

日本銀行 金融高度化センター ワークショップ
「リスク計測の高度化～テイルリスクの把握～」説明資料2

ストレス状況を勘案した 相関構造とリスク合算

2013年2月28日

日本銀行 金融機構局 金融高度化センター
吉羽 要直

目次

1. はじめに

2. 相関構造を表すコピュラ

コピュラ概念、各種コピュラ(具体例)、分離と結合

3. データ分析

(1) 平時データによる実証分析

(2) 欧州周縁国データ(スペイン、イタリア)

(3) 本邦1990年度データ

4. インプリケーションと今後の課題

1. はじめに

- 株式・債券ポートフォリオの市場リスク合算で大きな分散効果
 - 最近の平時データでは金利と株価の変動に正の線形相関
 - ファクターにファットテイルではない正規分布を想定(分散共分散法)

適切か？

- 多様な相関構造(コピュラ)を想定すべきでは？
- ファクターの分布はファットテイルでは？

- 保有期間1日の99%VaR (value at risk)、97.5%ES (expected shortfall) でリスク量と分散効果を分析

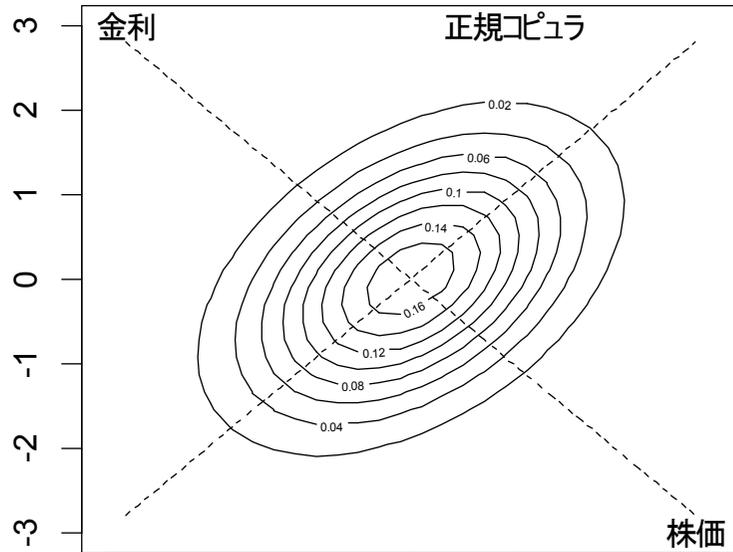
2(1) コピュラ概念

- 株価収益率、主要金利変化の2変量同時分布

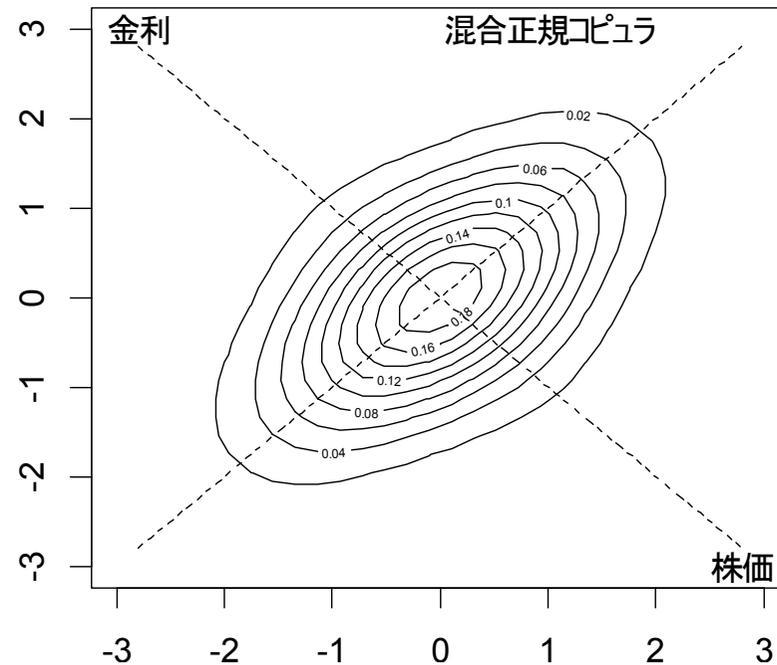
$$\Pr(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) = C(\Pr(X_1 \leq x_1), \Pr(X_2 \leq x_2))$$

- コピュラ $C(\cdot, \cdot)$:各変量単独の分布(周辺分布)を繋ぐ関数
- 分散共分散法:2変量正規分布
 - 周辺分布:1変量正規分布
 - コピュラ:正規コピュラ

