事象が k 回発生する確率：

$$P(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \qquad \lambda > 0$$

- 事象の発生率が低く、独立した要因で発生する場合の実証発生頻度モデルとして利用されている。
- 平均・分散がともに、強度パラメータ $\lambda$ で表される。
- $\lambda(t)$ のように強度パラメータを時間依存させたり、外部データの推定値を利用したりという拡張の方向性が考えられる。
  - 季節性、新規業務立ち上げ、業務拡張などを考慮。

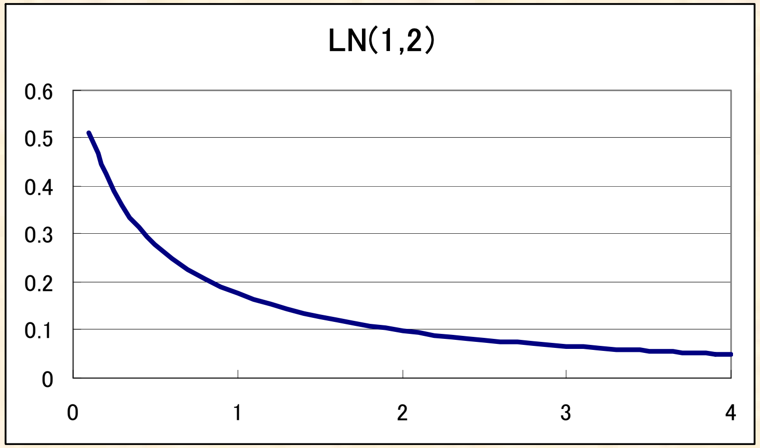


# 参考:対数正規分布

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}\exp\left\{-\frac{(\log x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

$$F(x;\alpha,\beta) = N\left(\frac{\log x-\mu}{\sigma}\right) \qquad x>0,\ \ \sigma>0$$

- 金融工学で将来の株価の分布などに利用されている。
- テールが厚い分布のモデルとしては、取り扱いやすい。

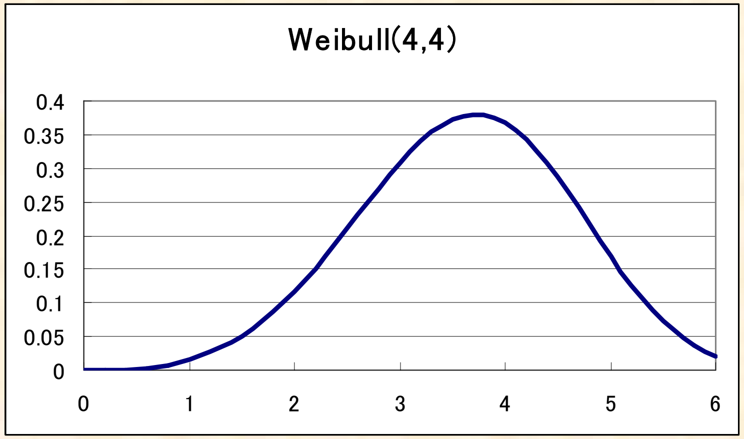


# 参考：Weibull分布

$$f(x;\alpha,\beta) = \frac{\alpha}{\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right\}$$

$$F(x;\alpha,\beta) = 1-\exp\left\{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right\} \qquad x \geq 0,\ \alpha > 0,\ \beta > 0$$

- 生存時間解析等で利用されている。
- 密度関数は、$\alpha$ は大きいほど尖りがきつくなり、$\beta$ は小さいほど変化の度合いが大きくなる傾向がある。

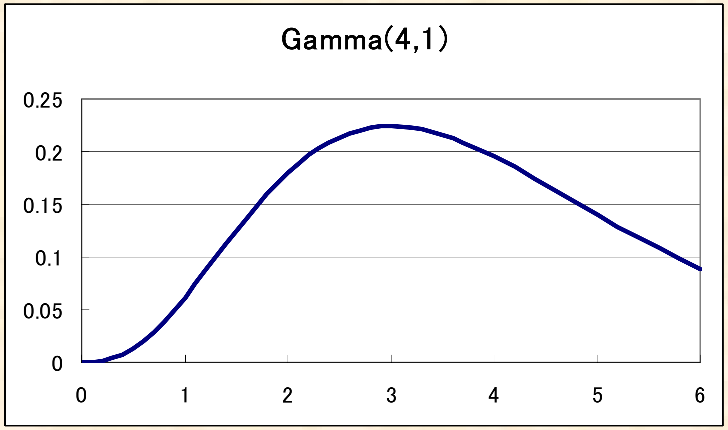


# 参考：Gamma分布

$$f(x;\alpha,\beta)=\frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}\exp\left(-\frac{x}{\beta}\right) \qquad x\geq 0,\ \alpha>0,\ \beta>0$$

