

日本銀行 金融高度化センター ワークショップ  
「リスク計測の高度化～テイルリスクの把握～」説明資料1

# 切断安定分布による資産収益率の ファットテイル性のモデル化と VaR・ESの計測手法における モデル・リスクの数値的分析

2013年2月28日

日本銀行 金融機構局 金融高度化センター  
磯貝 孝

# 要旨

## (分析の枠組み)

- 日経平均株価の日次収益率の母分布を切断安定分布として推計
- 同分布からのランダム・サンプリングに基づく数値シミュレーション
  - 一般的な計測手法(正規分布近似、一般化パレート分布(GPD)近似、ヒストリカル法、カーネルスムージング)によるリスク量(VaR、ES)の計算精度をサンプルサイズ・信頼水準別に比較
  - VaRでは捉えきれないテイルリスクをみるため、同一信頼水準におけるES/VaR比率にも注目

## (分析結果)

- 正規分布近似は、計算精度が低い(特にESの過小推計)
- その他の手法は、概ねベンチマークに近かったが、小サンプル、高信頼水準ではリスク量計算が安定しないケースもみられた。
  - ES/VaR比率は、ヒストリカル法、カーネルスムージングについては、概ねベンチマークの動き(信頼水準の上昇につれて1へ近づく)

## (金融機関のリスク管理実務との関連)

- 本稿の分析から、確率分布の想定、信頼水準、データサイズ、計算の容易さなどの観点からのリスク量計測の手法に関する多角的な比較分析の重要性が改めて確認された。

# 1. はじめに(問題意識、概要)

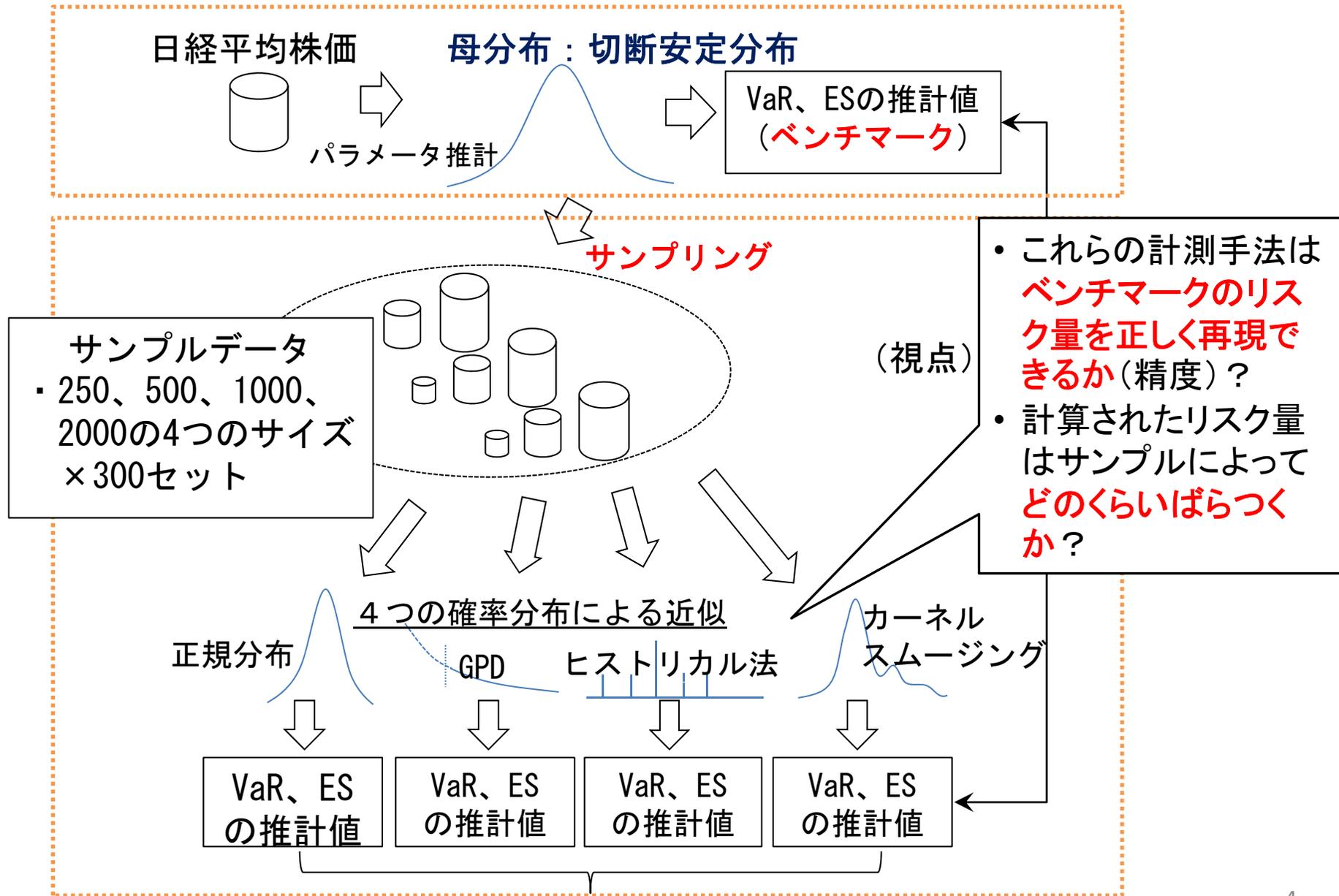
- 価格変動のテイルリスクをリスク指標でどの程度把握し得るか ⇒ 数値シミュレーションで確かめる

(分析対象)

バーゼル委もトレーディング勘定の  
リスク指標として、ESの採用を検討

- リスク量の指標: **VaR**、**ES** (Expected Shortfall、期待ショートフォール)
- 計測手法: **正規分布近似、一般化パレート分布近似、  
ヒストリカル法、カーネルスムージング**
  - **ベンチマーク**: 2008年～2012年央の日経平均株価(日次対数収益率)から推計した母分布(切断安定分布)からVaR、ESを計算
  - **ランダムサンプルを用いたシミュレーション**: 同分布から複数のサンプルデータセットを得て、これに対して上記4手法を用いてリスク量を複数の信頼水準について計算。
  - **ベンチマークとの比較+手法相互に比較** ⇒ リスク量計算の正確性  
・ばらつきなどを手法毎に分析、留意点を整理 + **VaRでは捉えきれないテイルリスク**をみるために、**ES/VaR比率**を比較。

