



リスク管理と金融機関経営に関する調査論文

住宅ローンのリスク・収益管理の一層の強化に向けて

—— 住宅ローンのデフォルト確率および期限前返済の期間構造の推計 ——

日本銀行金融機構局

本稿の内容について、商用目的で転載・複製を行う場合は、予め日本銀行金融機構局まで
ご相談ください。

転載・複製を行う場合は、出所を明記してください。

目次

1. はじめに.....	1
2. 住宅ローンに係るリスク特性と生涯収益の把握の重要性.....	2
(1) 住宅ローンを巡る環境とリスク要因の整理.....	2
(2) 住宅ローンの生涯収益とデフォルト確率、期限前返済が及ぼす影響... BOX デフォルト確率および期限前返済の期間構造.....	6 7
3. デフォルト確率の期間構造の推計.....	11
(1) デフォルト確率の利用目的と推計手法.....	11
(2) 過去のデフォルト実績データに基づく期間構造の推計.....	15
(3) 比例ハザードモデルによる推計.....	17
4. 期限前返済の期間構造の推計.....	23
(1) PSJ モデルによる推計.....	23
(2) ハザードモデルの選択とモデル構築.....	24
(3) 比例ハザードモデルによる推計.....	25
5. 金融機関の実務におけるモデル利用上の留意点.....	28
(1) 生涯収益の把握の重要性と戦略的な利用.....	28
(2) ストレステストの重要性.....	29
(3) モデルの開発・運用体制の整備.....	29
(4) 住宅ローンに係るデータの重要性.....	30
6. おわりに.....	31
補論1. ロジット回帰モデルについて.....	32
補論2. ハザードモデル（生存時間分析）について.....	37
補論3. パラメトリック・ハザードモデルによる期限前返済の推計.....	42
(参考文献)	44

本稿の作成に当たっては、森平 爽一郎教授（早稲田大学大学院ファイナンス研究科）から有益なコメントを頂戴した。また、住宅ローンのデフォルト確率および期限前返済の推計モデルの現状の把握にあたって、金融機関にモデルを提供している外部ベンダー各社からも情報を提供して頂いた。記して感謝したい。

(本件に関する照会先)

金融機構局・金融高度化センター

電話：03-3277-1130

E-mail：caft@boj.or.jp

1. はじめに

金融機関の貸出ポートフォリオの中で、住宅ローンは一段と重要な位置を占める商品となっている。日本銀行が2007年に公表した「住宅ローンのリスク管理」では、近年における本邦金融機関の貸出ポートフォリオの特徴的な変化の1つとして、「住宅ローンを中心とした個人向け貸出の増加」を挙げていた。その後も、住宅ローンは緩やかに増加を続け、全国銀行の総貸出に占める住宅ローンの割合も高まってきている。

こうした状況下、多くの金融機関が積極的な金利優遇策を提示するなど、住宅ローンにおける金融機関間の競争が激しくなっている中で、住宅ローンの収益性の確保が重要な経営課題として認識されるようになってきている。住宅ローンの収益性を評価するためには、単年度の収支の把握のみならず、「貸出期間を通しての採算」（以下「生涯収益」という）の把握が特に重要である。

本稿では、この生涯収益に影響を与える「デフォルト確率（以下、PD）の期間構造」と「期限前返済の期間構造」に関する主なモデル²に焦点を当てつつ、モデル構造上の留意点やモデルのアウトプットを評価する上での注意点について説明する³。また、経営陣や営業推進・リスク管理部署がともに認識を深め共有していくべきモデル利用上の留意点についても述べる⁴。

¹ 本稿では、将来の各時点（年、月等）における倒産確率や期限前返済発生率の時系列的な推移を「期間構造」と呼んでいる（詳しくは、2（2）BOX参照）。

² 本稿は、特定の手法を推奨する目的で書かれたものではない。また、紹介した手法の多くは、引き続き発展段階にあるものが多く、今後も必要なデータの整備を含めて様々な面で改良が加えられていくことが予想される。

³ 住宅ローンのリスク管理の枠組みについては、日本銀行[2007]を参照。

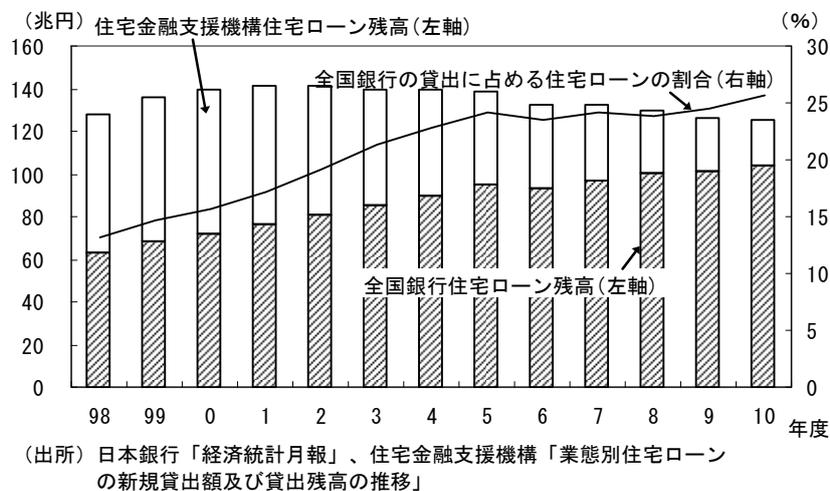
⁴ 本稿は、金融機関のリスク管理・経営管理の観点から記述しているが、住宅ローンの保証を業務とする保証会社における管理にも資すると考えられる。

2. 住宅ローンに係るリスク特性と生涯収益の把握の重要性

(1) 住宅ローンを巡る環境とリスク要因の整理

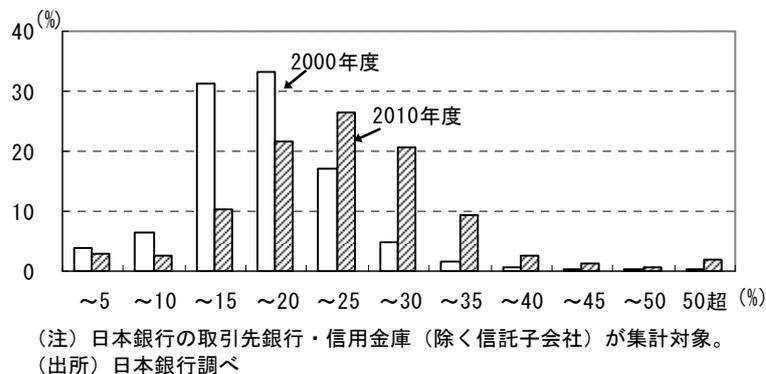
住宅ローンの貸出残高は、2001年度にピークをつけた後、減少傾向を辿っている。この間、全国銀行の住宅ローン残高は、引き続き増加傾向にあり、貸出全体に占める住宅ローンの割合も上昇傾向が続いている（図表1）。全国銀行の住宅ローンが増加してきた背景には、住宅金融支援機構の住宅ローンが減少傾向にあったことや、企業向けの貸出が伸び悩む中で金融機関が住宅ローンを積極的に推進してきたことがあると考えられる。

(図表1) 住宅ローンの残高推移



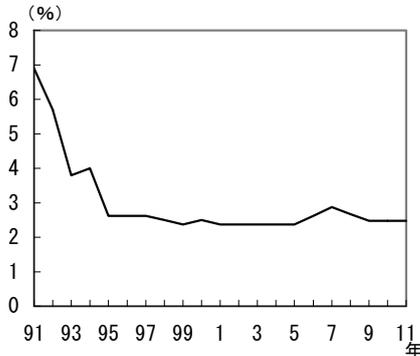
図表2は、日本銀行の取引先銀行・信用金庫について、貸出に占める住宅ローンの割合を計算し、2000年度末と2010年度末とを比較したものである。これをみると、住宅ローンの比率の分布のピークが15~20%から20~25%へとより高い水準に移動していること、1/4を超える金融機関の比率が大幅に増えていることなどがわかる。このように住宅ローンは金融機関の貸出においてますます重要な位置を占めるようになってきている。

(図表2) 住宅ローン対貸出比率の金融機関分布



次に、住宅ローンのリスク特性について整理する。住宅ローンの貸出金利をみると、引き続き低い水準にあるが、最近では、変動金利を中心に、金利優遇の動きが広がっており、実勢金利は一段と低下している模様である。

(図表3) 住宅ローン金利(変動金利)



(参考) 住宅ローンの金利優遇の例(2011年9月時点、%)

	変動金利		10年固定		20年固定	
	標準	優遇後	標準	優遇後	標準	優遇後
A銀行(都市銀行)	2.48	1.28	3.75	2.05	4.75	3.05
B銀行(信託銀行)	2.48	1.08	3.75	1.75	4.85	2.55
C銀行(ネット銀行)	2.78	0.88	3.02	1.52	4.40	2.20
D銀行(地方銀行)	2.48	1.08	3.20	1.80	3.10	1.70
E銀行(地方銀行)	2.48	1.48	3.55	2.05	5.00	3.05
F信用金庫	2.48	1.48	3.10	1.60	4.05	2.55
G信用金庫	2.67	0.95	3.80	1.50	-	-

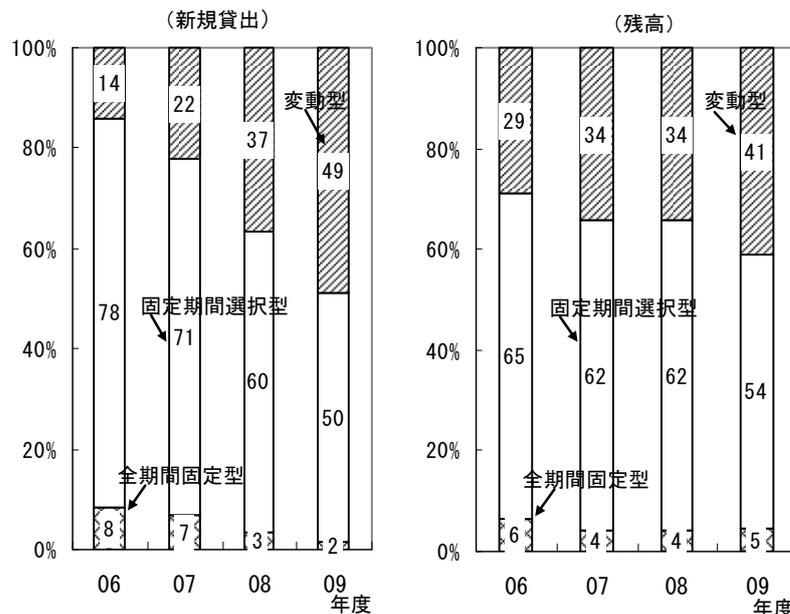
(注) 金融機関の広告資料等から作成

(注) 都市銀行各々の貸出金利の中央値、年末時点(2011年は8月末時点)。

(出所) 日本銀行「経済統計月報」

このように、多くの金融機関が積極的な金利優遇策を提示している中で、住宅ローンの新規貸出および貸出残高のいずれにおいても変動金利型の商品が占める比率が上昇している(図表4)。こうした変動金利型の住宅ローンは、債務者にとって、足許の金利コストの節減につながるというメリットがある反面、金利が上昇に転じた場合には金利コストが上昇するというリスクがある。一方で、金融機関にとっては、金利リスクを回避できる反面、現状では金利水準の低さから利息収入が少ない上、金利上昇時には信用リスクが増加する点にも注意が必要である。