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty}e^{-u}u^{x-1}du$$

- 生存時間解析等で利用されている。
- 密度関数は、$\alpha$は大きいほど尖りが緩やかで裾が厚くなる傾向がある。



# 参考：POTアプローチ（１）

全体に対する分布関数を$F(x)$とする。（$F(x)$はいくつかの条件を満たす必要があるが、有名なものはほとんど問題ない）

閾値を$u$として、$u$に対する$H$の超過分布関数

$$F_u(x) = \frac{F(x+u) - F(u)}{1 - F(u)}$$

を考える。

このとき、$F_u(x)$は、$u \to x_F$ :理論上の端点

のとき、ある$\xi, \beta$に対して$GPD$:

$$G(x;\xi,\beta) = 1 - \left(1 + \frac{\xi}{\beta}x\right)^{-\frac{1}{\xi}} \quad (u < x < x_F)$$

で一様に近似できることが知られている

# 参考：POTアプローチ（2）

ここで、$x > u$に対しては、

$$F(x) \approx (1 - F(u))G(x-u;\xi,\beta) + F(u)$$

と近似式で表せる。

全体のデータ数を$N$、そのうち閾値$u$を超えるものの数を$n(u)$と

すると、$F(u)$は$1 - \dfrac{n(u)}{N}$で近似できる。

これを用いて

$$F(x) \approx 1 - \frac{n(u)}{N}\left(1 + \xi\frac{x-u}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}} \qquad (x > u)$$

と近似することになる。

# 参考：POTアプローチ（3）

◎ GPDに対する確率ウェイト・モーメント法(PWM)を用いた推定法

$F(x;\xi,\beta)$をGPDの分布関数とする。

$Z$をこの分布関数に従うとする確率変数とする。

このとき、自然数$r(r+1-\xi>0$を満たすもの）に対し、

$$E[Z(1-F(Z;\xi,\beta))^r]=\frac{\beta}{(r+1-\xi)(r+1)}$$

という式が成り立つことに注意。

一方、$x_1,\cdots,x_N$というデータ（昇順に整序されているとする）が

GPDに従うと仮定する。ここで、

$$\hat{w}_r=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}x_n(1-F(x_n;\xi,\beta))^r$$

# 参考：POTアプローチ（4）

ここで、(0,1)上の一様乱数列$U_1 \cdots, U_N$（昇順に整序されたものとする）をとると、

$$(F(x_1;\xi,\beta),\cdots,F(x_N;\xi,\beta)) \overset{(d)}{=} (U_1 \cdots, U_N)$$

と言う性質が成り立つことが知られている。(Quantile transformation lemma)

よって、

$$\hat{w}_r = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n (1-U_n)^r$$

と見なすことができる。

実際には簡便的に、一様乱数列のかわりにPlotting points;

$$p_n = \frac{N-n+0.5}{N} \quad \text{または一般に} \quad p_n = \frac{N-n+\delta_n}{N+\gamma_n}$$

というような適当な値を付与することがある。

# 参考：POTアプローチ（5）

最終的には

$$\hat{w}_r = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n (1 - p_n)^r$$

を【標本確率ウェイト・モーメント】と見なし、理論値と方程式を作り、その解を推定値とする。

今回の分析では、$\xi < 1$（すなわち平均の存在）を仮定し、$r = 0,1$として方程式を作った。推定値は

$$\xi = 2 - \frac{\hat{w}_0}{\hat{w}_0 - 2\hat{w}_1}, \quad \beta = 2 - \frac{2\hat{w}_0 \hat{w}_1}{\hat{w}_0 - 2\hat{w}_1}$$

として得られる。