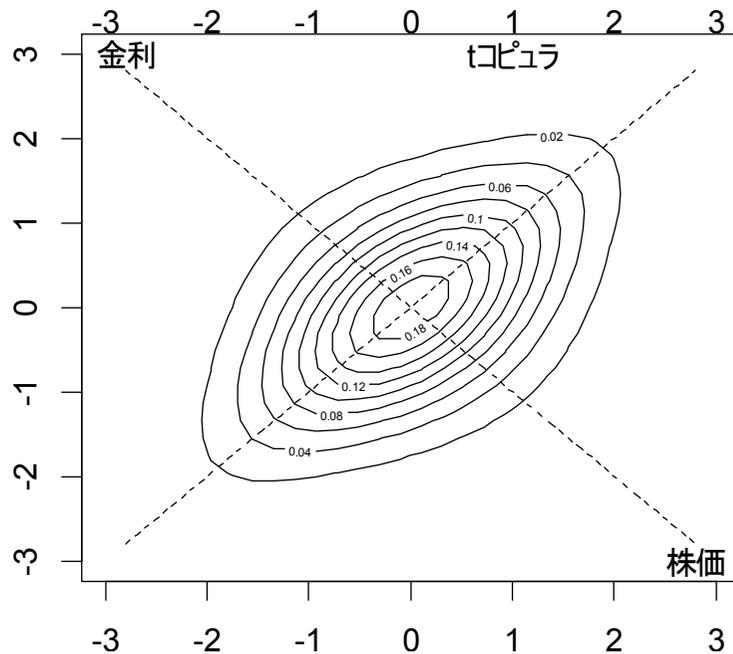
2(2) コピュラの具体例



周辺分布は標準正規



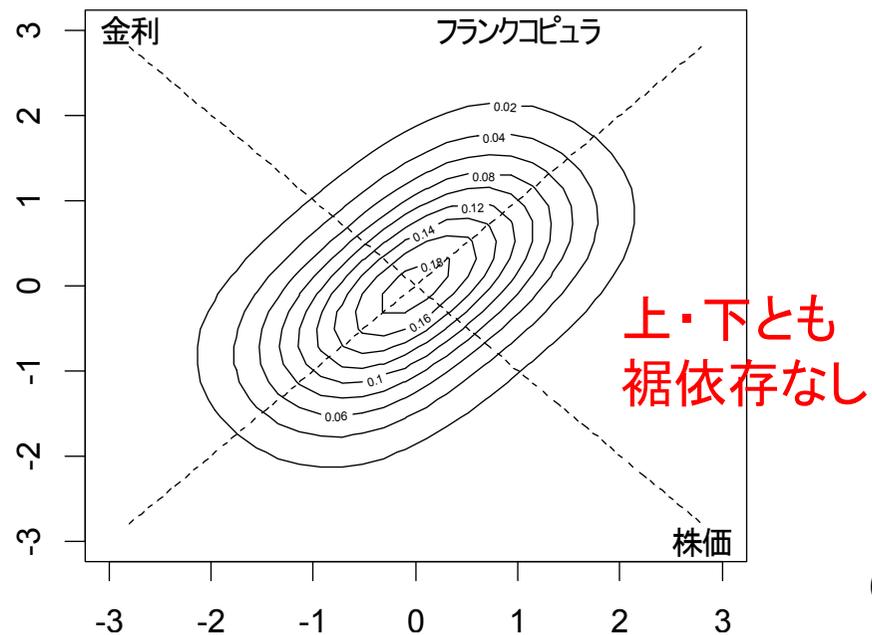
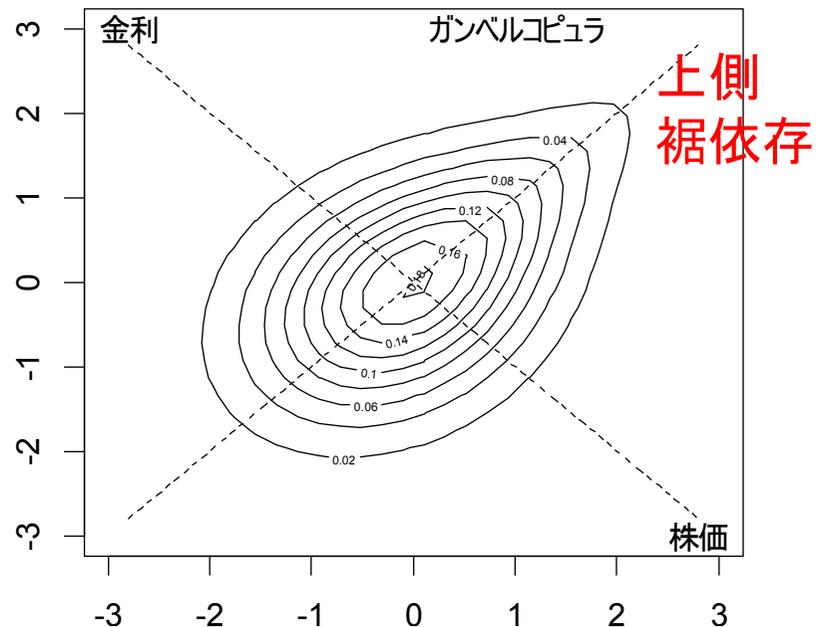
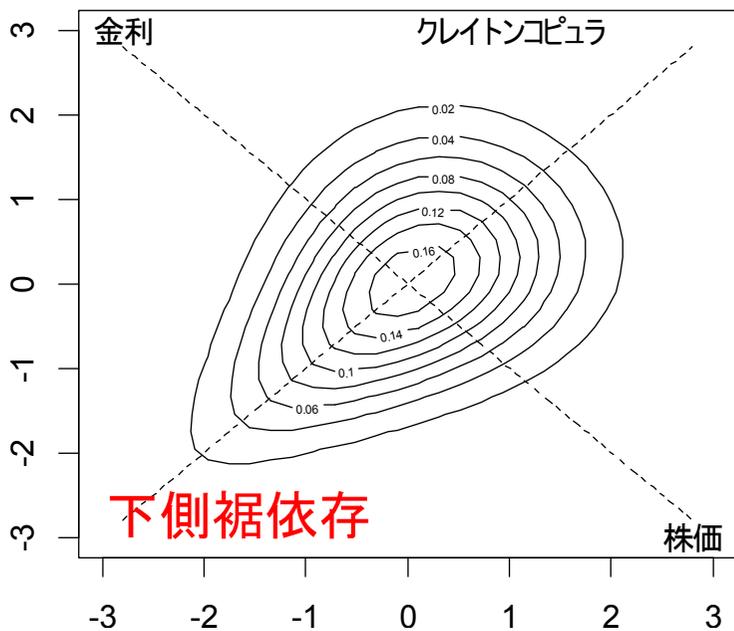
↑ 正と負2つの相関