# 分析の概要

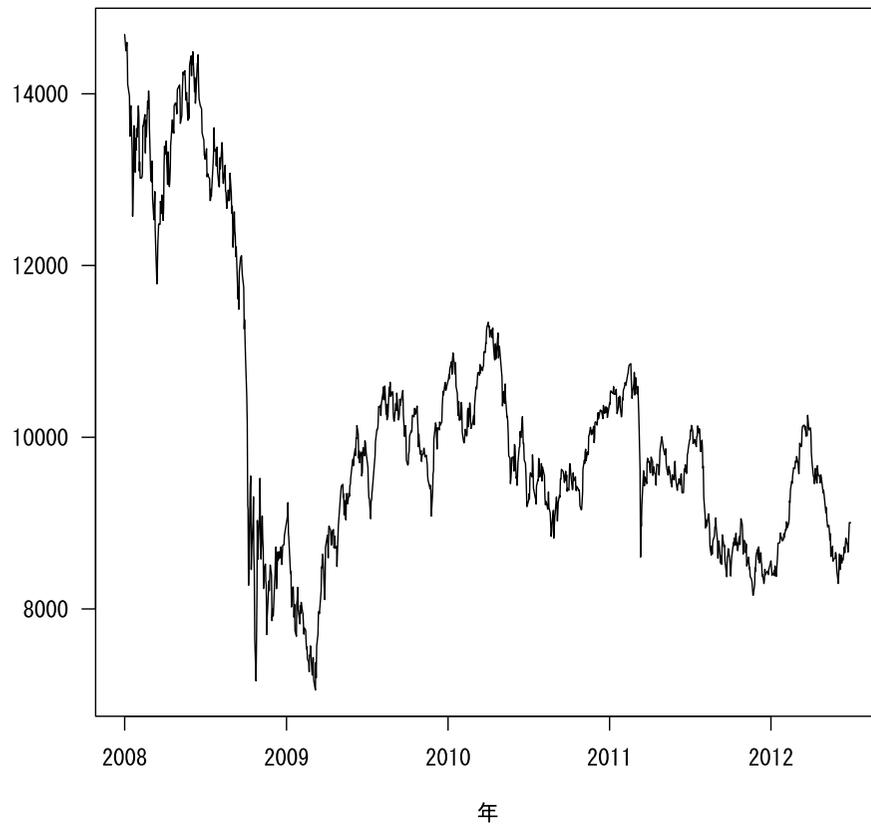


・ 各セットともサンプルサイズ別 × 信頼水準別に計算

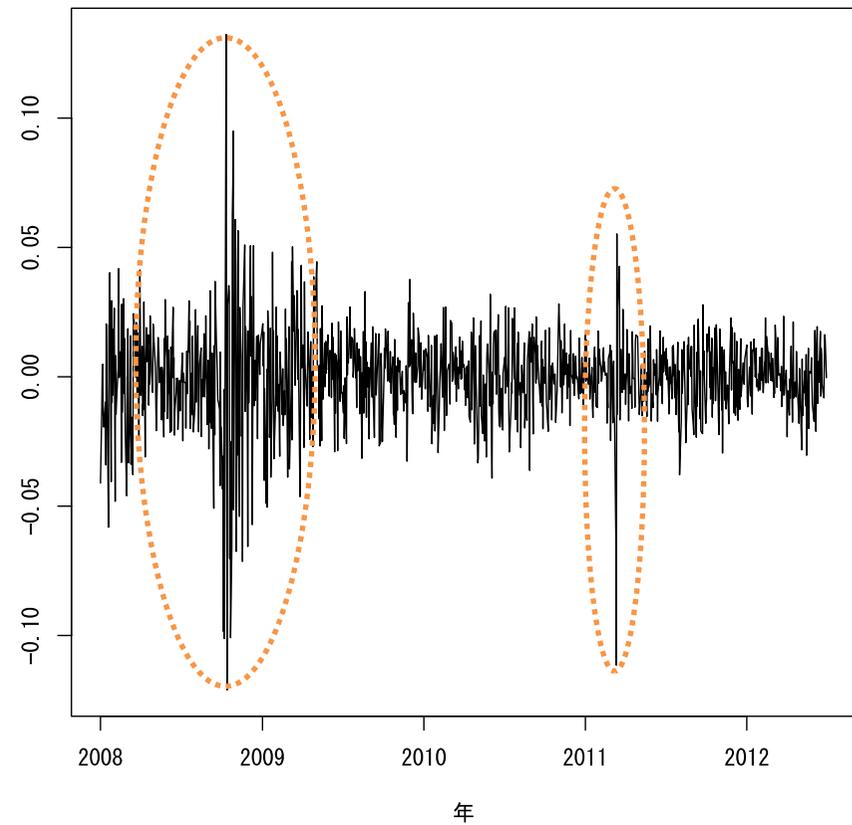
## 2. 収益率変動の捉え方とリスク指標

### 一日経平均株価の日次収益率

日経平均株価

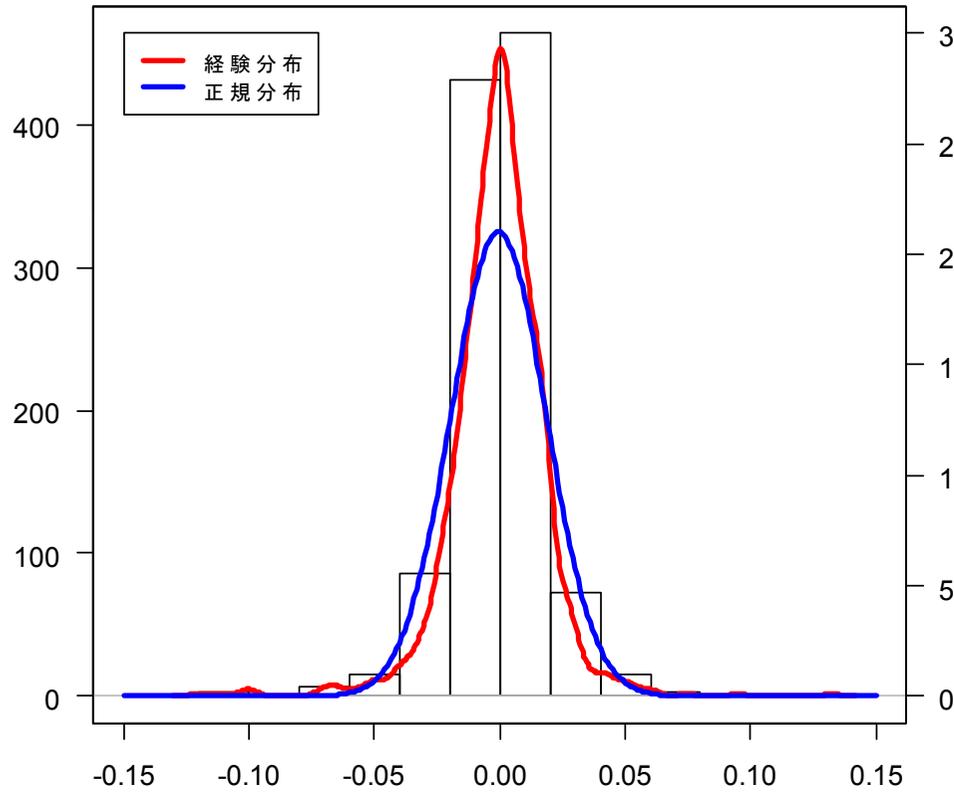


日経平均株価 (対数収益率)

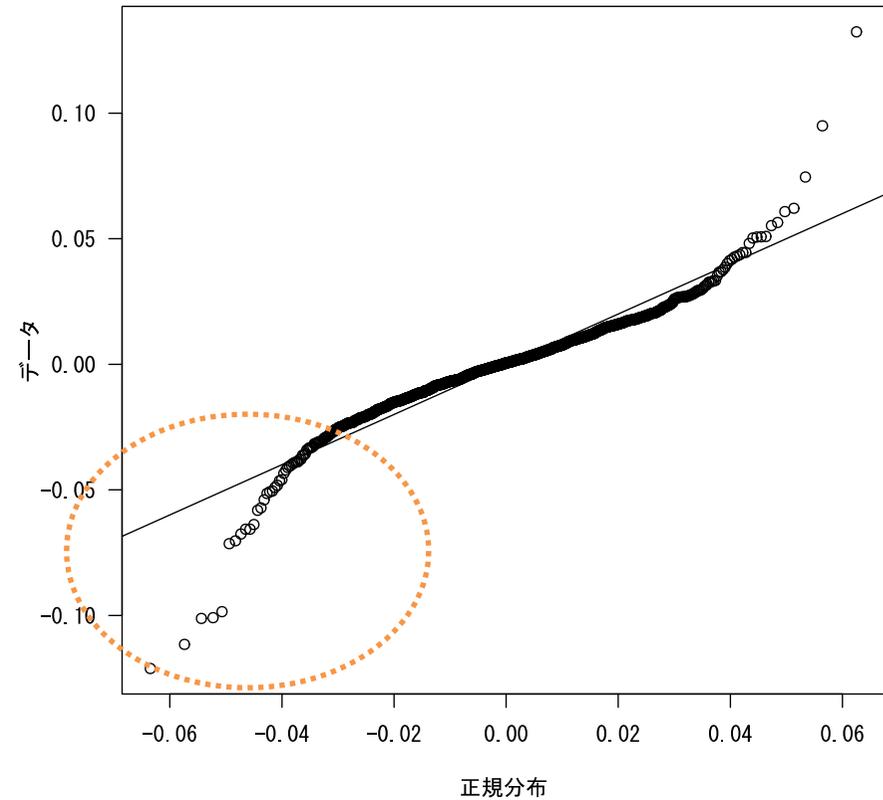


# 日経平均株価の密度関数とQQプロット

日経平均株価のヒストグラム(左軸)、密度(右軸)



日経平均株価指数のQQプロット



〔 赤線で示した経験分布の密度関数はカーネルスムージングによって推計したもの 〕

株価の日次収益率の分布は、正規分布とは言い難い(ファットテイル性の存在)

# 条件付きモデルと無条件モデル

- VaRやESなどのリスク指標を計算するには、価格変動の分布の想定が必要
- 問題: **ファットテイルな分布をどう「特徴付け」ればいいのか、裾部分(テイル)のあてはまりがよいものを探すのが難しい。**

① **条件付きモデル** ⇒ 時間の変化によって収益率変動に影響する要因を特定した条件付きの分布を想定  
(例) GARCHモデル: ボラティリティの変動を考慮

② **無条件モデル** ⇒ 時間の変化に影響されない無条件の損失分布を想定、中長期のリスク把握向き  
(例) 一般的なヒストリカル法、分散共分散法など  
〈収益率データを直接リスクの計測対象とする〉

こちらを対象に分析する  
⇒ **どのような分布を選べばよいか、その根拠は？**

### 3. 収益率変動のモデル化：安定分布と切断安定分布

「収益率 $X$ が安定分布に従う」とは、

ある自然数 $n$ があつて、 $X$ の $n$ 個の部分和が $X$ と同じ分布に従う

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n, S_n \stackrel{d}{=} C_n X + D_n$$

$X_1, \dots, X_n$  は独立同一分布に従う (i.i.d.) な確率変数

$\stackrel{d}{=}$  は確率分布が同一であることを示す

安定分布の密度関数  $f(X; \alpha, \beta, \gamma, \delta)$  :  $\alpha$  形状,  $\beta$ : 歪度,  $\gamma$ : 尺度,  $\delta$ : 位置