(図表4) 住宅ローンの金利タイプ別構成

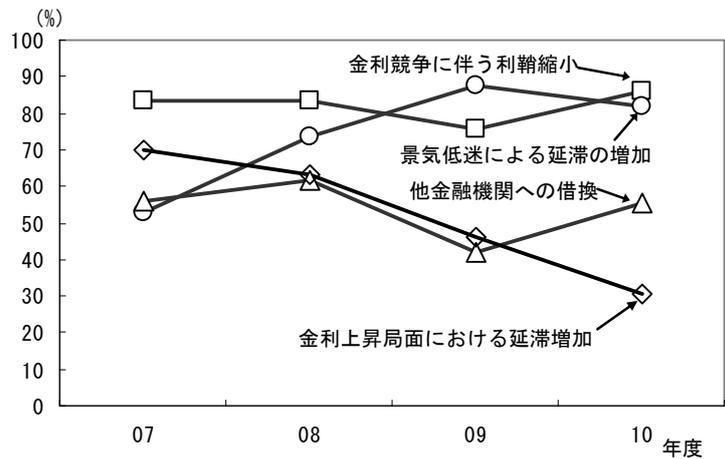


(注) 2010年7~8月時点調査(前年度実績に関する調査)

(出所) 住宅金融支援機構「民間住宅ローンの貸出動向調査」

図表5は、金融機関が住宅ローンのリスクについて、どのようなものを主に懸念しているかを示したものである。これをみると、「金利競争に伴う利鞘縮小」、「景気低迷による延滞の増加」を挙げる先の比率が高く、次いで、「他金融機関への借換」、「金利上昇局面での延滞の増加」となっている。

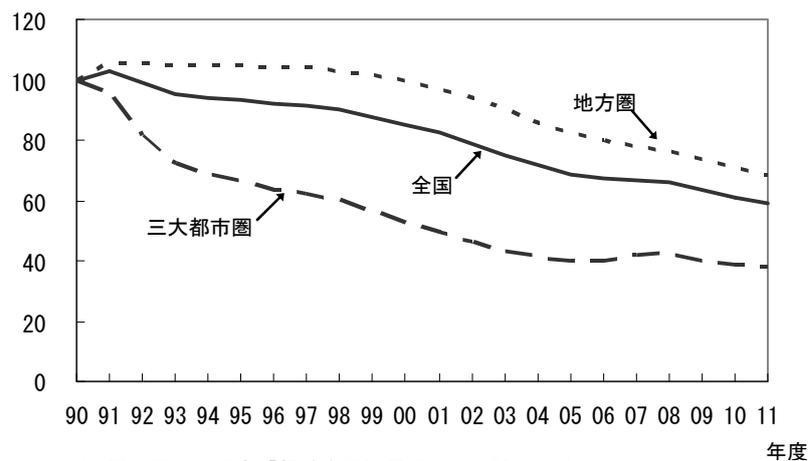
(図表5) 金融機関が懸念する住宅ローンのリスク



(出所) 住宅金融支援機構「民間住宅ローンの貸出動向調査」
(調査時点は各年度とも7~8月)

住宅ローン債権の回収率を左右する地価の動向については、人口の減少などの構造的要因を反映して全国の住宅地価は引き続き低下傾向にある(図表6)。この点は、住宅ローンの収益性やリスクを考える上で、引き続き注意を要する要素である。ただし、本稿では、PD および期限前返済の期間構造を主題としているため、回収率の問題については直接扱わない。

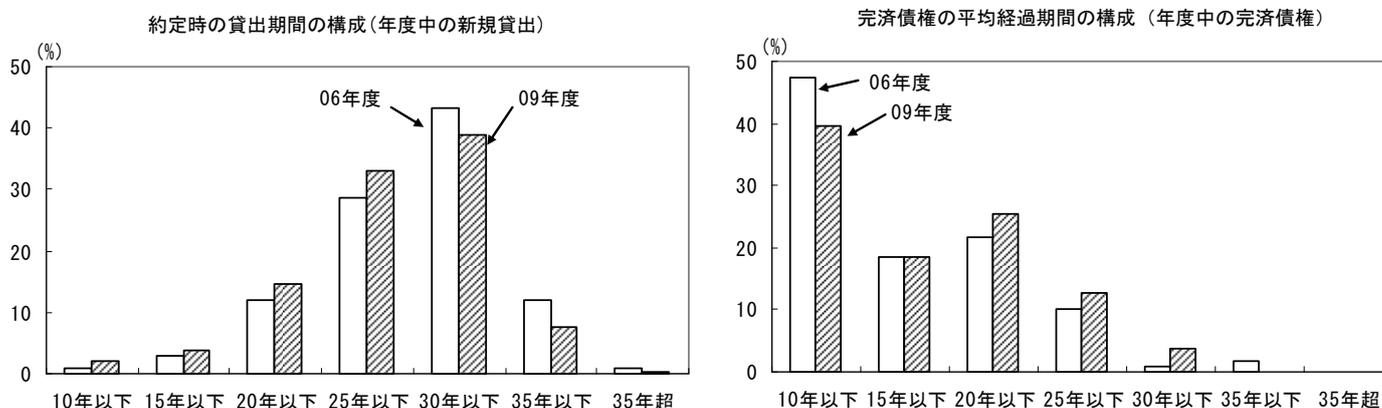
(図表6) 住宅地価の推移(1990年=100)



(出所) 国土交通省「都道府県地価調査」(2011年度)

次に、期限前返済のリスクについてみていく。図表7は、住宅ローンの「約定時の貸出期間」と「完済期間」の差について示したものである。これをみると、新規貸出約定時の住宅ローンの貸出期間は、25～30年の比率が最も高く、次いで20～25年となっている。しかし、実際に完済された住宅ローンについて、借入時からの経過期間をみてみると、10年以下の割合が最も高い。次いで15年～20年、10年～15年となっており、25年を超える期間の割合は相対的に低い。このように貸出約定時には25年を超えるような長期の貸出と認識されていても、実際には、他の金融機関への借換を含む様々なかたちでの期限前返済がかなりの程度行われているのが実態である。したがって、長期の貸出のうち実際にどの程度の割合で期限前返済がなされるかは、住宅ローンの生涯収益を考える上で非常に重要な要素であると考えられる。

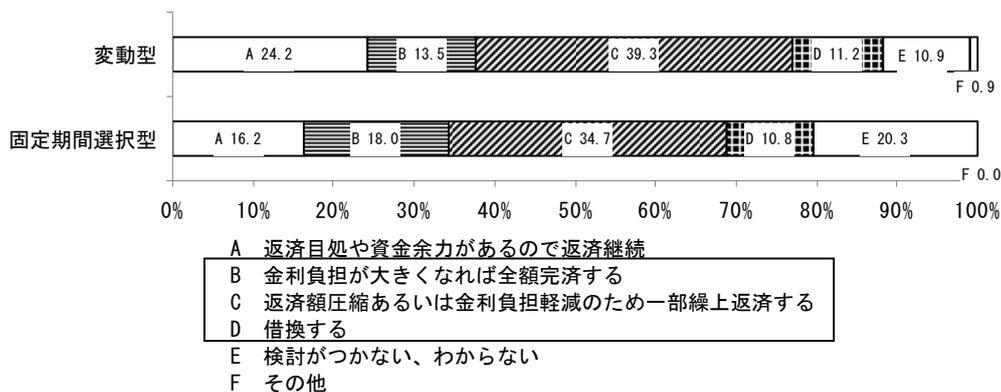
(図表7) 住宅ローンの「約定時の貸出期間」と「完済期間」の差



(出所) 住宅金融支援機構「民間住宅ローンの貸出動向調査」

また、図表8に示されているように、多くの債務者は金利上昇時のコスト増大への対応として、「繰り上げ返済」や「他の金融機関への借換」を考えている。こうした要素も期限前返済を考える上で重要な点である。

(図表8) 金利上昇に伴う返済増加額への債務者の対応 (変動型・固定期間選択型を選択している場合)



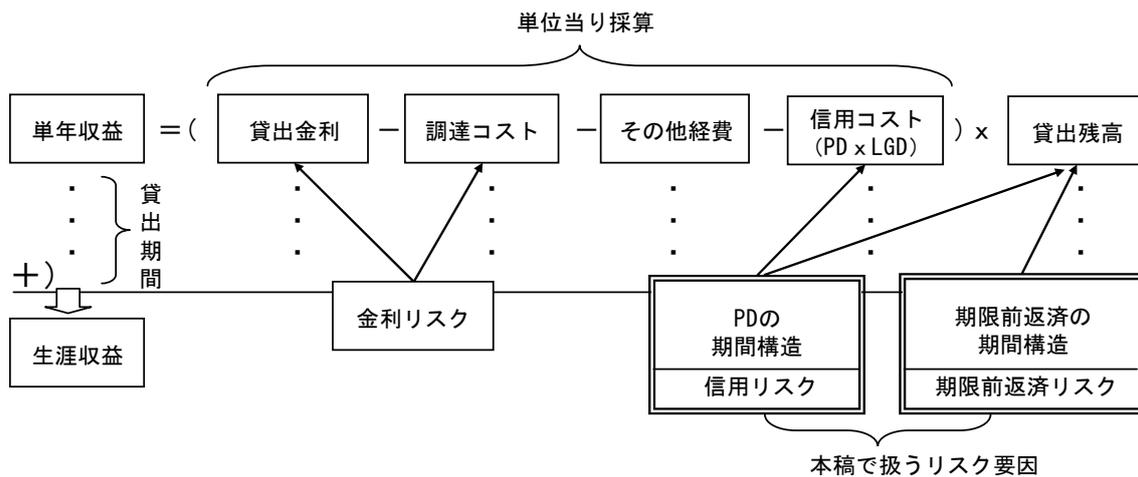
(出所) 住宅金融支援機構「民間住宅ローン利用者の実態調査」(調査時点: 2011年6月)