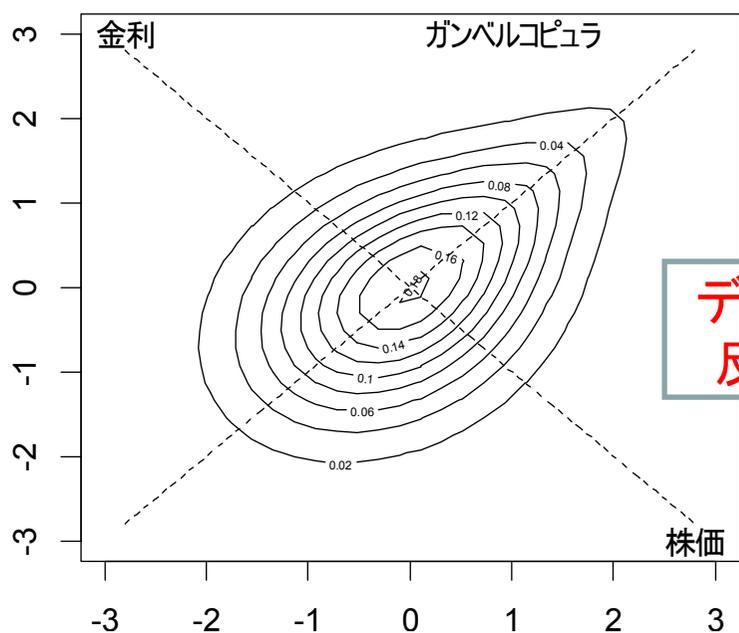
← 両裾の依存性が高い

2(2) コピュラの具体例(続)

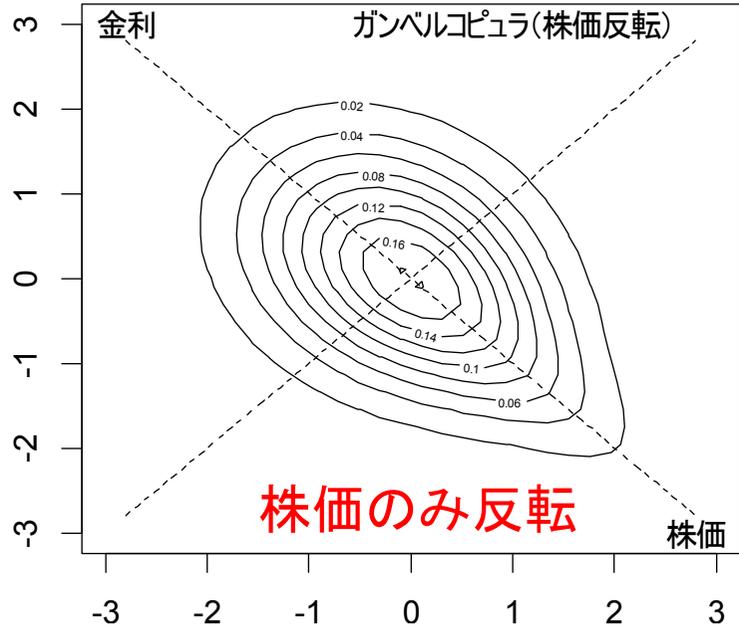
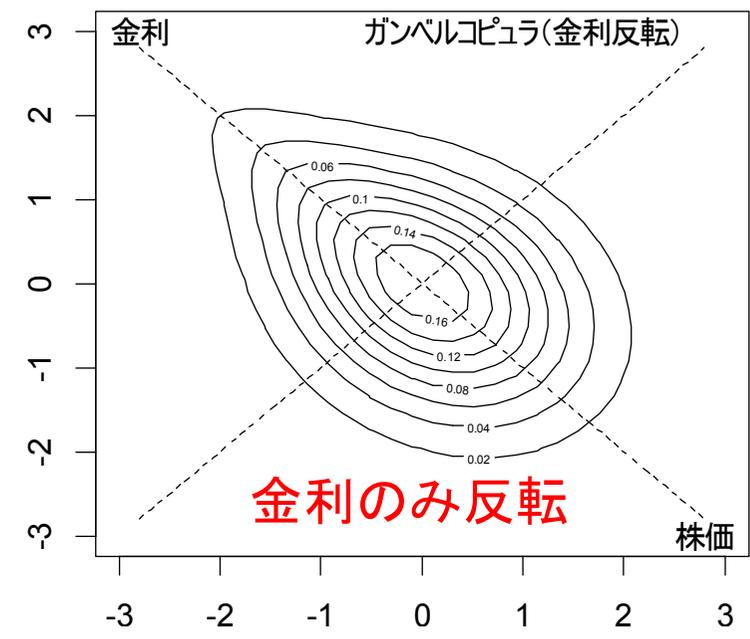
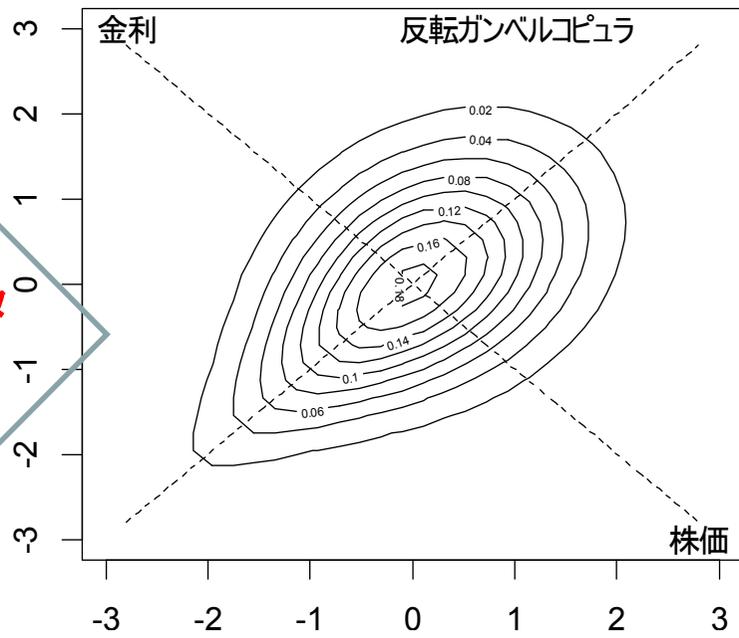
- アルキメディアンコピュラ
– 裾依存性に違い