#### ■ スケーリングが可能

- ・日次→週次などの保有期間調整後も調整前の分布と同じ分布に従う

#### ■ 安定分布はファットテイル性を表現可能

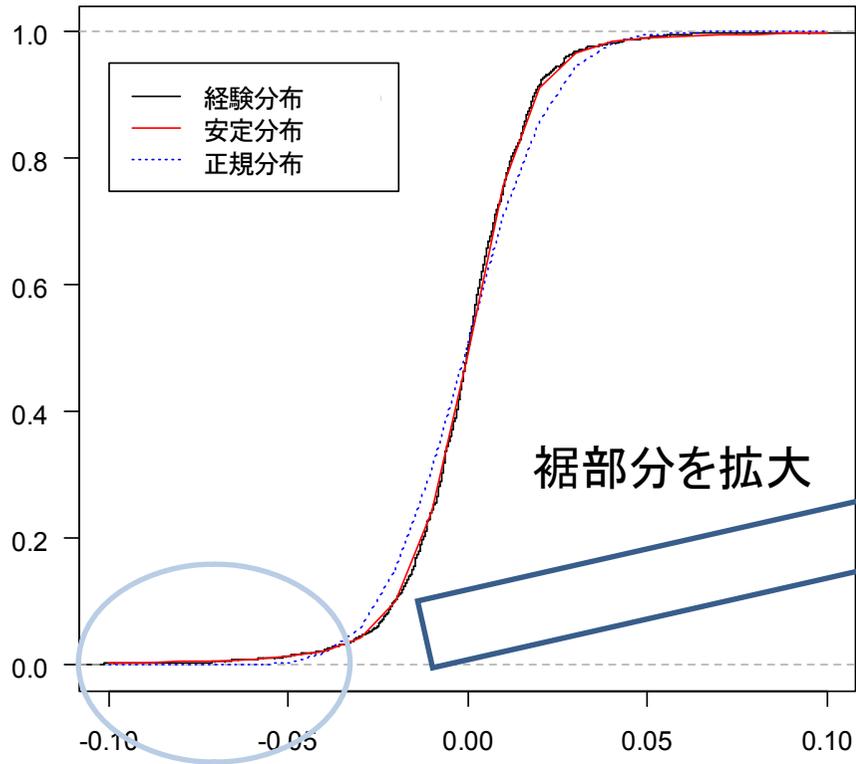
- ・任意の分布は安定分布に収束(一般化中心極限定理)
- ・ただし $\alpha=2$ のときは正規分布

#### ■ $\alpha < 2$ では分散が存在しない(リスク量計算が困難)

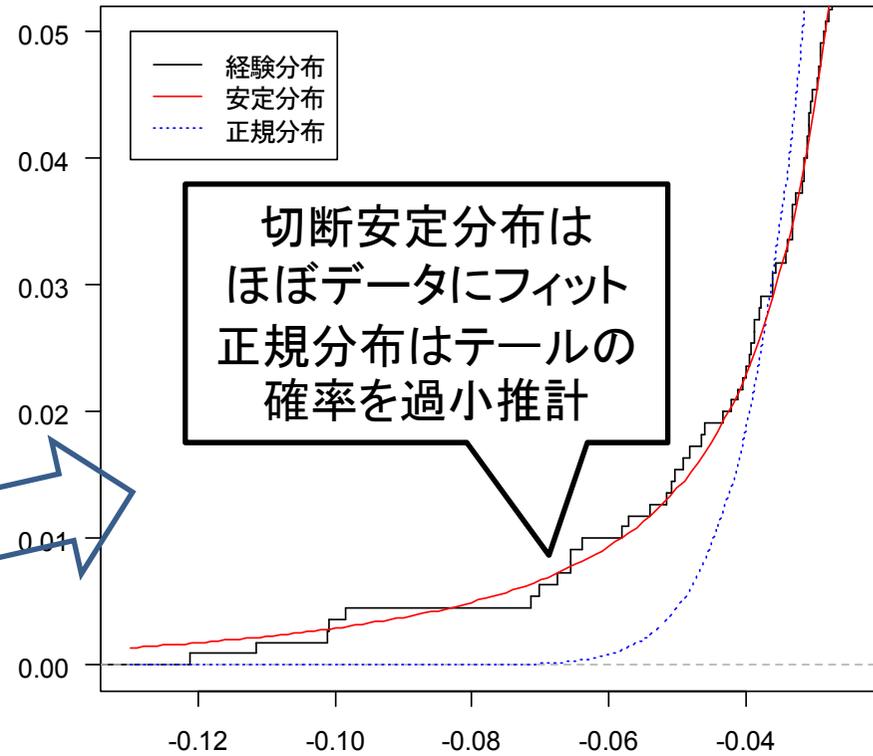
- ・分布の裾を閾値(前日比 $\pm 20\%$ 、便宜的な水準設定)で切断した  
「切断」安定分布で代用する(現実的な対応)

# 株価収益率の分布関数の切断安定分布によるモデル化

分布確率の比較



経験分布、安定分布、正規分布の分布確率

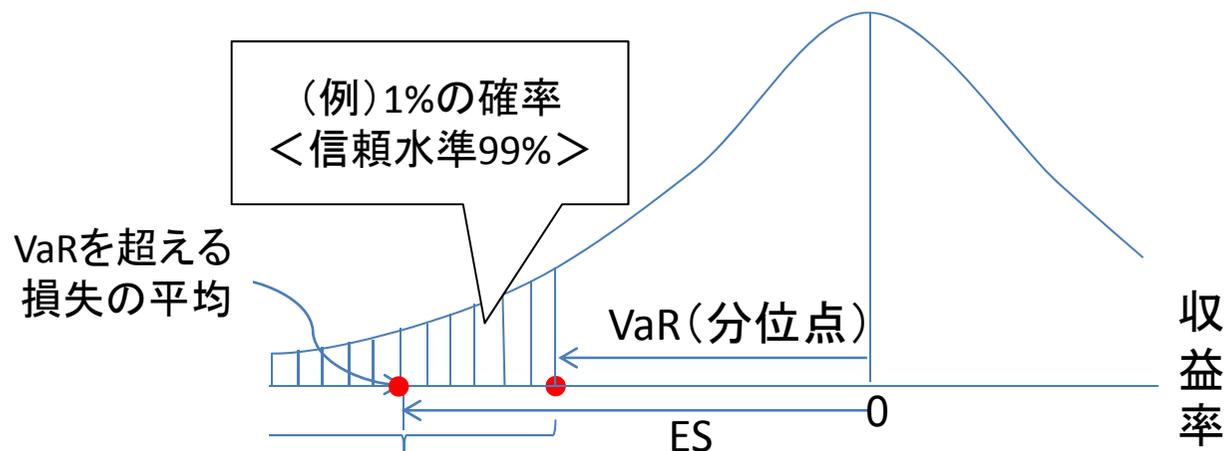


Kolmogorov-Smirnov 検定	D 値 0.016	$p$ 値 0.924
-----------------------	-----------	-------------

Anderson-Darling 検定	A-D 値 0.230	$p$ 値 0.979
---------------------	-------------	-------------

(帰無仮説はいずれも「データが切断安定分布に従う」)