(2) 住宅ローンの生涯収益とデフォルト確率、期限前返済が及ぼす影響

日本銀行[2007]では、金融機関にとっての住宅ローンの主なリスクとして、信用リスク、金利リスク、期限前返済リスクの三つを挙げた。生涯期間を通じた住宅ローンのリスクおよび収益性の適切な把握という観点からは、これらのリスクが貸出の全ての期間を通じてどのように変化していくのかに関する予想が必要である。

図表9は、住宅ローンの生涯収益の計算方法について概念的に整理したものである⁵。具体的には、単年毎の収益について、貸出金利収入から調達金利および各種費用を差し引いて計算し、それを約定貸出期間全体について積算することにより生涯収益が得られる。貸出金利や調達金利は、将来の金利変動による金利リスクの影響を受けるほか、費用の一部である信用コストは、期間中のPD変動の影響を受ける。同時に、将来の貸出残高は、期間中の期限前返済やデフォルトの発生の影響を受ける。

(図表9) 住宅ローンの生涯収益の計算のイメージ



例えば、信用リスクについて、貸出の全ての期間を通じたPD（以下、累積PD⁶）と全ての期間を通じた回収率（累積回収率）の予想に基づいて信用コストの平均予想額（EL）を計算する場合、「当初残高が貸出期間中に減少すること

⁵ 本稿では、生涯収益の計算については、PDの期間構造および期限前返済の期間構造の影響に着目して単純化しているため、ここでは保証料や保険料の影響などの生涯収益の水準に影響を与えるその他の要因は除外している。また、単年収益の積算においては、将来の収益を現在価値に割り引くという処理は行っていない。割引現在価値ベースの生涯収益を計算することも可能だが、その際には割引率の将来時系列（一般的に金利の期間構造に相当）が必要となる。金融機関全体のALM、収益を見る際に、割引現在価値の概念を導入する場合は、適切な割引率を使用することにより住宅ローンの生涯収益も同様に割引現在価値で考えることも可能である。

⁶ 金融機関の実務では、「累積PD」は「貸出の全ての期間中のデフォルト発生総数／実行時総件数」で定義されることが多いとみられる。

を考慮に入れるか否か」で計算結果が異なる。より適切に信用コストの見積りを行うには、貸出期間中の各年における貸出残高の予想に基づいて信用コストの発生を予想し、その累積額を計算する必要がある。こうした計算には、PD および期限前返済の期間構造に関する予想が不可欠である。同様に、住宅ローンの全ての期間を通じた生涯収益を計算する上でも、PD および期限前返済の期間構造に関する予想が必要となる。

BOX デフォルト確率および期限前返済の期間構造

(1) PD の期間構造

住宅ローンが企業向け貸出と大きく異なるのは、債務者が個人であるという点に加え、貸出期間が20年などと長期に及ぶ点である。このため、住宅ローンのPD推計を行う際には、貸出の全ての期間を通じた累積PDだけでなく、経過年数（あるいは月数）毎のPDの時系列的な変化（PDの期間構造⁷）も重要になる。

PDの期間構造とは、例えば、3年目までデフォルトせずにいた債務者が4年目にデフォルトする確率が5%といった「条件付PD」（以下、限界PD⁸）を時間経過に沿ってつないだものである（この例では、4年目の限界PDが5%）。

累積PDと限界PDは、全期間中におけるデフォルト数の総和（累積デフォルト数）は等しいという意味で関係している。

(2) 期限前返済の期間構造

期限前返済の期間構造についても、基本的な考え方は、PDの期間構造と同じである。貸出約定時からの経過年数（あるいは月数）毎の期限前返済の発生率の時系列的な変化を期限前返済の期間構造と呼ぶ。PDの場合と同様、各時点で前期末までに期限前返済されずに残った貸出について、今期に期限前返済される確率という意味で、条件付の期限前返済の発生率を時間経過に沿ってつないだものである。

期限前返済の期間構造は、貸出残高の変動を通じて住宅ローンの生涯収益に大きな影響を与えるため、生涯収益の適切な把握にはPDの期間構造と同様、非常に重要な要素である。

図表10は、主に「PDや期限前返済の期間構造による違いが住宅ローンの生涯収益にどの程度影響するか」について、ごく簡単なケースを想定して試算したものである。具体的には、図表9の生涯収益の計算の考え方に沿って、一債務者当りの住宅ローンが返済されるまでの各年における金利収入、調達コスト、経費、信用コストの推移を計算し、それらを積算することで生涯収益を計算した。

⁷ 経過年数に応じた変化という意味で、「デフォルトのシーズニング効果」とも呼ばれる。

⁸ 債務者の「限界PD」は、「期間中（1年等）のデフォルト発生件数／期初の債務者数」と定義されることも多い（後述の生存時間分析の「ハザード率」に相当する）。分母の期初の債務者数は、当初債務者数と比べ、融資実行時以降の累積デフォルト発生数だけ減少したものである。

試算では、全部で7つのシナリオを想定した（計算の簡単化のための想定についての詳細は図表10の試算の前提等を参照）。ベンチマークとしてのシナリオ1は、『PDの期間構造』を想定する一方、『期限前返済は貸出期間中発生しない』と想定した。

シナリオ2では、PDの期間構造に加え、『期限前返済の発生（期間構造）』を考慮したことから、シナリオ1との対比で、生涯収益ベース（経費・信用コスト控除後収益）で2割程度の減益効果となった。期限前返済の発生により貸出残高がシナリオ1対比で減少することが金利収入の減少の主な要因となった。

シナリオ3、シナリオ4では、PD（シナリオ3）および期限前返済（シナリオ4）の期間構造に関し、それぞれシナリオ2の場合と比べて、『より前倒しでピークを迎える形状』に変更して生涯収益を計算した⁹。結果をみると、シナリオ1と比べた生涯収益の減少幅は、それぞれ3割弱（シナリオ3）、4割弱（シナリオ4）とシナリオ2に比べて大幅に拡大している。この例では、PDや期限前返済の期間構造の形状をどのように想定するかによって生涯収益が大きく影響される可能性があることが示されている。

シナリオ5、6では、『金利優遇などの営業施策』を実行した場合の生涯収益に及ぼす影響を試算した。シナリオ5では、『当初10年間の金利優遇（ $\Delta 1.0\%$ ）』の導入を想定し、シナリオ6では、『営業施策の間接効果』として金利引下げに加え、貸出期間中のPDの水準および期限前返済率の水準が上昇する想定を加えた¹⁰。結果をみると、シナリオ5ではシナリオ1との対比で7割を超える生涯収益の減少となり、さらにシナリオ6では、8割弱の生涯収益の減少となった¹¹。

シナリオ7では、さらに『金利優遇をどの程度まで進めたら生涯収益がゼロになるか』というリバーズ・ストレステストを行った。営業施策の間接効果については、シナリオ6と同じ仮定を置いた。当初10年間の金利優遇の幅について、シナリオ6の $\Delta 1.0\%$ から同 $\Delta 1.6\%$ に広げると、生涯収益がゼロになるとの結果を得た。

⁹ 貸出期間中の平均PDおよび平均期限前返済率は、期間構造の変更前後で変わらないという制約を設けた上で形状を変更した（詳細は図表10の試算の前提を参照）。

¹⁰ 積極的な金利優遇などの営業施策の間接的な影響については、①相対的に信用度の低い顧客を囲い込む結果、デフォルトの発生が増える、②新たに獲得した優良な顧客からの期限前返済も増える、というストレス的な状況を想定した。具体的には、シナリオ6では、PDおよび期限前返済の期間構造の形状はシナリオ4、5（前倒しで高いピーク）の形状を維持しつつ、単純に各時点の水準を2割増とした。

¹¹ これらのシナリオの設定では、金利、経費、PDおよび期限前返済の発生率の水準などを適宜のレベルに設定したほか、営業施策の間接効果も仮想的に水準を設定した。このため、実際の生涯収益の水準や減少幅は、ここでの試算結果とは変わり得る点には注意が必要である。また、「一債務者当り」の住宅ローンの生涯収益についての試算であるため、営業推進に伴うボリューム効果などは取り扱っていない。これは、例えば、住宅ローン市場が飽和状態にあり、借換防止のために金利優遇を行っているケースなどに当てはまる。

(図表10) 住宅ローンの生涯収益に関するシナリオ別の試算例

－ PD および期限前返済の期間構造などが金利収益に与える影響

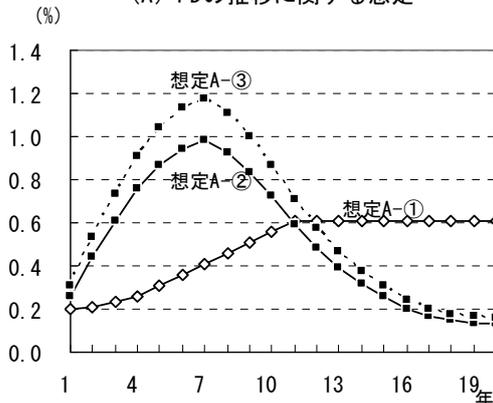
	シナリオを構成する要因		
	期間構造		営業推進策
	PD	期限前返済	
シナリオ1	上昇の後、横ばい	全く発生しない	当初金利優遇 (10年間△1.0%)
シナリオ2		上昇の後、横ばい	
シナリオ3	前倒しで高いピーク	前倒しで高いピーク	
シナリオ4			
シナリオ5			
シナリオ6	前倒しで高いピーク + 全期間で2割増の水準	前倒しで高いピーク + 全期間で2割増の水準	当初金利優遇 (10年間△1.6%)
シナリオ7	前倒しで高いピーク + 全期間で2割増の水準	前倒しで高いピーク + 全期間で2割増の水準	

	シナリオ1	シナリオ2	シナリオ3	シナリオ4	シナリオ5	シナリオ6	シナリオ7
当初元本、期間	100、20年						
返済形態	元金均等返済						
貸出金利 (A)	2.5% (全期間固定)				当初10年1.5%、 以降2.5%		当初10年 0.9%、 以降2.5%
調達金利 (B)	0.5% (全期間固定)						
金利収益 (C) (A-B)	20.5	16.0	15.7	13.8	7.8	7.1	3.9
経費 (D)	経費率0.3% (対貸出残高、全期間固定)						
信用コスト (E)	1.6	1.2	2.0	1.7	1.7	1.9	1.9
PD (下図)	想定A-①		想定A-②			想定A-③	
LGD	0.4 (全期間固定)						
期限前返済 (下図)	想定せず	想定B-①		想定B-②		想定B-③	
経費・信用コスト 控除後収益 (C-D-E)	15.8	12.4	11.4	10.0	4.0	3.3	0.0
シナリオ1との比較		△3.4 (△22%)	△4.4 (△28%)	△5.8 (△37%)	△11.8 (△75%)	△12.5 (△79%)	△15.8 (△100%)