2(2) コピュラの具体例(続)



データ
反転

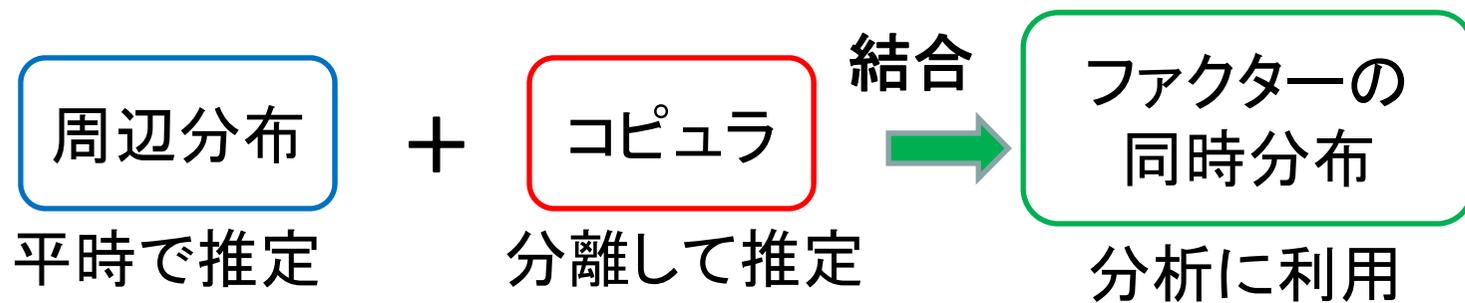


2(3) コピュラの利用: 分離と結合

- 株式・債券ポートフォリオの市場リスク合算で大きな分散効果
 - 最近の平時データでは金利と株価の変動に正の線形相関
 - ファクターにファットテイルではない正規分布を想定(分散共分散法)

適切か？

- 様々なコピュラ(正・負の相関を考慮できるものを含む)を想定
- 欧州周縁国、バブル崩壊期のコピュラを分離抽出
- ファクターの周辺分布: 正規分布を含み、ファットテイル性と歪みを考慮できるスキュー t 分布を想定



3(1) データ分析：平時データ

- ポートフォリオ：債券7,000億円、株式500億円
- サブポートフォリオのVaRとES

VaR(99%)		ES(97.5%)	
債券のみ	株式のみ	債券のみ	株式のみ
24.7 億円	26.1 億円	27.7 億円	28.2 億円

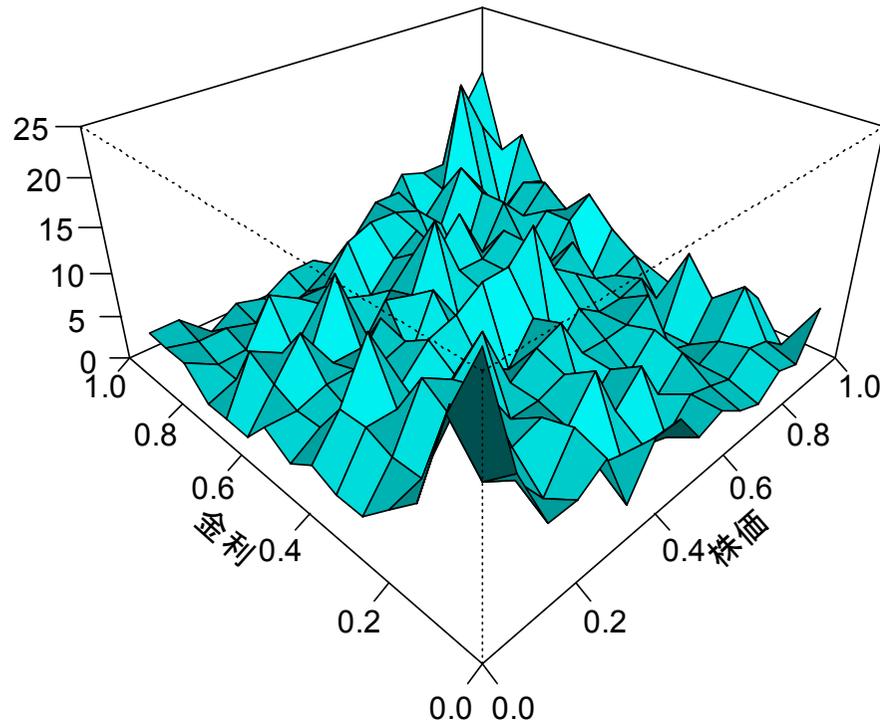
- 通常の合算

	VaR(99%)	分散効果率	ES(97.5%)	分散効果率
単純合算	50.8	—	55.9	—
分散共分散法	23.0	▲55%	23.1	▲59%
HS法	30.2	▲41%	32.7	▲42%
相関法	28.7	▲44%	31.6	▲44%