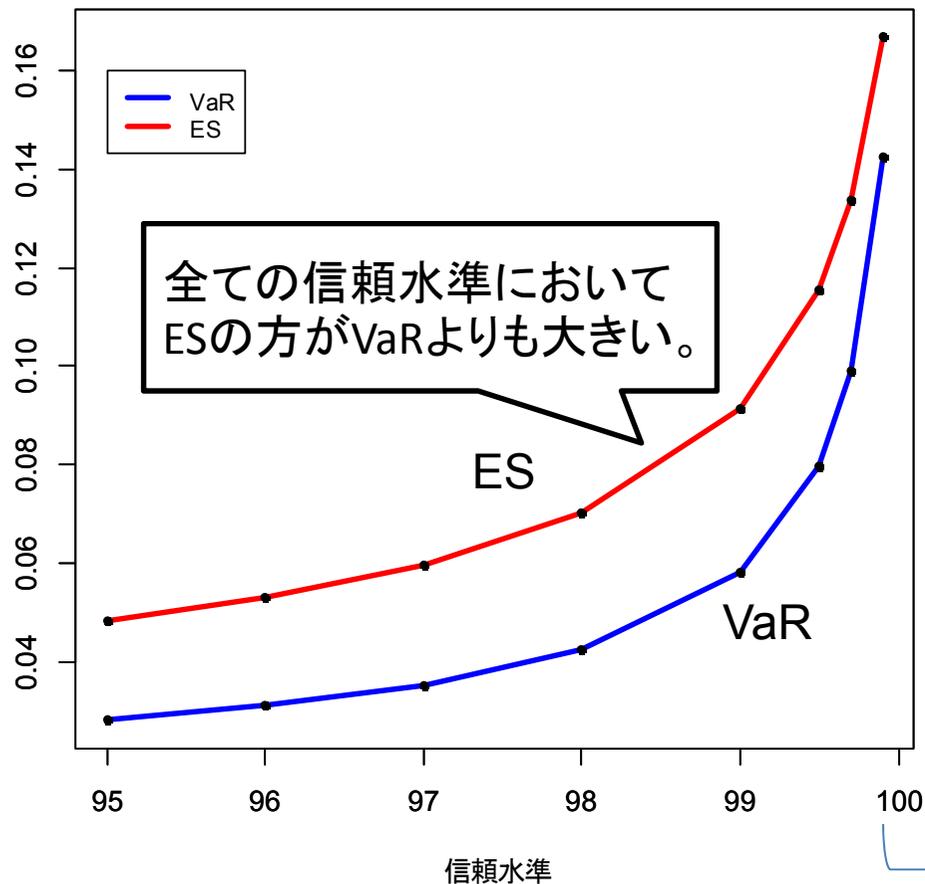
# リスク指標 (VaR・ES) の定義



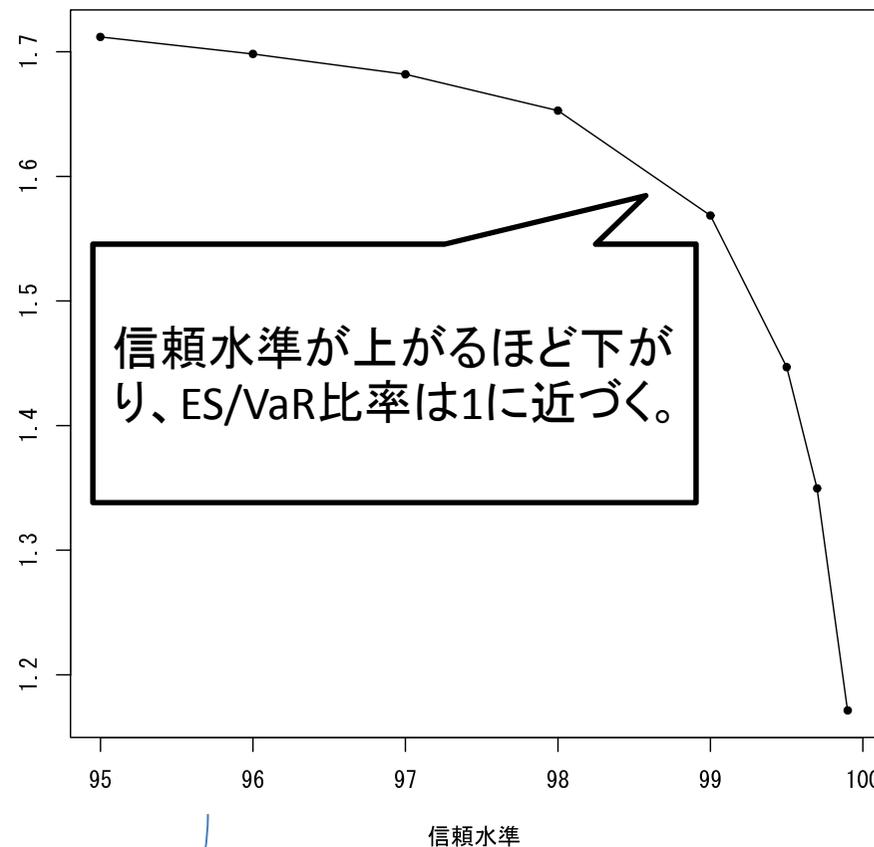
- VaRは、収益率変動の確率分布に関する一定の信頼水準に対応した分位点に相当する。対象とするデータが同じでも、**想定する確率分布が異なればVaRも当然異なる。**
- ESは、VaRを超える損失の期待値。VaRと同様、**ESも想定する確率分布に依存する。**
  - 期待値の計算には、想定した確率分布の密度関数が用いられる。
- ESは、定義により同一の信頼水準において常にVaRよりも大きな数値を取ることから、**より保守的なリスク指標**とされる
  - バーゼル委では、トレーディング勘定のリスク指標としての採用を提案している

# 切断安定分布から計算したVaR・ES、ES/VaR比率

切断安定分布のVaR、ES



切断安定分布のES/VaR比率



- 信頼水準が上がるほど、VaR、ESともに値が大きくなり、特に信頼水準が99%を超えるとVaR、ESとも急激に大きくなっている。

シミュレーションでの  
**「ベンチマーク」**

## 4.ランダム・サンプルに基づくリスク量計算の 数値シミュレーション

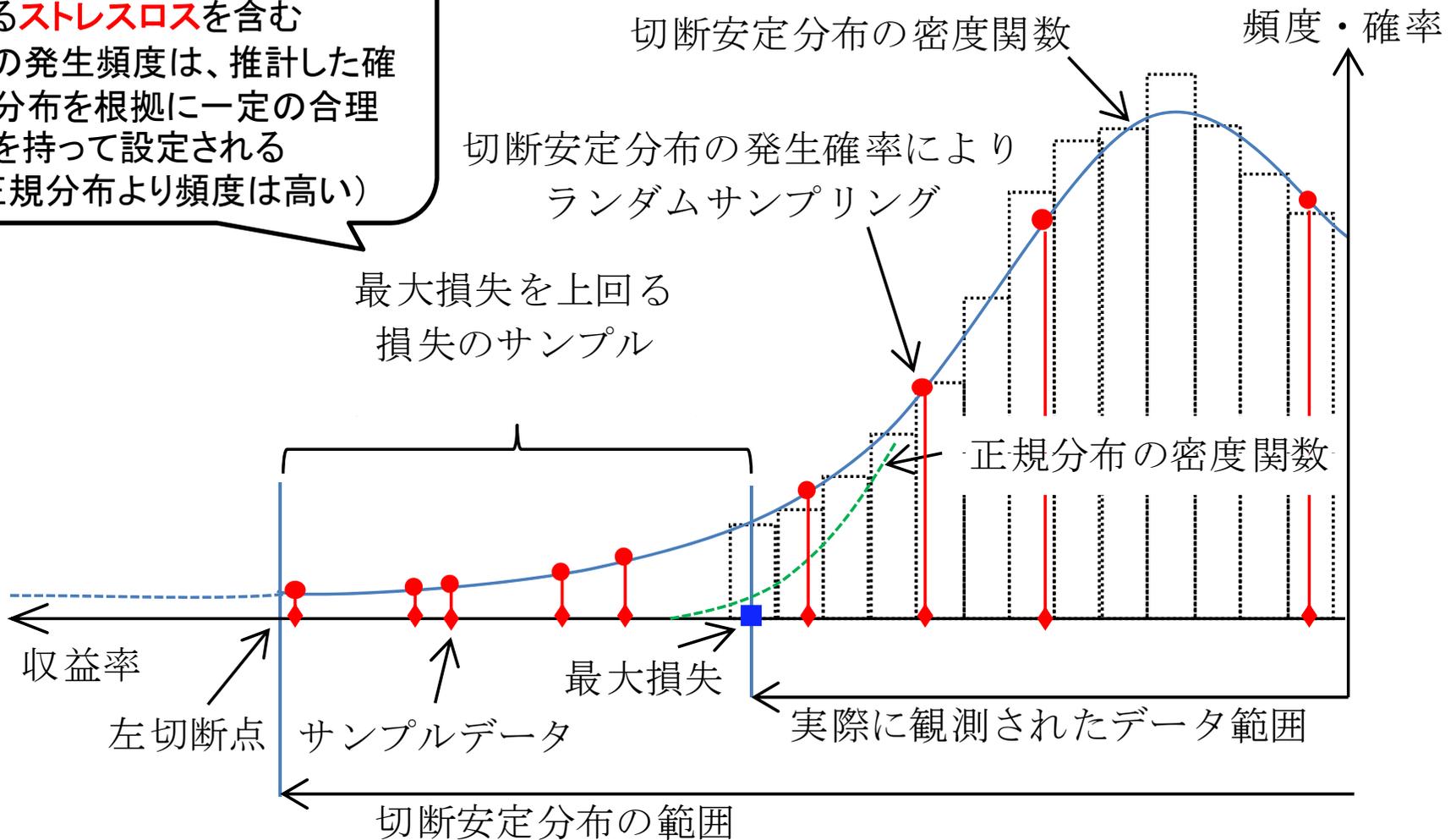
- 切断安定分布のVaR、ES ⇒ ベンチマーク
- ランダムサンプリングにより**ファットテイル性の強い複数のサンプルデータセット**を生成
- 一般的な4つのリスク計測手法（正規分布近似、GPD近似、ヒストリカル法、カーネルスムージング）によりサンプルサイズ・信頼水準別にVaR、ESを計算

(分析)

- ① 推計したリスク量をベンチマークと比較し、**モデル・リスク(リスク量を誤って計測してしまうリスク)**の観点から考察
- ② 推計値の計測手法間の相互比較を通じて、各計測手法の特徴点や計算上の留意点などを明らかにする

# 切断安定分布からのサンプリングのイメージ

- 観測期間中の最大損失を超える**ストレスロス**を含む
- その発生頻度は、推計した確率分布を根拠に一定の合理性を持って設定される (正規分布より頻度は高い)



# 4つのリスク計測法

## 1. パラメトリック

- ①正規分布近似...平均と分散からVaR、ESを計算する
- ②GPD(一般化パレート分布)近似...極値理論を応用、閾値を超える損失の分布を推計し、リスク量を計算する
  - 閾値の設定**が必要。本稿では、**損失の上位10%**に設定

## 2. ノンパラメトリック

- ①ヒストリカル法...経験分布からリスク量を計算する
- ②カーネルスムージング...**確率分布の平滑化**(「カーネル関数」を複数組み合わせる)を行った上でリスク量を計算する
  - 「カーネルの種類」、「**バンド幅**」の二つを設定する必要。本稿では、ガウスカーネルと一般的なバンド幅の指定法を選択した。