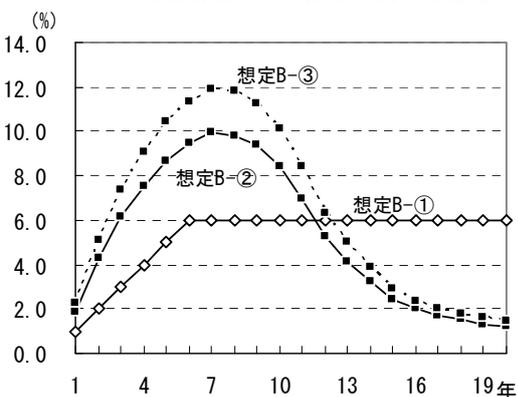
PD、期限前返済の期間構造の変化の影響

営業推進策の影響

(A) PDの推移に関する想定



(B) 期限前返済率の推移に関する想定



[試算の前提]

- ・ PDの期間構造（図A参照）：
「上昇の後、横這い（10年目まで上昇してその後横ばいで推移）」（想定A-①）、「前倒して高いピーク」（想定A-②）の二つの期間構造のほか、「前倒して高いピーク」を全期間で2割増しにしたケース（想定A-③）を想定。想定A-①と想定A-②は、図Aの各線の下の面積が等しくなるように設定（期中平均が等しいという制約）。
- ・ 期限前返済の期間構造（図B参照）：
「上昇の後、横這い（6年目まで上昇してその後横ばいで推移）」（想定B-①）、「前倒して高いピーク」（想定B-②）の二つの期間構造のほか、「前倒して高いピーク」を全期間で2割増しにしたケース（想定B-③）を想定。想定B-①と想定B-②は、図Bの各線の下に面積が等しくなるように設定（期中平均が等しいという制約）。
- ・ 住宅ローンの金利水準および金利優遇の影響：
金利水準（2.5%）については、現在の変動金利水準の例（図表3）を参考に設定。シナリオ5では、当初期間10年における金利優遇（現在の変動金利ベースの金利優遇例を参考に△1.0%の優遇幅を想定）が金利収入減をもたらす効果（直接効果）のみを想定。シナリオ6では、直接効果に加え、デフォルト増（PDの上昇）、期限前返済の増加という積極的な営業推進策による間接効果（信用度の低い顧客が増えると同時に、信用度の高い顧客の期限前返済率が高まる）も加味した。シナリオ7では、生涯収益がゼロとなるような金利優遇幅を想定し、営業推進策による間接効果はシナリオ6と同様に設定。
- ・ デフォルト、期限前返済および貸出残高の関係：
単純化のため、デフォルトの発生と期限前返済の発生は、独立事象として扱い、前期末の貸出残高にPD、期限前返済率を乗じてそれぞれの期間中の発生額を計算し、貸出残高に反映させた。デフォルト、期限前返済により貸出残高・期間は通常変化することが予想される。各期の貸出残高はこうした変動の幅を考慮した「期待値」と考えることができる。
- ・ その他：
単純化のため、期限前返済された資金が再び貸出される可能性や資金調達への影響などALM的な変動要因は考慮していない。保証料や各種手数料などの金利外収入はゼロと想定した。また、実務においては、元利均等返済が多いとみられるが、ここでは計算の都合上、元金均等返済とした。

最近、多くの金融機関において、こうした住宅ローンの生涯収益を把握することの重要性に関する認識が高まってきている。特に、長期の貸出期間中のリスクおよび収益管理を適切に行っていく上で、「PDおよび期限前返済の貸出期間中の推移についてどのような想定をおくべきか」が、一段と注目されるようになってきている。金融機関では、PDおよび期限前返済の貸出期間中の推移について、モデルを構築・導入し、データに基づくより適切な予想を行おうとする事例が増える傾向にある。

以下では、こうした問題意識から、「PDの期間構造の推計」、「期限前返済の期間構造の推計」に関する主な手法について、金融機関の実務で使われているものを中心に整理しつつ、モデル構築上の留意点やアウトプットを評価する上での留意点について説明する¹²。さらに、経営陣や営業推進・リスク管理部署がともに認識を深め共有しておくべきモデル利用上の留意点についても述べる。

¹² 本稿では、PDの期間構造の推計と期限前返済の期間構造の推計をそれぞれ別個のモデルとして紹介する。ただし、これら2つの事象は互いに影響し合う側面があるほか、2つのモデルには類似の説明変数が含まれていることも多い。このため、より発展的な試みとして両者の相互作用を推計に盛り込むなどの工夫を加えることも有益と考えられる。

3. デフォルト確率の期間構造の推計

(1) デフォルト確率の利用目的と推計手法

①利用目的に即したデフォルト確率の推計の必要性

住宅ローンの PD¹³を推計する場合、主に「初期審査」、「途上与信管理」という二つの用途が考えられる。

初期審査では、一般に、貸出実行時点で得られる債務者属性などのデータを基に貸出実行時点における PD 推計が行われ、担保による保全状況などの要素も加味して貸出の実行可否や金利・保証料などの貸出条件が決められる。初期審査のプロセスにおいて、累積 PD（あるいはそれに基づく各種スコア）を債務者の信用度の順序尺度として利用することは、審査の迅速化・客観化に寄与すると考えられる。また、PD の期間構造に基づく生涯収益の計算は、住宅ローンの収益性評価の高度化に寄与することが期待される。

途上与信管理では、一般に、金融機関が既に保有している住宅ローンポートフォリオのリスクや期待収益に関する状況およびその変化を把握することが重視される。具体的には、貸出実行時点から一定の期間が経過した時点で、債務者属性の変化やその他の環境変化などを織り込んで PD 推計を行い、リスクの変化の把握やリスク量の計算などが行われる¹⁴。こうして得られた情報は、リスク管理面に加え、営業推進面でも利用されることが多い¹⁵。

既にみたように、PD の概念には、累積 PD と限界 PD (PD の期間構造) の二つがある (前掲の BOX 参照)。図表 1 1 は、初期審査および途上与信管理におけるこれら二つの PD の主な用途について簡単に整理している。累積 PD は、貸出期間全体を「一期間」として、その期間中にデフォルトが発生する確率であり、期間中のどの時点でデフォルトが生じるかは問わない。期間の長さ

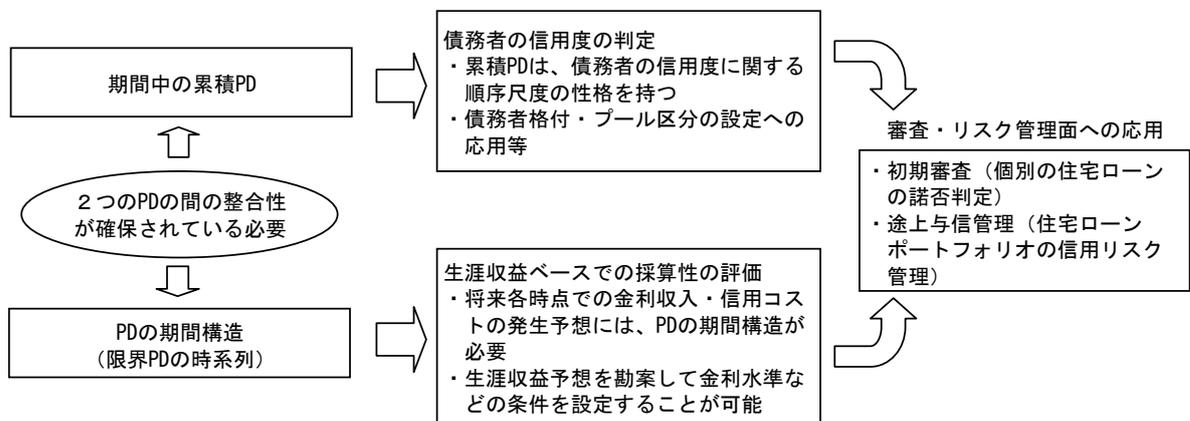
¹³ 本稿では、基本的に、PD をある債務者が一定の期間内にデフォルトする確率と定義している。PD の定義に関しては、信用度に関して同質的な債務者群を想定した上で、例えば 100 人中 3 人がデフォルトする確率 (3%) といった定義を用いても問題ない。本稿でも、住宅ローンのポートフォリオと関連して説明した方がわかりやすいと思われるケースでは、後者の考え方に基づく PD も適宜用いて説明している。また、日本銀行[2007]では、住宅ローンのデフォルトの定義について、一定の延滞日数、保証会社の保証履行、法的破綻または一定以下の債務者区分などとする金融機関が多いとしていた。こうしたデフォルトの定義は、推計を行う前に明確に決められている必要がある。

¹⁴ 信用リスク量 (VaR) の計算に際しては、債務者を信用度などに応じて複数の同質的な「プール」に分割した上でポートフォリオのリスク量計算が行われる。こうした区分の設定においても推計された PD の値が分割基準として用いられることが多い。

¹⁵ 一般に、初期審査と比べて途上与信管理の方が、貸出実行後のデータも得られるなど、利用可能な情報は相対的に多い。このため、PD の期間構造の推計においては、リスク状況の分析などの目的でより多面的な利用が期待される途上与信管理に用いられる手法の方が初期審査のモデルよりも複雑になっていることが多い。この点は、期限前返済の期間構造の推計の場合も同様である。

は、本来貸出実行から満期までの期間であるが、実務では、データ不足の問題から満期までではなく、一部の期間に短縮して累積 PD の推計が行われることもある¹⁶。累積 PD は、債務者の信用度に関する順序尺度としての意味を持っており、債務者格付やプール区分の設定を行う際の基準として利用される。例えば、住宅ローンの初期審査において債務者の信用度（「デフォルトし易さ」）を判定する際には、一般に累積 PD の高さが判断の基準とされることが多い。一方、PD の期間構造は、初期審査あるいは途上与信管理において、住宅ローンの採算性・リスクを生涯収益に基づいて評価する上で必要とされる。具体的には、生涯収益を計算するには、貸出期間中の各時点における金利収入および信用コストの予想額が必要となり、これらの予想額の計算には、PD の期間構造が不可欠である¹⁷。

（図表 1 1）累積PDとPDの期間構造の性格・用途



「累積 PD」と「PD の期間構造」との関係については、次の点に留意が必要である。第 1 に、両者の間には整合性が確保されている必要がある。例えば、同一の住宅ローンポートフォリオに関して、10 年間ににおける累積 PD を基に予想されるデフォルト数と、同じ 10 年間に PD の期間構造を基に予想されるデフォルト数は、本来、同数となることが期待される¹⁸。信用コストや生涯収益の予想を行う上では、こうした整合性の確保には注意が必要である。

¹⁶ 例えば、20 年の満期に対して、当初 10 年間の累積 PD を推計する場合などがある。金融機関によっては、データ不足の問題などから、こうした対応を取らざるを得ないことも少なくない。この場合、本来の満期までの期間に対応する累積 PD を得るには、何らかの手法によって PD の水準を変換する必要がある。