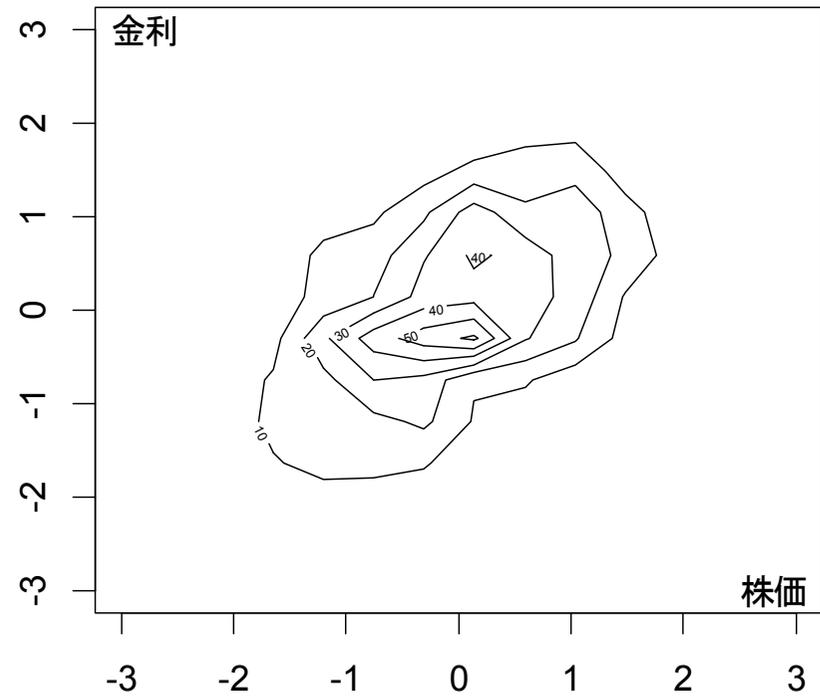
- 分散共分散法：周辺分布は正規分布
- 相関法：周辺分布はスキュー t 分布

3(1) 平時データ(続)

- ノンパラメトリックなコピュラ



最近5年間



3(1) 平時データ(続)

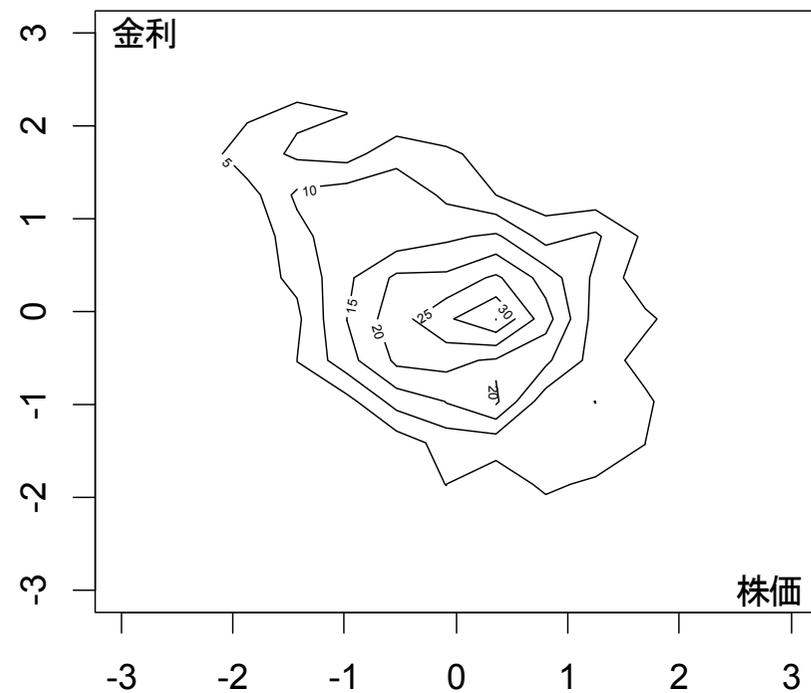
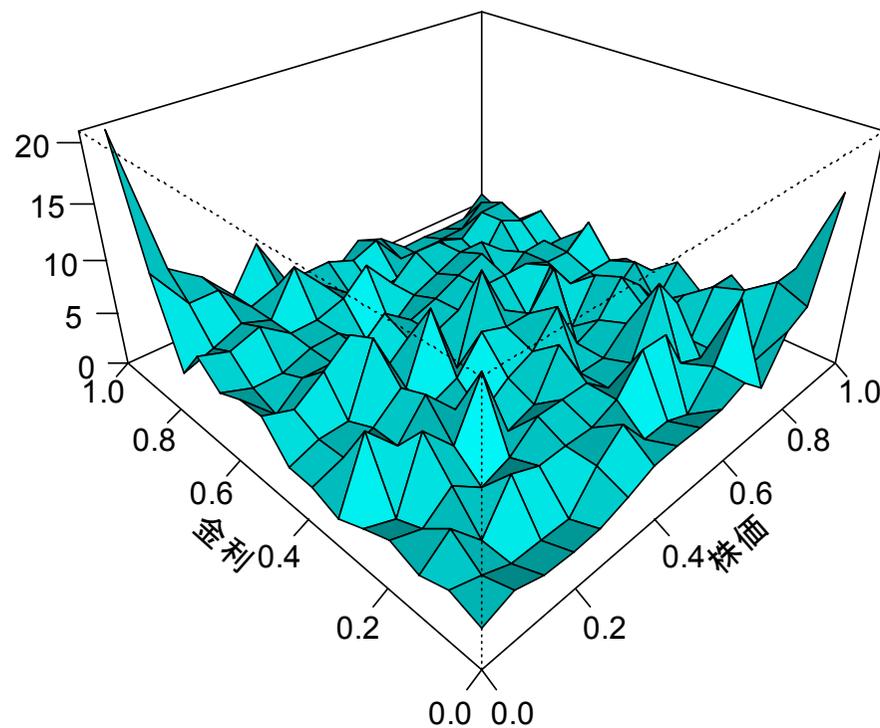
- 最尤推定→混合正規が
適合→分散効果は小さい