計算上の諸設定は、なるべく一般的かつ単純なものとした ⇒ より複雑な設定で精度を上げることは可能

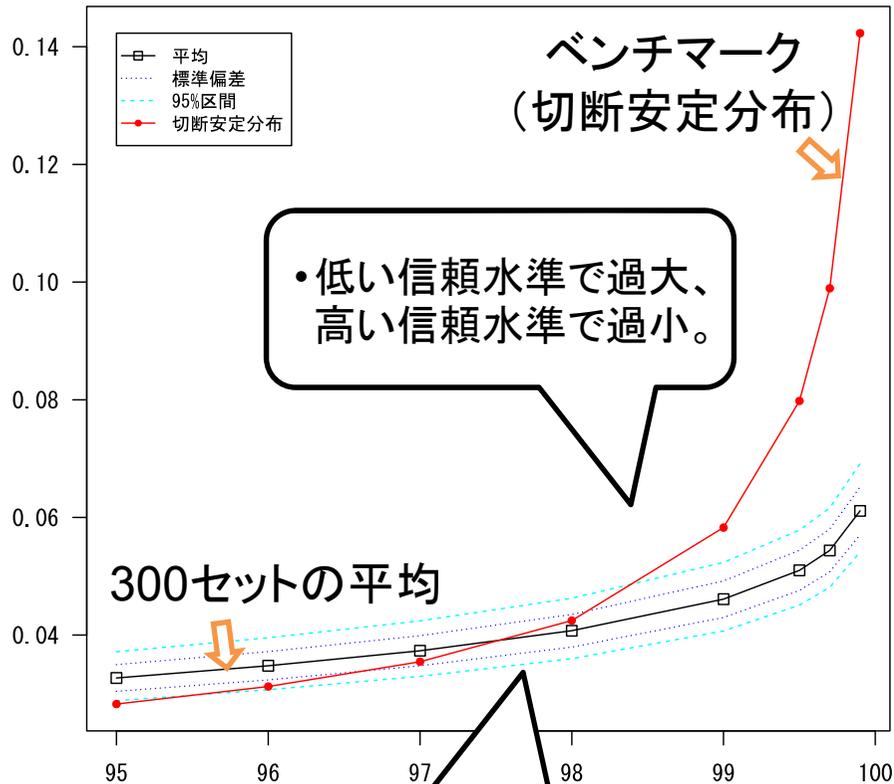
# ランダム・サンプルに基づくVaR・ESの推計結果と推計方法間の比較(まとめ)

		パラメトリック		ノンパラメトリック	
		正規分布近似	GPD近似	ヒストリカル法	カーネルスムージング
サンプル数の増加	<ul style="list-style-type: none"> <li>ベンチマークとの乖離は縮小しない</li> <li>多いほどばらつきは小さい</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>多いほどベンチマークに近く、ばらつきは小さくなる</li> <li>ES/VaR比率もベンチマークに近づく</li> </ul>			
信頼水準の上昇	<ul style="list-style-type: none"> <li>ばらつきへの影響は小さい</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>高いほどベンチマークからの乖離、ばらつきが拡大する傾向がある</li> <li>特に99%を超える水準で、乖離・ばらつきが目立つ</li> </ul>			
精度	VaR	<ul style="list-style-type: none"> <li>低い信頼水準で過大、高い信頼水準で過小</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>ほぼベンチマークに近い</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>ほぼベンチマークに近い</li> <li>小サンプルではVaR、ESとも高い信頼水準で最大損失に一致する場合がある</li> <li>ESはやや過小傾向</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>ほぼベンチマークに近い</li> <li>VaRはやや過大傾向</li> <li>ESはヒストリカル法の過小推計(左記)を補正し、よりベンチマークに近い</li> </ul>
	ES	<ul style="list-style-type: none"> <li>全信頼水準で過小</li> <li>高い信頼水準ほど乖離が拡大する</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>ほぼベンチマークに近い</li> <li>高い信頼水準では過大(*)</li> </ul>		
ばらつき	VaR	<ul style="list-style-type: none"> <li>VaR、ESの間で、ばらつきの傾向に差はない</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>ESのばらつきがより大きい</li> <li>(ESの変動係数は4手法中最大、サンプル数制約も影響)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>VaR、ESともほぼ同じ傾向</li> <li>ESの方が相対的にばらつきが大きい</li> </ul>	
	ES				

# 正規分布近似によるVaR、ES(抜粋)

## VaR

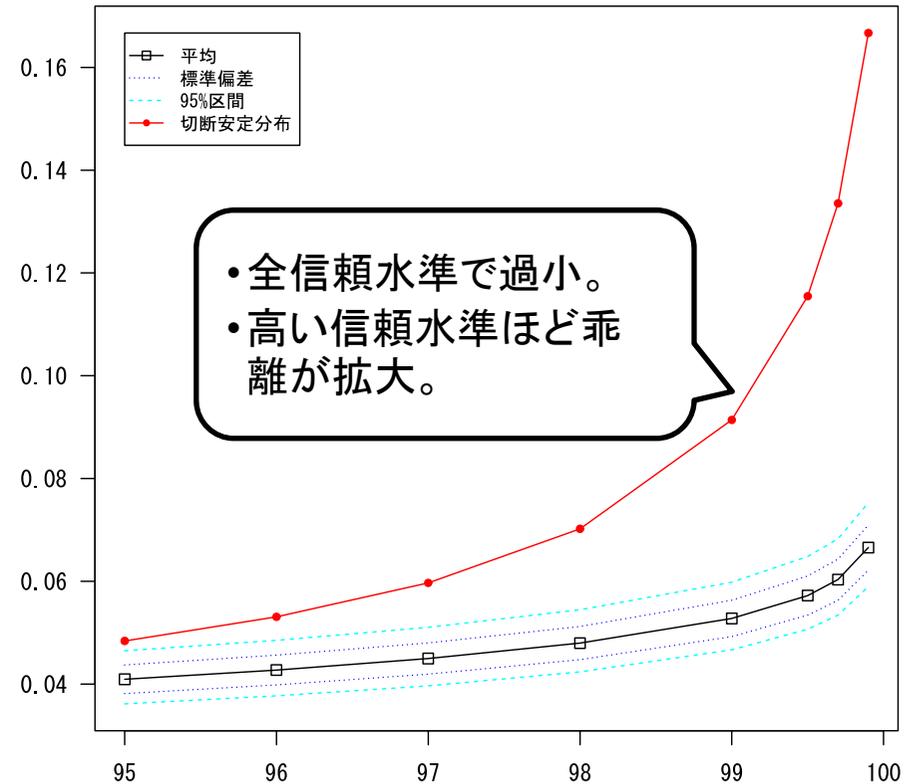
正規分布近似によるVaR  
(1000サンプル×300セットの平均)



97-98%の信頼水準では、リスク量が  
たまたまベンチマークに一致

## ES

正規分布近似によるES  
(1000サンプル×300セットの平均)