¹⁷ 正確には、PD の期間構造に加え、期限前返済による貸出残高の変動の影響も考慮する必要がある。すなわち、図表 9 で示したようにデフォルトおよび期限前返済の双方が将来の貸出残高に影響する。

¹⁸ 実際の住宅ローンのポートフォリオでは、通常の返済および期限前返済、貸出の新規実行などの貸出残高に影響する複数の要因が存在するため、こうした関係が厳密に成立していることを確かめるのは容易ではない。

第2に、PDの期間構造が得られていれば、これを基に累積PDを計算することができる一方で、累積PDがわかっているだけでも、それだけではPDの期間構造を計算できるわけではない。その意味で、モデルを用いてPDの推計を行う場合は、そのモデルがどの概念のPDの推計に有効なものかという点に注意して、モデルの選択を検討する必要がある。

②デフォルト確率の推計に用いられる手法

住宅ローンの累積PDおよびPDの期間構造の推計には、各種の統計モデル¹⁹をはじめとする様々な手法が用いられている。まず、累積PDの推計に関しては、ロジット回帰モデル²⁰、ツリー分析（決定木モデル²¹）、ハザードモデル（生存時間分析）²²などの手法が用いられていることが多い²³。ロジット回帰モデル、ハザードモデルのいずれも、「デフォルト」事象（「デフォルトする」、「しない」という2値の事象）の発生確率の推計およびその要因分析に用いることができる。ロジット回帰モデルやツリー分析などは、基本的に1期間のPD推計²⁴を行うモデルであり、ハザードモデルは多期間のPD推計を行うモデルである。

1期間のPD推計モデルについて、例えば、ロジット回帰モデルは、一定の期間内でのデフォルト発生の要因分析（累積PDの推計）が可能である（ロジット回帰モデルの詳細は、補論1参照）。ロジット回帰モデルは、実際に企業向け貸出²⁵や消費者ローンの債務者のPD推計によく用いられている。しかし、PDの期間構造に関しては、ロジット回帰モデルなどの1期間のPD推計モデルで直接推計するのは難しい。ロジット回帰モデルにおける1期間は、

19 本稿では、企業の財務指標、個人の属性、各種定性情報をもとに、企業・個人のPDを統計手法によって推計するモデルを幅広く「統計モデル」と呼んでいる。

20 ここで言及しているロジット回帰モデルは、1期間におけるイベントの発生の有無を推計対象としている。文献によっては、「ロジスティック回帰モデル」と表記されている場合もある（モデルの定義の詳細については、補論1参照）。

21 決定木モデルでは、顧客属性（年齢、職業等）、返済能力（DTI、LTV等）、個人情報などをについて、決定木（decision tree）と呼ばれる分類手法を適用し、どのような状態の組み合わせでデフォルトが発生するかを調べ、予測モデルを構築する。ロジット回帰モデルなどと組み合わせて使用されることも多い。

22 ハザードモデルは、元来、医療や工学の分野で個体の死亡や機械の故障発生までの時間を分析するなどの目的で用いられてきた。生存率という個体の生死に関する言葉が使われているのもそうした背景による。

23 企業向け貸出の場合のPD推計に関しては、これらの手法以外にも企業のバランスシートから倒産事象の発生をモデル化するアプローチも存在する。個人が債務者である住宅ローンの場合は、バランスシートからデフォルトをモデル化することが困難なこともあり、こうしたアプローチが実務で用いられることは少ない。

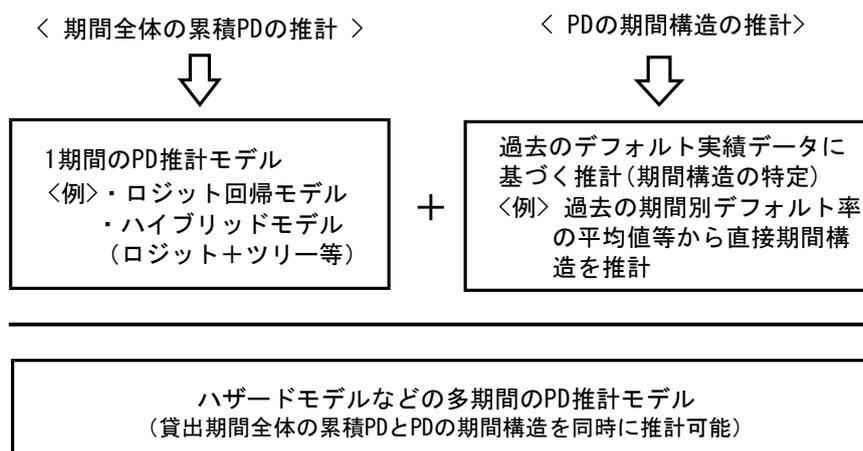
24 現在時点と将来の2時点を想定し、その間のいつの時点で発生するかは問わず、期間中にデフォルトが発生する確率を推計する。

25 企業向け貸出に関する信用格付けの手法として、ロジット回帰モデルによるスコアリング手法が幅広く導入されている。

例えば企業のPDを測定する場合のように「1年」とされることもあれば、住宅ローンの貸出の全期間など長期に及ぶ場合もある。このため、複数期間に及ぶ期間構造の推計を一括して行うには適していない²⁶。したがって、ロジット回帰モデルによって、住宅ローンの累積PDの推計を行っている場合、これと整合的なPDの期間構造を得るには別途の工夫を講じる必要がある（図表12）。これに関し、金融機関の実務において、比較的よく用いられているのは、住宅ローンに関する過去のデフォルト実績から計算された期間別のデフォルト率を単純に将来の推計値とする方法である。十分な長さの時系列データが得られるなどの条件が満たされていれば、過去実績に基づくPDの期間構造の推計は実務上有効な手法と考えられる。

多期間のPD推計モデルとしてよく用いられるハザードモデルは、時間経過に伴うリスクの変化を各時点における住宅ローンの「生存率」として直接分析対象とする。PDの期間構造の推計とともに、それと整合的な累積PDの推計も同時に行われるため、PDの期間構造をより扱い易い（図表12）。また、ハザードモデルでは、一定の条件の下で時間経過に伴うPDの変化とPDの水準に影響する他の要因の寄与を分離して扱うことが可能である。このため、PDの期間構造および累積PDに関する各種要因の影響を統合的に分析することができる。ハザードモデルは、PDの時系列的変化のみならず、期限前返済による住宅ローン残高の変化の推計にも応用されている。

（図表12）累積PDおよびPDの期間構造に用いられる手法の整理



以下では、PDの期間構造の推計手法として、「過去のデフォルト実績データに基づく推計」と「ハザードモデルを用いた推計」について説明する。

²⁶ ロジット回帰モデルの概念を多期間に拡張したモデルも存在するが、実務での応用例は少ない（詳細は補論1参照）。

(2) 過去のデフォルト実績データに基づく期間構造の推計

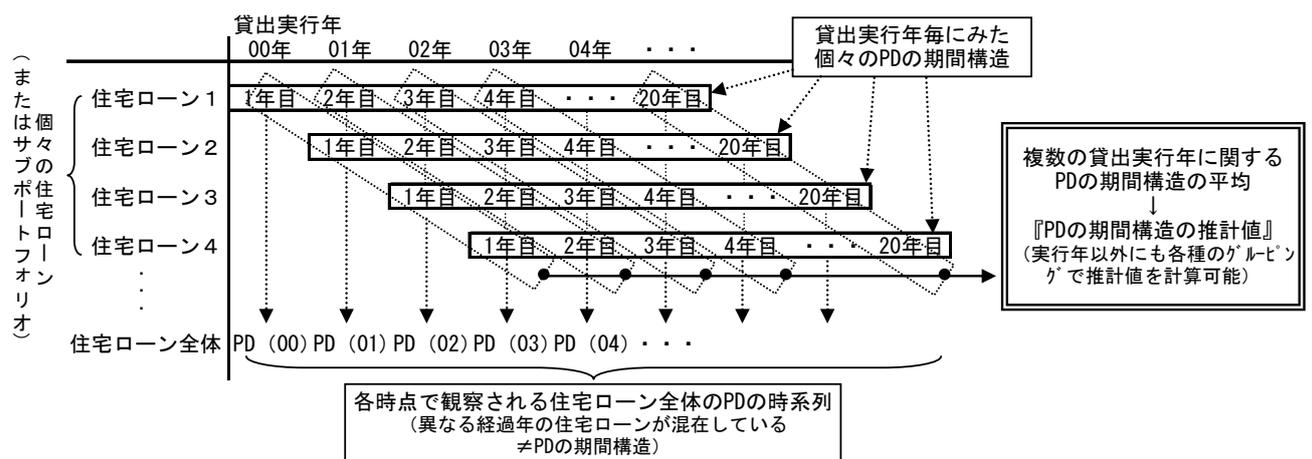
①過去のデータに基づく推計方法と工夫

図表13は、過去のデフォルト実績データから住宅ローンのPDの期間構造の推計値を求めるアプローチの事例である。

まず、住宅ローンを実行年からの経過年数によって分類し、年限毎のデフォルト発生数を調べ、デフォルト発生比率（期間中のデフォルト発生数／経過年時点での期初残存件数）を計算する。ここで、各年における住宅ローンの期初残存件数は既往のデフォルトの発生によって変化する²⁷。次に、このデフォルト発生比率を限界PDとみなし、これを順に接続していくことで特定の貸出実行年に対応したPDの期間構造を求める（「貸出実行年毎にみた個々のPDの期間構造」）。最後に、全ての貸出実行年についてPDの期間構造を平均して住宅ローン全体の平均的なPDの期間構造の推計値が得られる（「複数の実行年に関するPDの期間構造の平均」）。

推計方法に係る工夫としては、第1に貸出実行年に着目した住宅ローンのグルーピングがある。PDの水準や期間構造の形状は、貸出実行年における営業推進への取組状況や景気・金利環境、あるいは制度的な特殊要因などによって影響を受ける可能性がある。貸出実行年毎のグルーピングは、そうした影響の有無を見つけやすくする上で有効である。第2に、全体の平均的なPDの期間構造を推計する際には、推計精度向上の観点から、各年における個別の変動要因をなるべく取り除いておくことが望ましい。そのためには、実行年毎の全ての期間構造を平均する、あるいは特殊要因を除去するなどの対応が必要である。

(図表13) 貸出実行年とPDの期間構造の関係



²⁷ 住宅ローンの残存件数（および金額）は、期限前返済の影響も受ける。過去のデータから限界PDを計算する場合、より厳密には、期限前返済による分母への影響を除いた上で限界PDを計算することになる。この場合、期限前返済の推計を行う場合は、デフォルト発生による返済は考慮しない扱いとするなど、整合性に配慮する必要が生じてくる。