	パラメータ	推定値	標準誤差	BIC
ガンベル	γ	1.385	0.031	-239.8
反転ガンベル	γ	1.416	0.031	-282.0
クレイトン	α	0.662	0.050	-236.8
反転クレイトン	α	0.567	0.047	-184.5
フランク	δ	3.188	0.189	-282.6
正規	ρ	0.436	0.021	-251.9
t	ρ	0.466	0.024	-307.2
	ν	5.481	0.918	
混合正規	ρ_1	-0.458	0.124	-313.0
	ρ_2	0.616	0.026	
	θ	0.145	0.036	

コピュラ	VaR(99%)	標準 偏差	分散 効果率	ES(97.5%)	標準 偏差	分散 効果率
ノンパラメトリック	30.1	—	▲41%	32.4	—	▲42%
ガンベル	26.6	0.30	▲48%	29.0	0.37	▲48%
反転ガンベル	25.8	0.27	▲49%	28.4	0.39	▲49%
クレイトン	26.8	0.27	▲47%	29.6	0.37	▲47%
反転クレイトン	28.1	0.27	▲45%	30.5	0.36	▲45%
フランク	28.7	0.29	▲43%	31.8	0.40	▲43%
正規	26.5	0.30	▲48%	29.5	0.42	▲47%
t	26.0	0.31	▲49%	28.5	0.36	▲49%
混合正規	42.1	0.43	▲17%	45.5	0.54	▲19%

3(2) 欧州周縁国データ①(スペイン)

- ノンパラメトリックなコピュラ



最近3年間

3(2)スペイン(続)

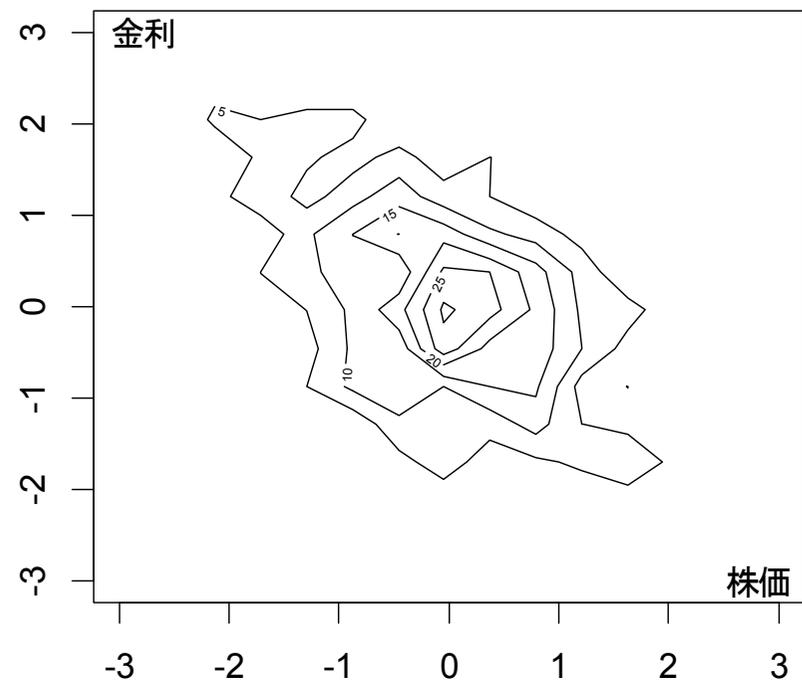
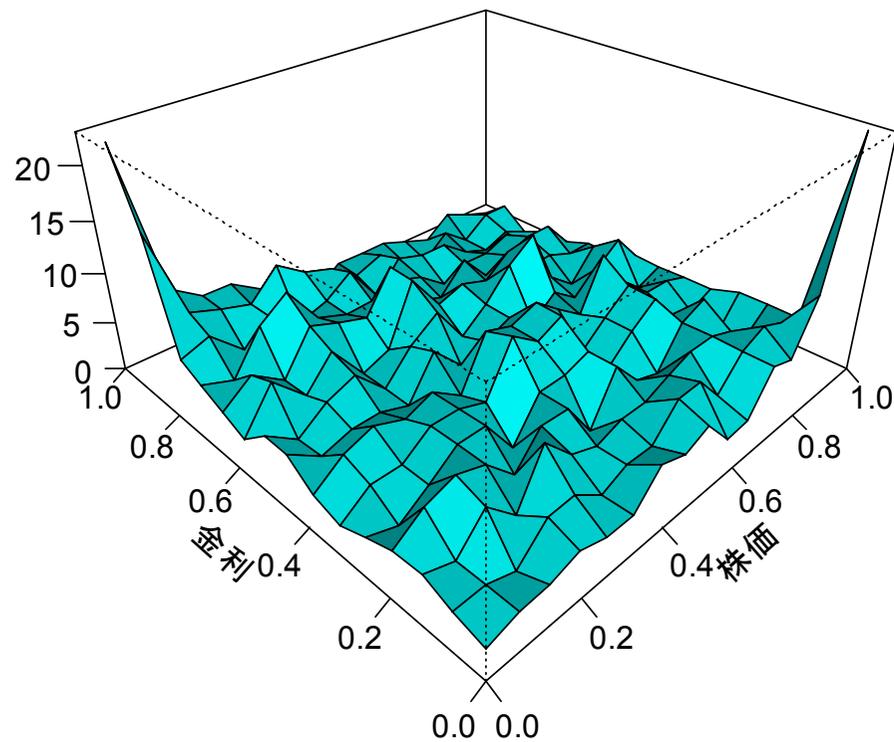
- t が適合
- 分散効果は総じて小さい
(除く、ノンパラのES)