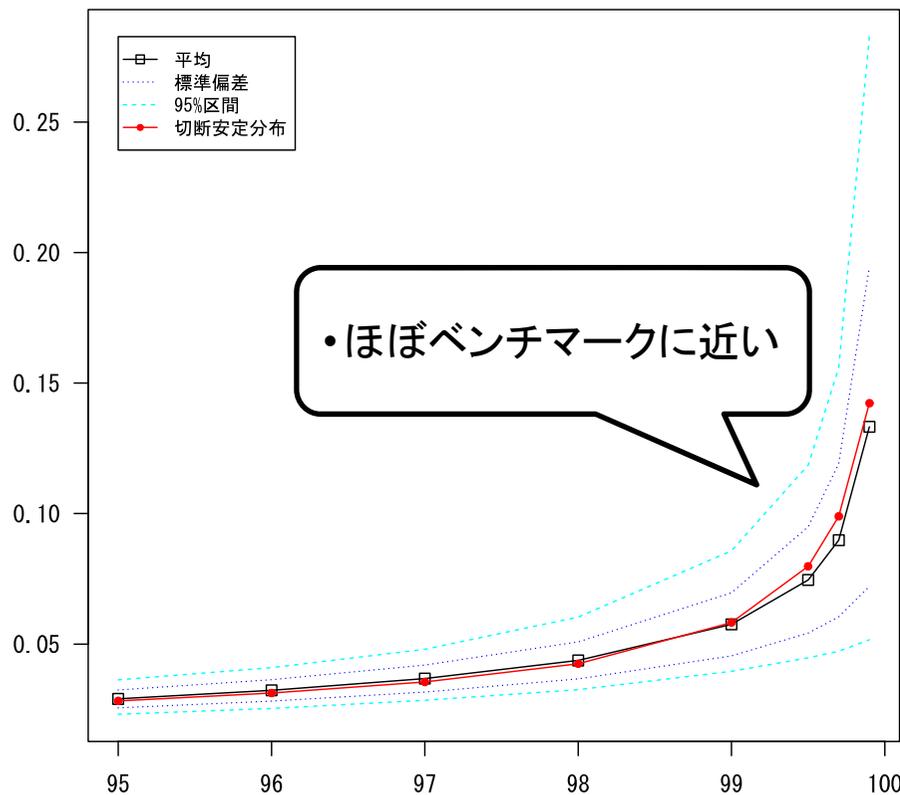


• VaR、ESとも、信頼水準の差はばらつき  
にあまり影響しない

# GPD近似によるVaR、ES(抜粋)

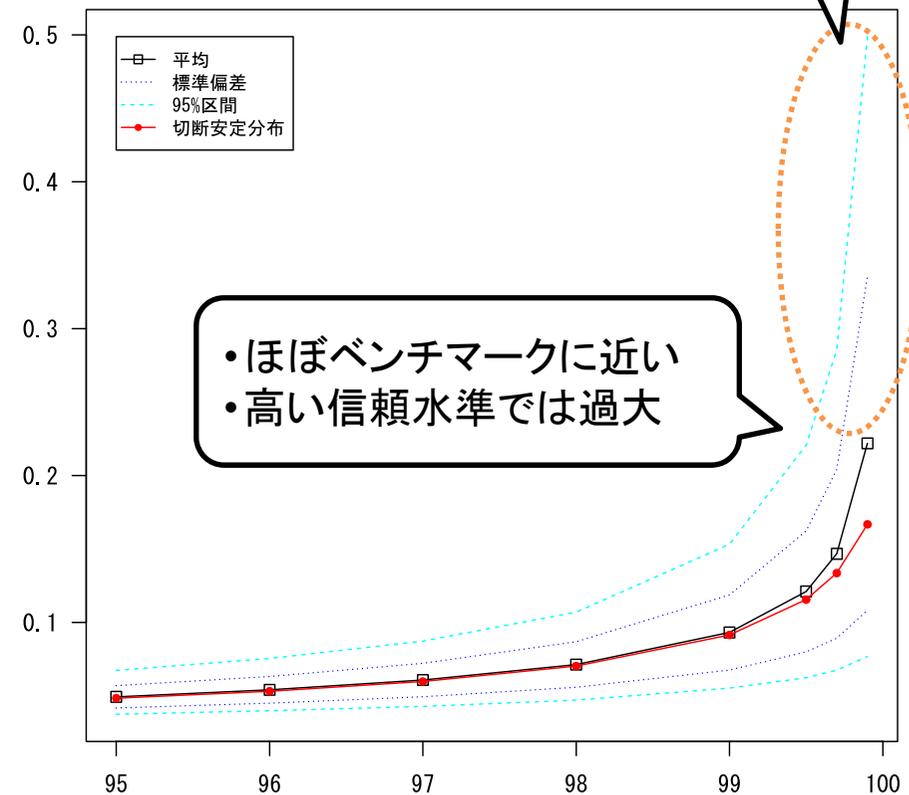
## VaR

GPD近似によるVaR  
(250サンプル×300セットの平均)



## ES

GPD近似によるES  
(500サンプル×300セットの平均)

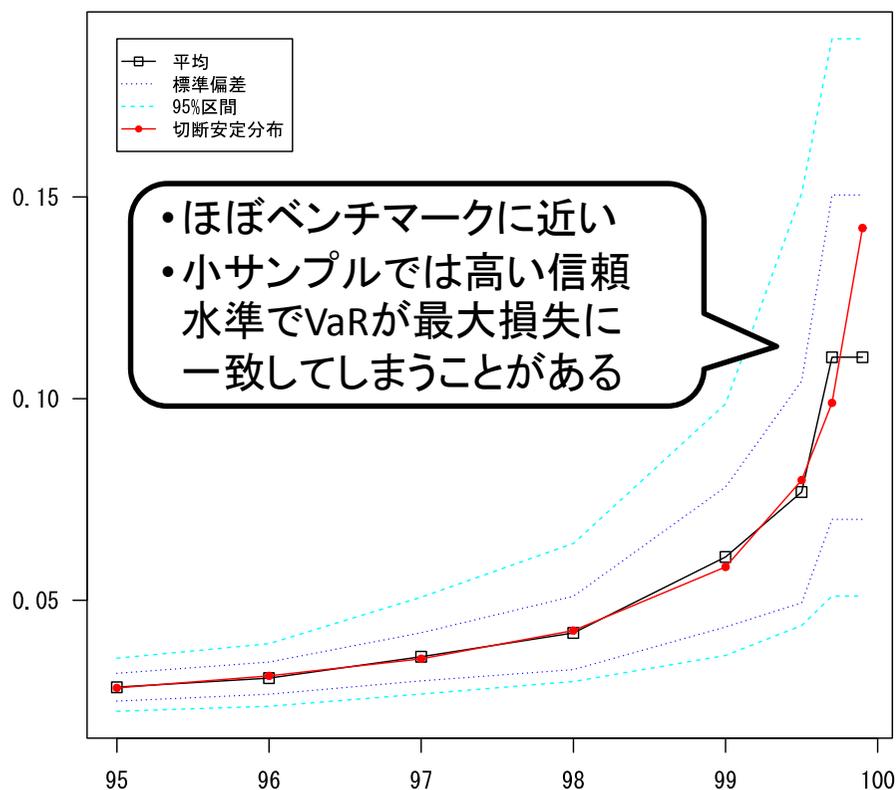


- サンプル数が多いほど、ベンチマークに近く、ばらつきは小さくなる
- 信頼水準が高いほどベンチマークからの乖離、ばらつきが拡大する

# ヒストリカル法によるVaR、ES(抜粋)

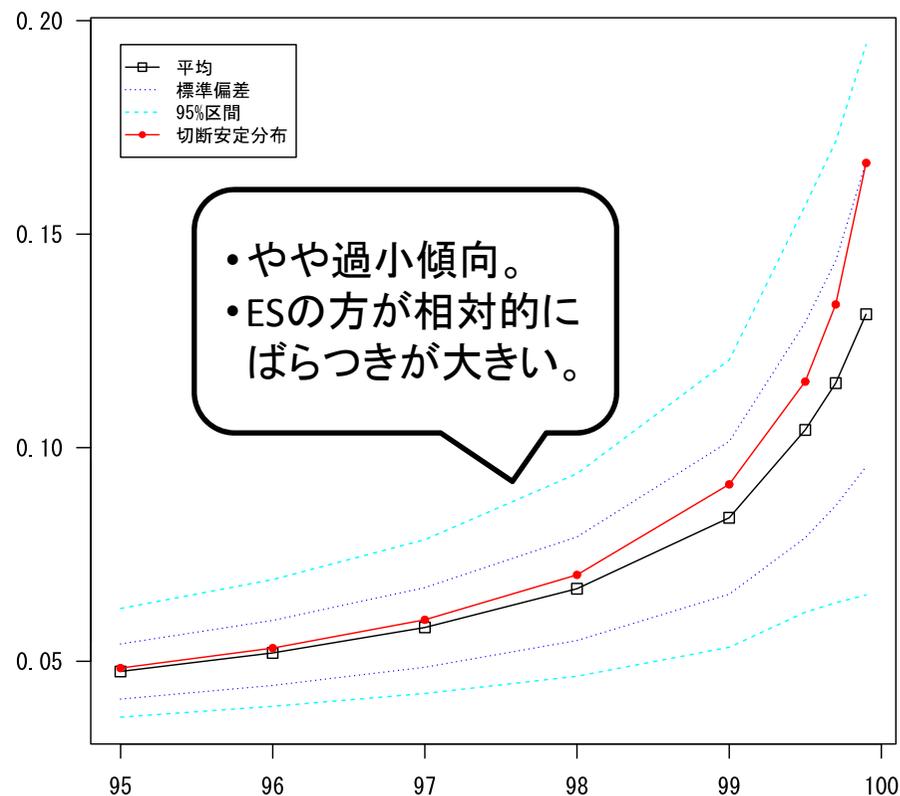
## VaR

ヒストリカル法によるVaR  
(250サンプル×300セットの平均)



## ES

ヒストリカル法によるES  
(500サンプル×300セットの平均)