②過去データに基づく推計に関する留意点

留意点としては、第1に、住宅ローンのPDの推移をみる際には、「貸出実行年毎にみた個々のPDの期間構造」と「各時点で観察される住宅ローン全体のPDの時系列」との違い（図表13）を認識しておく必要がある。例えば、営業推進の結果、住宅ローンの実行が新たに大幅に増加したようなケースでは、比較的経過年数が短い住宅ローン（期間構造上、PDが低い）の残高が増加する。その結果、その時点で観察される住宅ローン全体のPDが表面上低くなる可能性がある。これに対し、貸出実行年からの経過期間別にみたPDの期間構造をチェックすることにより、PDに実態的な変化が現れていないかを検証しておく必要がある。

第2に、PDの期間構造は、住宅ローンのポートフォリオの属性（商品性、債務者の年齢・所得構成等）に大きな変化があれば、その形状が異なってくる可能性がある。貸出実行年の違い以外にも、例えば、所得水準の高い債務者のPDの期間構造と所得水準の低い債務者のPDの期間構造が異なることも予想される。統計モデルを用いずに過去データから予測値を得るアプローチの場合、どのような要因がどの程度PDの期間構造に影響を与えるかを定量的に把握するのは困難である。その意味で、貸出実行年や各種の債務者属性などに基づくグルーピングによってPDの期間構造に差が生じるか否かを把握しておくことには意味がある。こうしたグルーピングによるPDの期間構造の違いが予め把握できていれば、それらの要因が将来も継続するか否かなどを考慮することで、PDの期間構造の予測値に反映させることも可能である。

第3に、過去データから直接計算したPDの期間構造は、必ずしも滑らかな形状を示さず、貸出実行年の要因を含む各種の特殊要因の影響から、年毎の限界PDの変動が大きくなってしまうことも少なくない。こうした場合には、多項式による近似や特定の確率分布による近似などの手法でPDの期間構造を滑らかにする工夫がなされることもある。また、過去データから計算したPDの期間構造と、ロジット回帰モデルなどで求めた累積PDとは、前述の整合性（2（2）BOX、図表11参照）が維持されている必要があり、両者に差がある場合には補正措置を取るなどの工夫を施す必要がある。

第4に、過去のデフォルト実績に基づいたPDの期間構造の推計については、デフォルトに関する時系列データの蓄積が十分でない場合が少なくない、あるいは経過年数による分類が十分できないことも多い。こうしたデータ面の制約がある場合、PDの期間構造の安定的な推計が難しいという問題が生じる点には注意が必要である。

(3) 比例ハザードモデルによる推計

①ハザードモデルの概要

ハザードモデルでは、基準の時点（貸出実行時）からイベント（債務者のデフォルトや期限前返済）が生じるまでの時間（年数、月数）を確率変数とみなし、期間中の各時点における限界PD（ハザード率²⁸）の推移（期間構造）を推計する。デフォルトせずに残るローン残高の当初合計残高に対する割合は生存率（ $= 1 - \text{累積 PD}$ ）と呼ばれ、ハザード率から一定の計算式によって得られる（ハザードモデルの仕組みの詳細は補論2参照）。すなわち、ハザードモデルを用いることで、住宅ローンの限界PDと累積PDを同じ分析の枠組みの中で一括して扱うことが可能になる。「ハザード率の推移」および「生存率の推移」は、それぞれ「ハザード関数」、「生存関数」（ともに経過時間の関数）と呼ばれる。

ハザードモデルでは、正確な生存時間がはっきりわからないケースのデータ²⁹も、有効なデータとしてハザード率、生存率の推計・要因分析に利用される。例えば、他行への借換などで満期以前に返済され、その後、デフォルトしたかどうかわからないケースなども推計に反映される³⁰。なお、ハザードモデルには、ハザード関数に関する想定の違いなどから様々な種類のモデルが存在する（図表14、各モデルの詳細は補論2参照）。PDおよび期限前返済の期間構造の推計には、モデルの扱い易さ、わかりやすさの観点から比例ハザードモデル³¹が比較的好く用いられる。

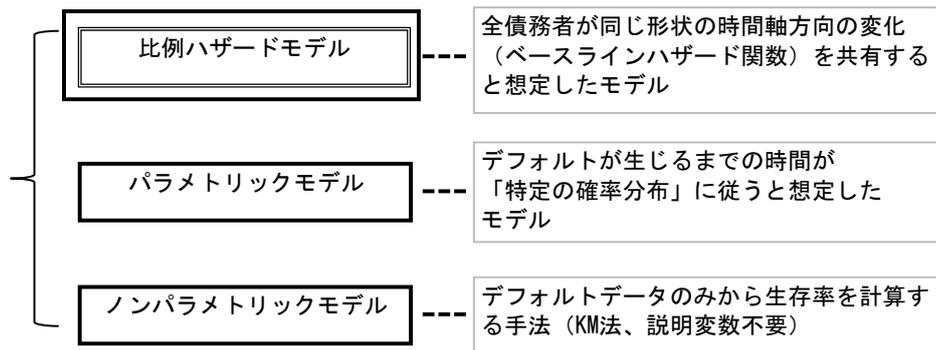
²⁸ ハザード率は、イベントが生じる確率 P を観測インターバルの時間 Δt で除したもの ($P/\Delta t$) であり、単位時間当たりのイベントの発生確率である。ハザード「率」は、時間 Δt が極めて短くなった場合、1以上の値を取り得る。一方で、「確率」は定義により0と1の間の値をとるという点で厳密には両者は異なる性格を有するものである。本稿では、基本的に $\Delta t=1$ としてハザードモデルの説明を行っている（離散時間モデルの考え方）。

²⁹ ハザードモデルでは、こうした生存時間が明確にわからないデータを「打ち切りデータ」(censored data、観察が打ち切られたという意味)と呼ばれる。住宅ローンの例で言えば、観測期末時点で返済期限が到来していないもの（将来デフォルトする可能性がある）、期中に借換されたもの（その後デフォルトしたかどうか不明）などがある。これらは、将来の方向に打ち切られているという意味で「右打ち切り」と呼ばれる。一方、過去の方向で打ち切られたものは「左打ち切り」と呼ばれ、データベースの未整備が原因で貸出の開始時点が記録されていない、などの例がある。

³⁰ 本稿では詳しく扱わないが、ハザードモデルは、複数回延滞などの繰り返し発生するイベントを扱い易いという側面もある。

³¹ 本稿では、Coxの比例ハザードモデル(Cox[1972])を比例ハザードモデルと表記している。Coxは、同モデルを考案したイギリス人統計学者。基本的な比例ハザードモデルは、経過時間による影響に関して特定の確率分布を想定しないことから、分類上、「セミパラメトリックモデル」の一つとされることが多い。本稿では、セミパラメトリックモデルのうち使用される頻度が高い比例ハザードモデルを単独のカテゴリーとして紹介した。

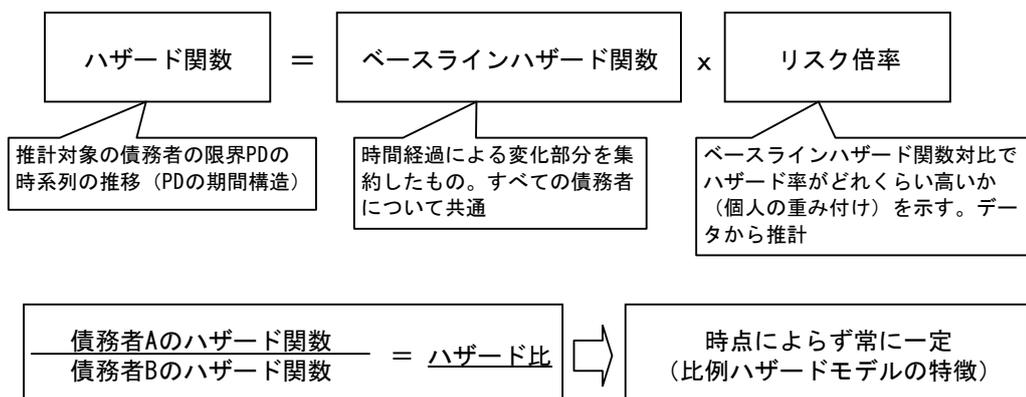
(図表 1 4) ハザードモデルの種類



②比例ハザードモデルによるPDの期間構造の推計

比例ハザードモデルでは、ハザード関数は「経過時間のみによって変化する部分」(ベースラインハザード関数)と「経過時間には直接依存しない部分」(リスク倍率³²)の二つに分解される(図表15)。ベースラインハザード関数は、全ての債務者に関して同じであると仮定される。これは、全ての債務者で「PDの期間構造の基本形状が同じ(相似形)である」ことを意味する。ベースラインハザード関数に債務者の属性などの要因によって決まるリスク倍率を乗じたものが「各債務者のPDの期間構造(図表16のハザード関数)」となっている。リスク倍率は、通常、過去のデフォルト実績に対して債務者属性などを説明変数とする回帰分析を行って推計される(詳細は補論2参照)。

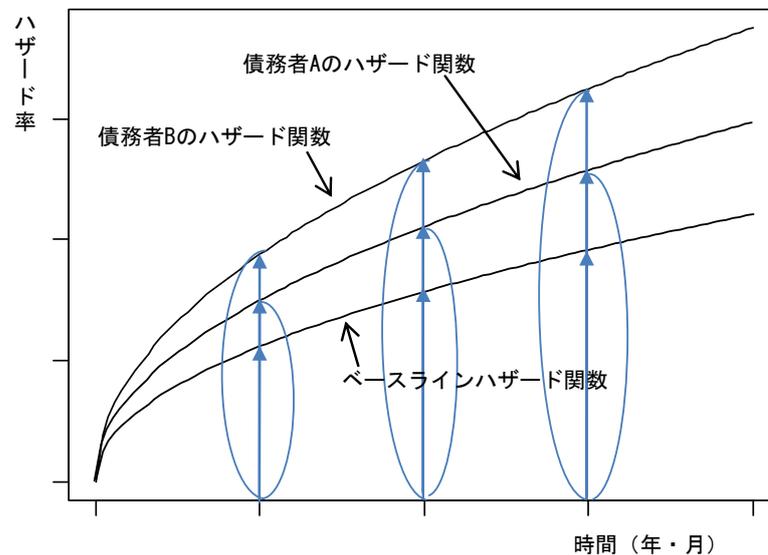
(図表 1 5) 比例ハザードモデルの仕組み



³² 「リスク倍率」という用語は、比例ハザードモデルをわかりやすく説明するために本稿で用いた用語であり、ハザードモデルで一般的に用いられている用語ではない。比例ハザードモデルでは、まず、このリスク倍率に関するパラメータを過去のデフォルトデータから推計する。ベースラインハザード関数は、推計されたパラメータを用いて事後的に計算される。