	パラメータ	推定値	標準誤差	BIC
ガンベル(金利反転)	γ	1.339	0.037	-142.1
ガンベル(株価反転)	γ	1.354	0.037	-144.9
クレイトン(金利反転)	α	0.581	0.059	-123.5
クレイトン(株価反転)	α	0.537	0.058	-112.0
フランク	δ	-2.554	0.231	-115.1
正規	ρ	-0.419	0.027	-142.0
t	ρ	-0.403	0.034	-155.4
	ν	5.267	1.370	
混合正規	ρ_1	-0.531	0.035	-146.5
	ρ_2	0.703	0.132	
	θ	0.885	0.038	

コピュラ	VaR(99%)	標準 偏差	分散 効果率	ES(97.5%)	標準 偏差	分散 効果率
ノンパラメトリック	40.1	—	▲21%	39.2	—	▲30%
ガンベル(金利反転)	39.1	0.37	▲23%	42.2	0.44	▲25%
ガンベル(株価反転)	44.4	0.50	▲13%	48.9	0.60	▲13%
クレイトン(金利反転)	44.7	0.47	▲12%	49.1	0.56	▲12%
クレイトン(株価反転)	36.8	0.40	▲27%	39.9	0.49	▲29%
正規	39.0	0.39	▲23%	42.0	0.48	▲25%
フランク	41.4	0.37	▲18%	44.8	0.44	▲20%
t	41.9	0.41	▲18%	45.9	0.49	▲18%
混合正規	43.2	0.42	▲15%	46.7	0.53	▲17%

3(2) 欧州周縁国データ②(イタリア)

- ノンパラメトリックなコピュラ



最近3年間

3(2) イタリア(続)

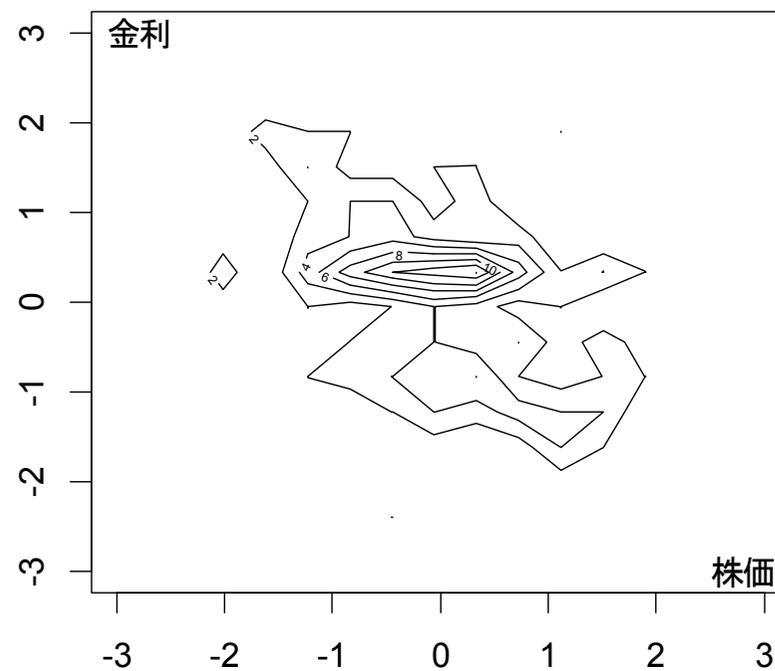
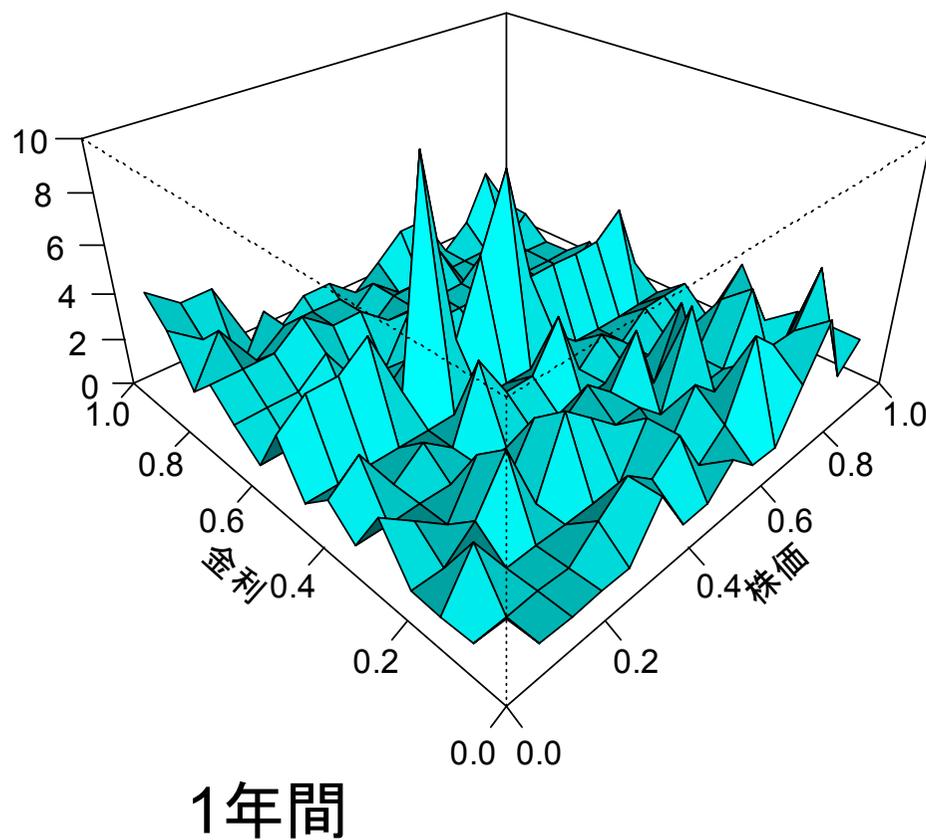
- スペインとほぼ同じ(ノンパラのVaRが若干違う)
- 分散効果は総じて小さい