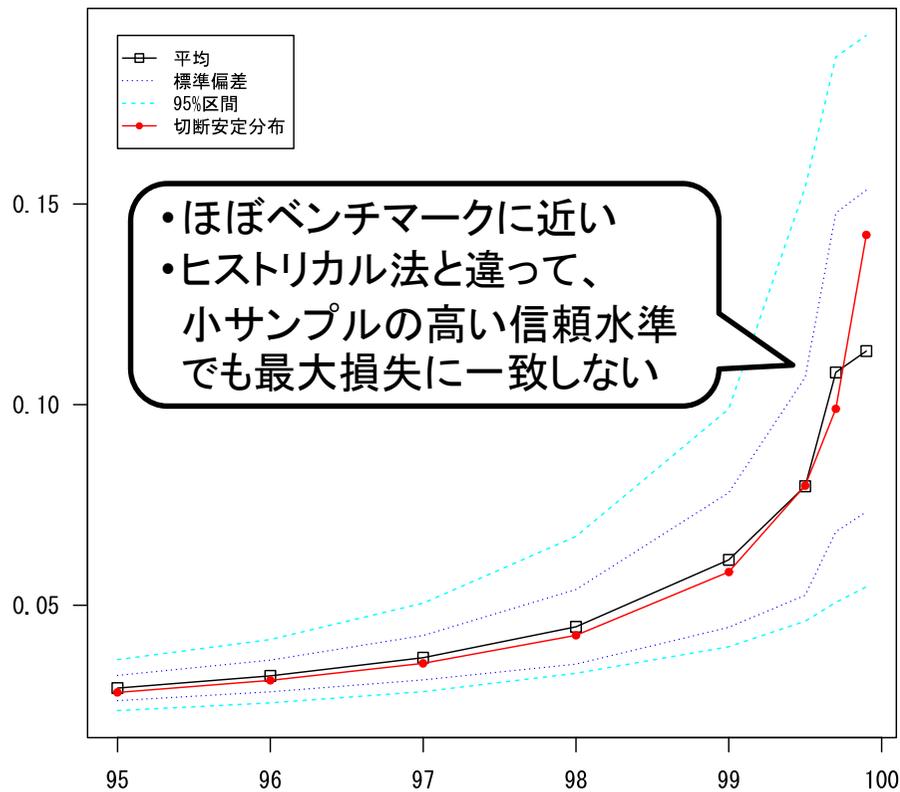


- サンプル数が多いほど、ベンチマークに近く、ばらつきは小さくなる
- 信頼水準が高いほどベンチマークからの乖離、ばらつきが拡大する

# カーネルスムージングによるVaR、ES(抜粋)

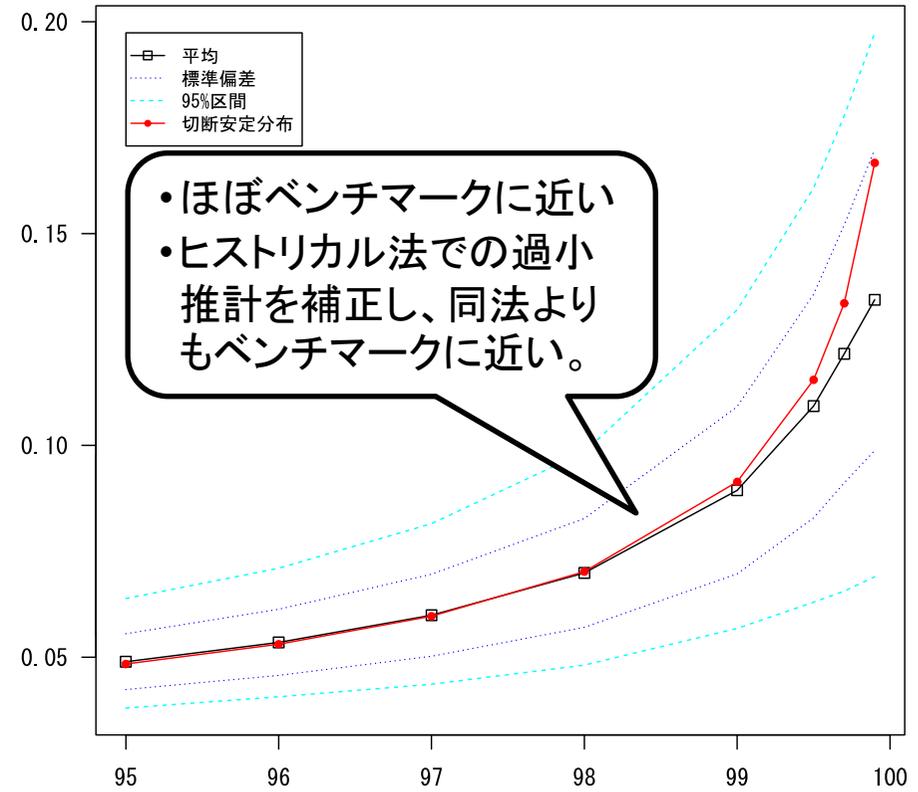
## VaR

カーネルスムージングによるVaR  
(250サンプル×300セットの平均)



## ES

カーネルスムージングによるES  
(500サンプル×300セットの平均)

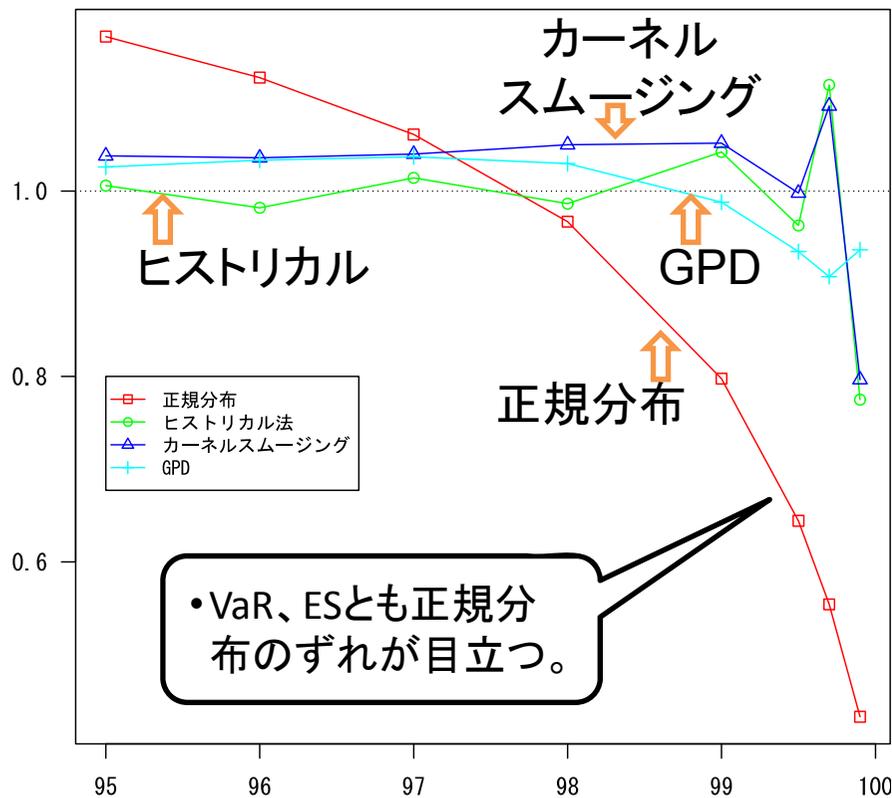


- サンプル数が多いほど、ベンチマークに近く、ばらつきは小さくなる
- 信頼水準が高いほどベンチマークからの乖離、ばらつきが拡大する

# 推計手法別のVaR、ESの水準の相対比較(抜粋)

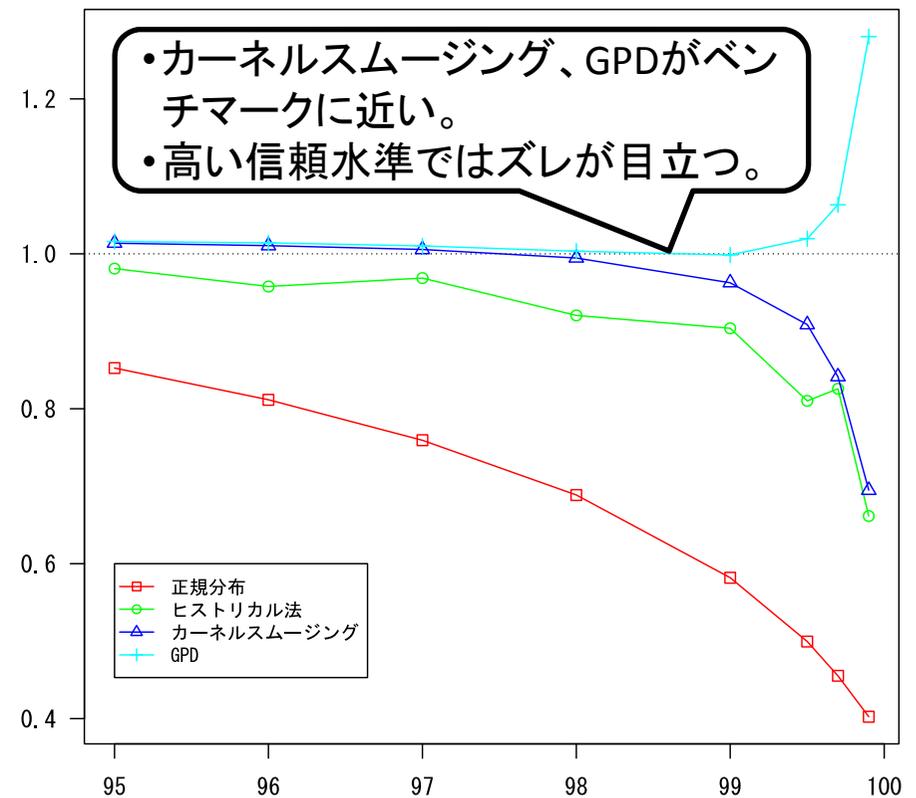
## VaR

推計手法別VaR水準の比較  
(切断安定分布=1、250サンプル×300セットの平均)



## ES

推計手法別ES水準の比較  
(切断安定分布=1、250サンプル×300セットの平均)