比例ハザードモデルでは、「ハザード比（債務者 A と債務者 B の相対的なリスク度の違い）」が重要な意味を持つ。このハザード比は時点に関係なく、貸出実行時でも満期返済時点でも常に一定の値となる（「比例ハザード性の前提」と呼ばれる）。比例ハザードモデルは、比例ハザード性の前提が常に成立することを前提に組み立てられているため、モデルの適用対象となる住宅ローンポートフォリオの全債務者について、この前提が成立していなければならない。図表 1 6 では、個別債務者のハザード関数およびハザード比の関係を例示している（「比例ハザード性の前提」が成立している）。

（図表 1 6）比例ハザードモデルのハザード関数の例
 <債務者Aと債務者Bのハザード比は常に一定値>



比例ハザードモデルの「債務者間のリスク度の比較が容易である」という性質は、モデル利用上のメリットとなり得る。例えば、初期審査においては、貸出実行時点で得られる債務者属性などのデータをもとにリスク倍率への寄与度を計算することで、異なる債務者間のリスクの相対的な高低を経過時間に関わらず判断することができる。

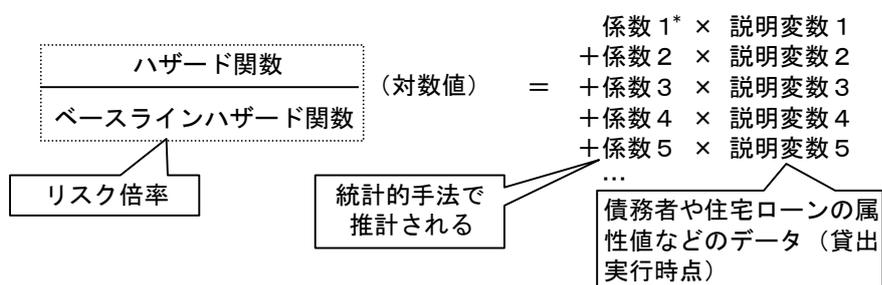
③リスク倍率の決定要因

比例ハザードモデルにおけるリスク倍率の一般的な説明変数³³については、図表 1 7 に示したように、個別債務者や住宅ローンの属性を表す変数として年収などの数値データに加え、性別や業種などのカテゴリーを示すデータも

³³ ハザードモデルでは、「共変量」という用語が用いられることが多い。本稿では、わかりやすさの観点から回帰分析における「説明変数」と表記している。

含まれるのが一般的である³⁴。いずれの説明変数についても、基本的に「貸出実行時点で得られるデータ」が用いられる。例えば、初期審査用のモデルでは、「収入」については貸出実行時の所得水準を変数とするのであって、多くの場合、将来の収入がどう推移するかについての予想値を使うわけではない。比例ハザードモデルにどのような説明変数を組み込むべきかについては、必ずしも明確な基準があるわけではなく、実際のデータに対するモデルの当てはまり度合いなどを基準に様々な試行を経て決められるのが一般的である³⁵。

(図表 17) リスク倍率の推計のイメージと説明変数の例



* 各係数の推計は、部分最尤法と呼ばれる手法で行われることが多い。
ベースラインハザード関数は、すべての説明変数にゼロを代入すれば得られる。

ハザードモデルにおける説明変数の例

	説明変数 (貸出実行時点)
債務者の属性	勤務先 (業種・企業・職種)、年収、年齢・勤続年数、性別、居住地域、預金残高等
住宅ローンの属性	借入額・借入期間、購入物件価格、資金使途 (新築・中古、戸建て・マンション、新規・借換等の情報)、DTI (年収に対する元利金返済の割合)、LTV (担保物件価値に対する借入金額の割合<担保掛目>)、担保状況等

④モデルの評価・検証に関する留意点

モデルの評価・検証は、モデル選択の妥当性、パラメータ推計の確からしさ、データに対する当てはまり (通常のバックテストを含む)³⁶などの観点

³⁴ モデルにこれらの変数が全て含まれていなければならないという意味ではなく、また、これらの変数以外にも有効な変数が存在することも当然あり得る。これらの変数の交差効果の変数に加えられることもある。また、関連性の強い複数の変数を採用する場合は、複数の変数を一つの変数にまとめて合成変数としてモデルに組み込むという工夫がなされることもある。

³⁵ ハザードモデルは、住宅ローンのデフォルトの発生がどのようなメカニズムで生じるのかを直接モデル化しているわけではない。このため、モデルの背景にある理論的な想定から説明変数の候補を選ぶことは困難であり、各種の統計的な指標を用いて当てはまりのよい変数の組み合わせを探するという基準で変数選択がなされるのが一般的である。具体的には、ステップワイズ法などの手法を用いて判断することが多い。

³⁶ モデル推計に関しては、ハザードモデルの場合も、残差分析や尤度比検定によって評価

から行われることが多い。

第1に、リスク倍率のパラメータ推計について、「変数の係数が事前に期待された符号条件を満たすか」については、厳密な確認が必要である。また、データに対する当てはまりについては、モデルの推計に用いた債務者データに対する当てはまりは良くても、新たな債務者に関するPD推計の精度が十分に出ないという、いわゆる「オーバーフィッティング問題」に注意する必要がある³⁷。

第2に、モデル選択の妥当性については、比例ハザードモデルの場合、「比例ハザード性の前提（債務者の相対的なリスク度の違いを示すハザード比が時点に関係なく常に一定の値をとる）が満たされているか」についての検証を行うことが重要である。比例ハザード性の前提が成立しない状況で、比例ハザードモデルを適用することは推計結果に歪みをもたらす危険性がある。

(イ)「比例ハザード性の前提」の検証と問題の回避策

比例ハザード性の前提が成立しない原因としては、リスク倍率の説明変数（職業・業種、年齢、地域性、信用度の違い等）に関して債務者の間に明確な差異が存在し、そうした違いがベースラインハザード関数の形状（限界PDのピークの位置の違い等）に強く影響している場合などが考えられる³⁸。この場合、比例ハザード性の前提は成立しないため、比例ハザードモデルを単純に当てはめることはできない。

債務者間でベースラインハザード関数が異なるとみられる場合の対応策としては、例えば、債務者を「グループ化」した上で比例ハザードモデルを適用する方法が挙げられる。具体的には、比例ハザード性の前提（グループ毎に共通のベースラインハザードの存在を仮定）が成立するように特定の説明変数に関して債務者を複数のグループに分ける。説明変数については、グループ化に用いた変数を説明変数から除外した上で、その他の説明変数にかかる係数は全てのグループで共通と仮定して、通常通りモデル推計を行うことが考えられる。

が可能である。具体的な評価手法の選択は、モデルの推計がどのような手法により行われたかにも依存する。なお、ハザードモデルの残差分析に関しては、打ち切りデータの存在により一般線形回帰モデルの残差分析に比べ複雑な場合が多い。

³⁷ オーバーフィッティングの問題に対しては、例えば、全データをモデル推計用のデータと検証用のデータに分割し（2組以上に分割）、検証用のデータに対しても十分な予測力が確保できているかをみる（クロスバリデーション<k-fold cross validation>）などのチェックが有効である。

³⁸ こうした仮説を確かめるには、例えば、債務者を二つのグループに分けて実際に生存関数を求め（説明変数が不要なKM<Kaplan-Meier>法を使用）、実際にこの二つのグループの生存関数に違いがあるかどうかを統計的に評価する（ログランク検定など）といった方法が有効とされる。また、「二重対数プロット」と呼ばれるグラフで生存率を描いて比例ハザード性の前提を検証する方法もよく用いられる（詳細は補論2参照）。

(ロ) 時間依存の説明変数（貸出実行後のデータ）の取り扱い

比例ハザードモデルの説明変数は、基本的に貸出実行時点のデータで構成される（図表 1 7）。しかし、途上与信管理用のモデルでは、貸出実行後の債務者属性の変化（債務者の預金残高等）などについてのデータを説明変数（時間の経過に応じて変化するため『時間依存変数』と呼ばれる）に加えることで、推計精度の向上が実現する可能性がある。

ただし、時間依存変数の追加によって、リスク倍率にも時間依存変数の影響が及び、比例ハザード性の前提が必ずしも成立しなくなる点には注意が必要である（図表 1 8）。途上与信管理の目的で時間依存変数を含めたモデルを使用する場合は、時間依存変数を含めた場合の影響³⁹について十分理解しておく必要がある。

（図表 1 8）時間依存変数と比例ハザード性の関係

説明変数	時間依存変数を含まないモデル		時間依存変数を含むモデル	
	貸出実行時点のデータのみ		貸出実行時および実行後のデータ	
ベースラインハザード関数に関する想定	全て共通	グループ間で異なる	全て共通	グループ間で異なる
	⇩	⇩	⇩	⇩
債務者間のハザード比	経過時間によらず一定	同一グループ内では経過時間によらず一定	時間依存変数の影響により経過時間によって変化する	同一グループ内でも経過時間によって変化する
比例ハザード性の前提	満たされる	同一グループ内では満たされるが、グループ間では満たされない	満たされない可能性が高い	

(ハ) 実務的な観点からのモデルの妥当性の検証

「モデルの変数構成やパラメータの推計値について、実務の観点から十分納得性が得られるものとなっているか」を検証することも重要である。例えば、初期審査向けのモデルの場合、住宅ローンの審査業務に十分な経験と知識を有するスタッフが、モデルの出力結果と経験・知識をもとにした判断（エキスパートジャッジメント）を様々なケースについて比較してみるなどの方法が考えられる。検証の結果、問題点が発見された場合、モデルに反映することが可能か否かを検討する必要がある。例えば、債務者の職業・居住地区、住宅の種類などの特定の属性が PD に大きく影響することが実務経験から知られているものの、当該要因のモデル上の PD 寄与度が低いといったケースが考えられる。こうした場合、エキスパートジャッジメントに照らして、モデルの変数選択やパラメータ推計の妥当性を再検討する必要があると考えられる。

³⁹ 例えば、債務者 A と債務者 B の相対的な危険度は、比例ハザード性の前提が成立している場合は、貸出約定時でも 5 年経過時点でも変わらない。一方、現在年収、預金残高などの時間依存変数を含めた場合、貸出約定時と 5 年経過時点では両者の相対的な危険度は異なる可能性が高い。時間依存変数を用いた場合は、債務者間の相対的な危険度を時点毎に把握する必要が生じるなど、モデルの運用が複雑になる。