	パラメータ	推定値	標準誤差	BIC
ガンベル(金利反転)	γ	1.400	0.039	-176.7
ガンベル(株価反転)	γ	1.427	0.039	-194.7
クレイトン(金利反転)	α	0.706	0.062	-168.6
クレイトン(株価反転)	α	0.619	0.061	-138.4
フランク	δ	-2.928	0.234	-149.9
正規	ρ	-0.471	0.025	-185.0
t	ρ	-0.453	0.032	-198.7
	ν	5.019	1.303	
混合正規	ρ_1	-0.588	0.042	-186.5
	ρ_2	0.421	0.241	
	θ	0.855	0.066	

コピュラ	VaR(99%)	標準偏差	分散効果率	ES(97.5%)	標準偏差	分散効果率
ノンパラメトリック	38.2	—	▲25%	39.1	—	▲30%
ガンベル(金利反転)	39.7	0.40	▲22%	42.8	0.49	▲23%
ガンベル(株価反転)	45.3	0.59	▲11%	49.9	0.70	▲11%
クレイトン(金利反転)	45.7	0.57	▲10%	50.3	0.72	▲10%
クレイトン(株価反転)	37.1	0.38	▲27%	40.2	0.46	▲28%
正規	39.6	0.36	▲22%	42.5	0.40	▲24%
フランク	42.2	0.39	▲17%	45.7	0.45	▲18%
t	42.7	0.47	▲16%	46.8	0.54	▲16%
混合正規	44.2	0.44	▲13%	47.9	0.59	▲14%

3(3)本邦1990年度データ

- ノンパラメトリックなコピュラ



3(3) 本邦1990年度(続)

- ・ 欧州と似てはいるが、ノンパラの分散効果は少し大きい

	パラメータ	推定値	標準誤差	BIC
ガンベル(金利反転)	γ	1.285	0.063	-24.1
ガンベル(株価反転)	γ	1.285	0.063	-25.5
クレイトン(金利反転)	α	0.422	0.103	-16.3
クレイトン(株価反転)	α	0.448	0.103	-18.7
フランク	δ	-2.489	0.419	-30.1
正規	ρ	-0.315	0.055	-19.9
t	ρ	-0.378	0.061	-31.4
	ν	3.802	1.084	
混合正規	ρ_1	-0.707	0.067	-29.6
	ρ_2	0.237	0.177	
	θ	0.635	0.112	

コピュラ	VaR(99%)	標準偏差	分散効果率	ES(97.5%)	標準偏差	分散効果率
ノンパラメトリック	33.7	—	▲34%	35.7	—	▲36%
ガンベル(金利反転)	38.5	0.34	▲24%	41.6	0.43	▲26%
ガンベル(株価反転)	43.3	0.43	▲15%	47.7	0.57	▲15%
クレイトン(金利反転)	42.9	0.49	▲16%	47.2	0.62	▲16%
クレイトン(株価反転)	36.6	0.37	▲28%	39.6	0.47	▲29%
正規	39.0	0.39	▲23%	41.9	0.49	▲25%
フランク	39.8	0.32	▲22%	43.1	0.44	▲23%
t	41.7	0.48	▲18%	45.8	0.57	▲18%
混合正規	45.8	0.46	▲10%	49.8	0.59	▲11%

4(1)インプリケーション

- 分散共分散法→正規分布の仮定が問題
- 近年観察されていない相関構造について、ストレス状況として、混合正規コピュラ、欧州周縁国・バブル崩壊期のコピュラで勘案可能→分散効果は小さくなる
- ノンパラメトリックなコピュラ:ESではデータ不足が過小評価を引き起こす問題
- 裾依存性を高めても、必ずしもリスク量が大きくなるわけではない



- リスクファクターの分布が変化していくことを考慮しない場合には、コピュラを精緻にしたり、コピュラの抽出市場・時期などを選ぶ工夫が必要。

4(2) 今後の課題

- 3変量以上への対応

- Vine : 変量数は10~20程度まで (Rのプログラムは公開)
- HAC: 業種内相関が1つで、業種のカテゴリーがそれほど多くはない場合には、数百社でも対応可能
- t : 最尤法に拘らなければ、相関行列についてはモーメント法で順位相関(ケンドールのタウ)から変換したものをを用いて推定。また、適宜設定した閾値から先の同時発生頻度で自由度 ν を推定する方法が実用的→変量数が数千になっても対応可能

$$\frac{C_{ij}(u, u)}{u} \rightarrow 2t_{\nu+1} \left(-\sqrt{\frac{(1-\rho_{ij})(\nu+1)}{(1+\rho_{ij})}} \right)$$

- 混合正規: 状態数の設定と状態ごとの相関行列の効率的な推定が難しい

4(2) 今後の課題(続)

- リスク計測期間の調整
 - 時系列相関の扱い
 - Moving-Window法など重複に伴う相関への対処
 - 独立同一分布の前提では、和の分布のコピュラは理論的には正規コピュラに近づくが、収束スピードに議論があり...
 - 年間に必要な経済資本算出では、流動性とポジション解消の関係も考慮する必要性

4(2) 今後の課題(続)

- 経済資本管理におけるリスク合算

- トップレベルの合算

- リスクカテゴリーの損益分布を周辺分布として相関構造をモデル化

- ベースレベル(ボトムアップ)の合算

- 各リスクカテゴリーに含まれるリスクファクターの相関構造をモデル化