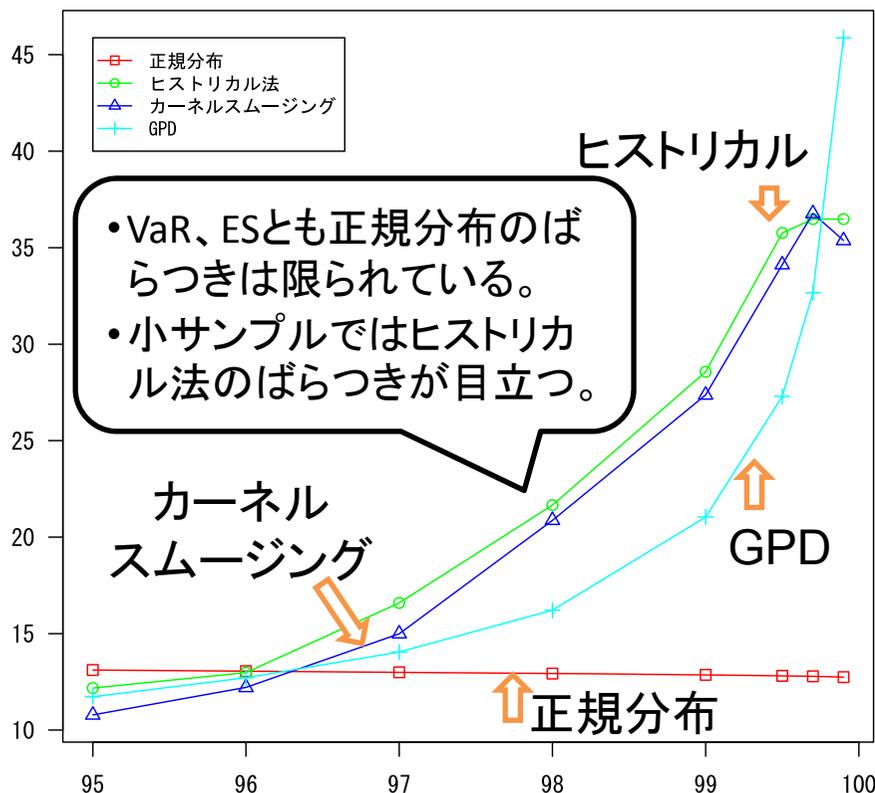


(注) ESのGPDが高信頼水準で過大になっているのは、安定分布の裾の切断の影響

# 推計手法別のVaR、ESの変動係数比較(抜粋)

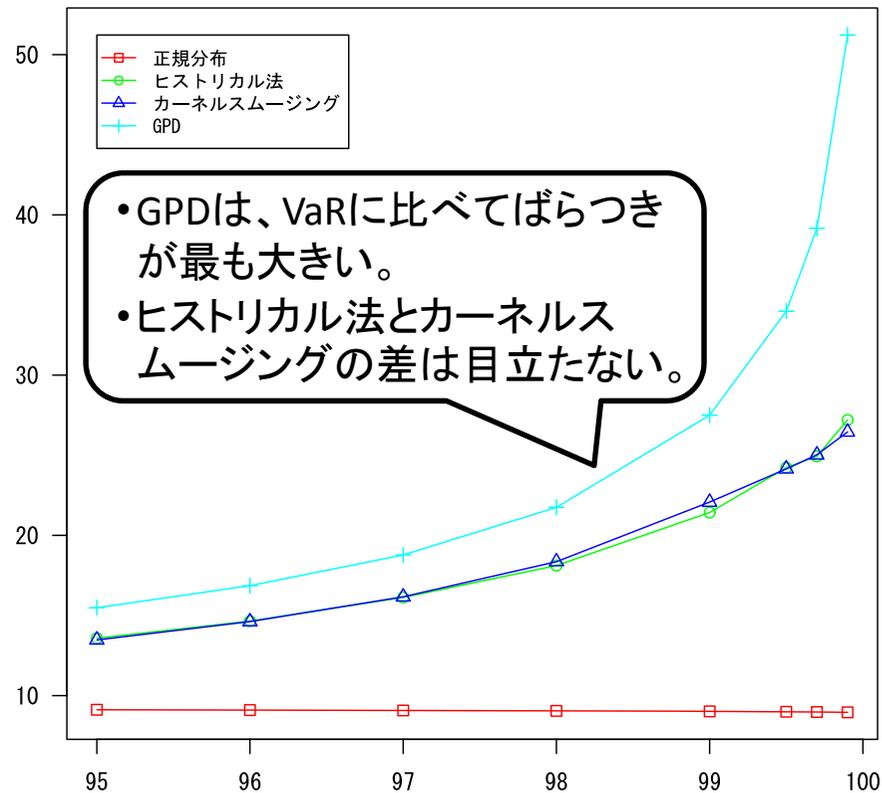
## VaR

VaRの変動係数=標準偏差/平均  
(250サンプル×300セットの平均)



## ES

ESの変動係数=標準偏差/平均  
(500サンプル×300セットの平均)



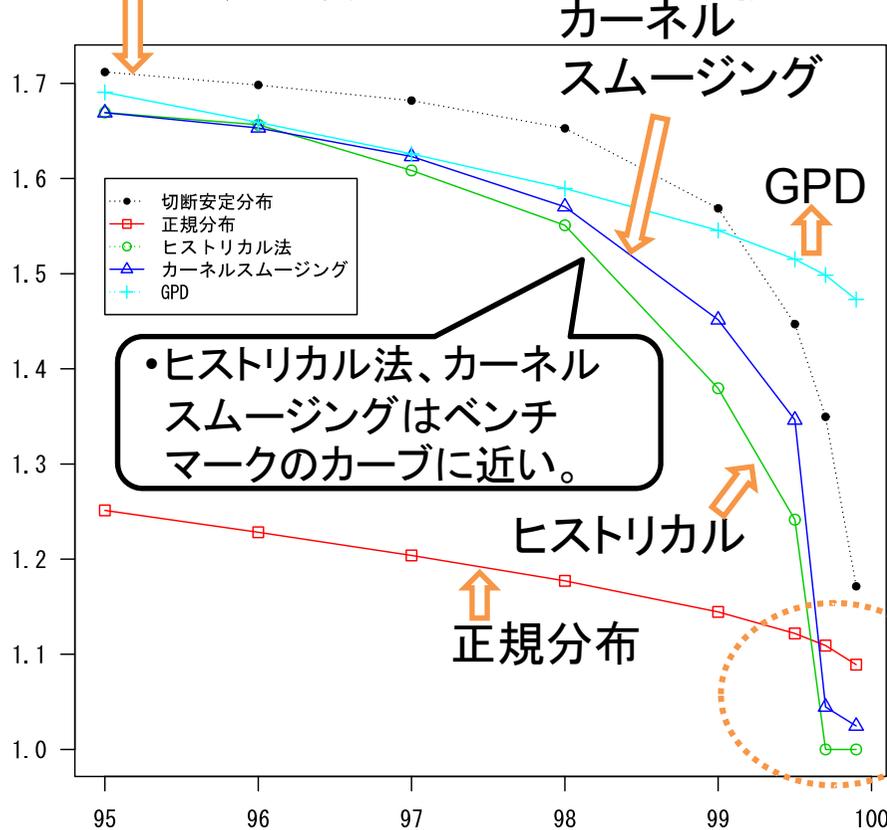
変動係数(=標準偏差/平均)

リスク量の相対的なばらつき度合いを示す(計測手法間の比較に使える)

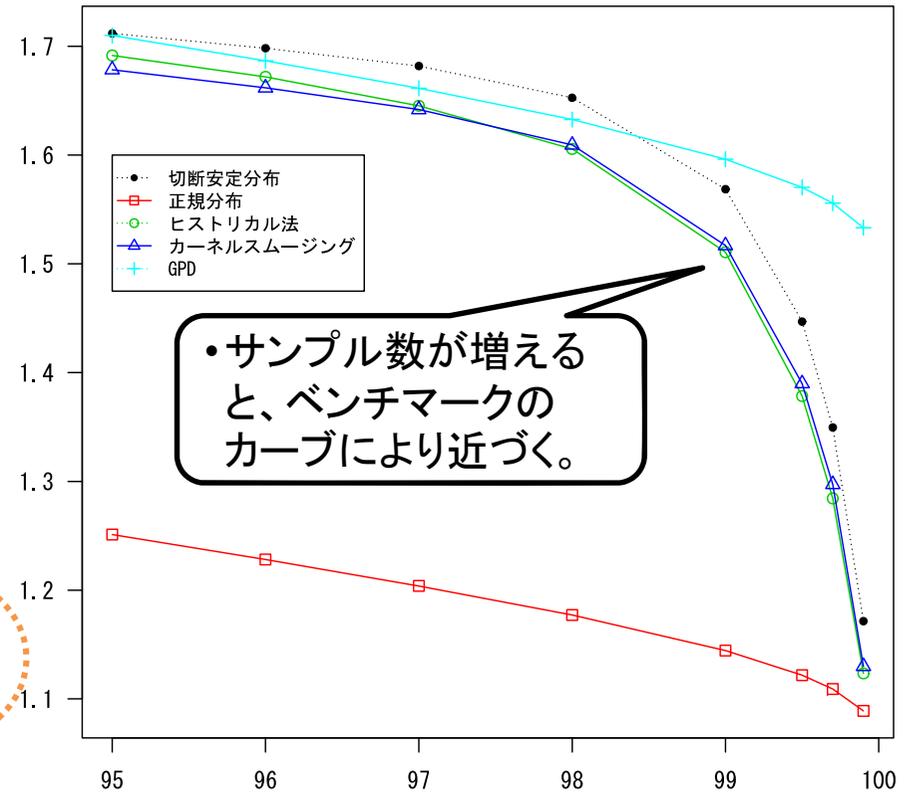
# 推計手法別のES /VaR比率

## ベンチマーク(切断安定分布)

ES/VaR比率(250サンプル×300セットの平均)



ES/VaR比率(1000サンプル×300セットの平均)



- 正規分布は、ベンチマークからの乖離が目立つ
- GPD近似は、高い信頼水準で、サンプリング時の安定分布の裾の切断の影響がみられる

## 5. おわりに

- ファットテイルなデータのリスク量計測においては、正規分布近似によるリスク量計算は精度が低いことが確認された。特に、ESでは、ベンチマークからの乖離が顕著。
  - その他の3手法は概ねベンチマークに近い結果を示したが、小サンプル、高信頼水準では、リスク量計算が安定しないケースもみられた。
  - バーゼル自己資本比率規制の見直しにおけるESの新規採用の検討を契機に、リスク指標に関する比較分析の重要性が増している
- ⇒ リスク量の計測手法について、確率分布の想定、信頼水準、データサイズ、計算の容易さなどの観点から多角的な検討を行うことの重要性が改めて確認された。