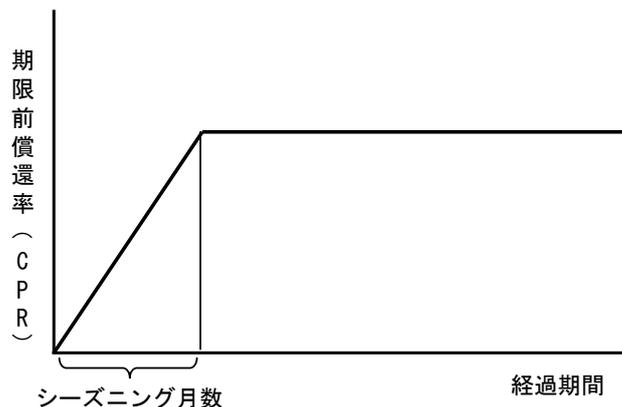
4. 期限前返済の期間構造の推計

期限前返済の発生は、住宅ローンの生涯収益に大きな影響を及ぼす要因であり、その期間構造を貸出実行時点で把握しておくことは、住宅ローンのリスク・採算性を評価する上で極めて重要である。期限前返済の期間構造は、金利変動要因をはじめとする多様な要因が影響すると考えられる。さらに、PDの期間構造の推計の場合とは異なり、期限前返済の形態（一括返済、一部繰り上げ返済）による差異に注意する必要もあるなど、技術的に難しい側面もある。以下では、一般的に用いられることが多いPSJモデルとハザードモデル⁴⁰による推計手法について整理する。

(1) PSJモデルによる推計

PSJ (Prepayment Standard Japan Model)⁴¹モデルは、RMBSのプライシングにおいて、住宅ローンの期限前返済の発生に伴うキャッシュフローの変動を予想するために用いられている。PSJモデルは、貸出実行後の各時点における期限前償還の発生率(CPR)⁴²を「経過期間」のみで説明する簡便なモデルであり、標準モデル(図表19)とカスタマイズド・モデルの二つのタイプが存在する。標準モデルは、PSJモデルの利点である簡便性を重視したモデルである。CPRは、住宅ローン実行時に0%(切片CPR)とされ、それ以降5年(60か月)の「シーズニング月数」に達するまで直線的に定率で上昇した後、以降は一定の水準で横ばいとされる。カスタマイズド・モデルでは、切片CPRとシーズニング月数の値は自由に変更できる。

(図表19) 標準的なPSJモデルにおける期限前償還率の推移



⁴⁰ ハザードモデルの詳細は、3(3)および補論2を参照。

⁴¹ 貸付債権担保住宅金融支援機構債券(RMBS)の評価に必要な期限前償還の推計に関して、日本証券業協会が市場参加者の共通尺度として公表しているモデル。

⁴² PSJモデルでは、期限前償還の発生率として、ある月の期限前返済額を当月の予定残存元本残高(前月の残存元本残高-当月の約定返済額)で割り、これを年率換算した期限前返済率(Conditional Prepayment Rate、CPR)が計算される。

PSJモデルに係る留意点としては、期限前返済に影響を及ぼす可能性のある複数の要因のうち『経過期間』のみが説明変数として採用されている点、および期間構造の形状が『直線的に上昇した後、横這い』というかたちで固定されている点が挙げられる。こうした設定では、期限前返済に影響を及ぼすとみられる債務者属性や金利などの要因の差を期間構造の形状の差として反映させることは難しい。PSJモデルは、構成が簡単で債務者属性や住宅ローン属性などの追加的なデータが要らないというメリットの一方で、こうした限界についても十分に認識しておく必要がある。

(2) ハザードモデルの選択とモデル構築

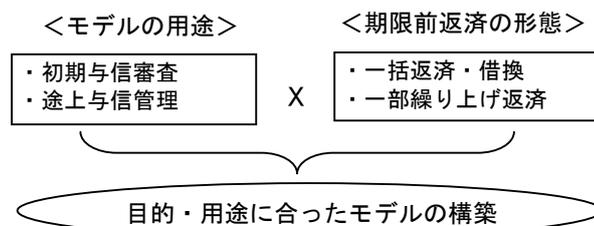
①ハザードモデルの選択

ハザードモデルには、比例ハザードモデルを含む複数のモデルが存在する(図表14)。期限前返済の期間構造の推計には、比例ハザードモデルに加え、パラメトリックモデルと呼ばれる手法も一部で用いられている。パラメトリックモデルでは、住宅ローンの実行から期限前返済が生じるまでの時間が「特定の確率分布」に従うと仮定してモデルを構築する。もっとも、過去データの蓄積が限られている場合などは、この確率分布に関する適切な知見を得ることは容易でない。このため、実務では、ベースラインハザード関数の形状を予め特定する必要がない比例ハザードモデルが選択されることが少なくないようである。以下では、比例ハザードモデルを用いた期限前返済の期間構造の推計について整理する(パラメトリックモデルは補論3参照)。

②比例ハザードモデルの用途・期限前返済の形態別のモデル構築と留意点

期限前返済の期間構造の推計は、PDの期間構造の推計と同様、初期審査、途上与信管理の二つの用途で利用可能である⁴³。一方、期限前返済の期間構造の場合は、PDの期間構造の場合とは異なり、期限前返済の形態が『一括返済か、一部繰り上げ返済か』によって、モデルの構築を分けて行う必要が生じ得る。このため、期限前返済の推計モデルを構築する場合、モデルの用途や期限前返済の形態を考慮して詳細を設計する必要がある(図表20)。

(図表20) 期限前返済の推計モデルの構築におけるアプローチ



⁴³ 初期審査、途上与信管理の両方で、常に期限前返済の推計が行われなければならないという意味ではない。金融機関の実務では、データ整備の状況や推計の安定性なども考慮して、モデルの具体的な利用法を検討する必要がある。

モデル構築上の留意点としては、第1に、モデルに含まれる説明変数の選択については、モデルの用途やデータの入手可能性などを考慮して慎重に判断する必要がある。モデルの用途との関連では、初期審査の場合、貸出実行時点で得られる債務者属性などのデータを用いて推計するのが一般的である。一方、途上与信管理の場合は、貸出実行後に得られる情報も加味してモデルが構築されることもある。この場合、推計精度の向上が期待できる反面、パラメータ推計などモデルの扱いがより複雑になるため、コスト・ベネフィットの観点から慎重な検討が必要となる。

第2に、期限前返済の形態との関連では、期限前返済の期間構造は、一括返済と一部繰り上げ返済ではかなり異なる可能性がある⁴⁴。一括返済の場合、債務者の返済余力に余裕が生じた場合（特に残存債務が少ない場合や退職一時金の支給等）や他の金融機関への借換などにより生じることが多い。一方、一部繰り上げ返済については、ボーナス支給時の返済や金利変動の影響などにより大きな影響を受ける可能性がある。このため、期限前返済の期間構造を比例ハザードモデルで推計する場合、一括返済と一部繰り上げ返済の間では、比例ハザード性の前提が保てない可能性もある。

これらの留意点については、モデル構築時に住宅ローンの期限前返済に関する実際のデータを参照し、用途や形態に応じたモデルの構築方法について慎重に検討しておく必要がある。

（3）比例ハザードモデルによる推計

①推計モデルにおける主な説明変数⁴⁵

期限前返済の期間構造を推計する比例ハザードモデルの主な説明変数としては、債務者属性（職業・職種、性別、居住地域、定期・流動性預金残高等）、住宅ローンの商品性（借入の種類・金額・期間・金利差、期中金利変更の有無、住宅・アパート別の資金用途、DTI、LTV、担保状況等）が考えられる。これらに加えて、日本銀行[2007]でも挙げられていたバーンアウト効果⁴⁶や季節性なども期限前返済の発生を考える上で引き続き重要な要因と考えられる。

⁴⁴ 一括返済が期間中に一度しか生じないのに対し、一部繰り上げ返済は複数回生じる可能性がある。この違いもモデル構築上、考慮される要因となり得る。複数回イベントの取り扱いについては幾つかの手法が存在する（繰り返しイベントのモデル上の扱いについては、Kleinbaum and Klein[2005]参照）。

⁴⁵ 期限前返済の期間構造の推計については、発生件数、発生金額のいずれのベースでもモデル構築は可能であるが、金融機関の実務では発生金額ベースで行われることが多いようである。本稿でも基本的に発生金額ベースでの推計を想定して説明している。

⁴⁶ 過去の期限前返済の発生状況によって、それ以降の期限前返済の発生状況が影響を受ける効果。一般に、ある時期に多額の期限前返済を行った場合、それ以降の期限前返済が抑制されるケースなどを指す。

説明変数の選択に関しては、PD の期間構造の場合と同様、期限前返済の期間構造の場合も、事象の発生過程が理論的にモデル化されてはいないため、データに対する当てはまりの良さや実務経験から得られた知見との整合性などで判断することになる。説明変数の候補は、図表 17 に示した PD の期間構造の推計に使われるものと類似しているが、これは限られたデータの中でモデルを構築する都合上、結果的に類似のデータが用いられることが多いためである。

説明変数のうち、職業・職種については、所得状況や貯蓄・消費性向を通じて債務者の信用度に関連するものと考えられる。また、預金残高は、余裕資金の存在状況を表す代理変数と考えられる。住宅ローンの商品性については、居住目的・賃貸目的の違いや固定・変動などの金利条件の違いなども将来の債務者の返済能力に大きく影響すると考えられる。金利条件については、借換の経済的メリットや借換に要するコストを表していると考えられ、これには他の金融機関の金利優遇などの営業施策の影響も間接的に含まれる。

図表 21 は、これらの説明変数について、貸出実行時と実行後でどのような変化が生じ得るか、さらにデータとして捕捉可能かという観点で整理したものである。初期審査の用途では、貸出実行時のデータのみで期限前返済の期間構造を予測するのが一般的と考えられる。途上与信管理の用途では、推計モデルに債務者属性の変化や金利差などの状況変化を織り込むことができれば、直近の変化を反映することで推計精度を高められる可能性がある。

(図表 21) 比例ハザードモデルにおける貸出実行時および実行後の説明変数

	貸出実行時	一定期間経過後の変化
債務者属性 (年収、職業、居住地、預金残高等)	既知・データ入手可能	<ul style="list-style-type: none"> ・職業、年収などの属性は変化する可能性あり ・特に預金残高は期限前返済への影響が大きい可能性 ・ただし、データ入手は一般に容易でない
住宅ローンの属性 (借入の種類、期間、担保状況等)	データ入手可能 (基本的に変化しない)	
金利差等の環境要因 (変動と固定の差、他行の金利優遇など)	一般的に予想は困難	逐次観測可能
バーンアウト効果	一般的に予想は困難	期限前返済が生じた後に予想可能

貸出実行後の状況変化 (特に金利差等の環境要因) もモデルに織り込めれば、期限前返済の予測精度の向上が望める可能性

②モデルの評価・検証に関する留意点

比例ハザードモデルの評価・検証は、PD の期間構造の場合と同様、モデル選択の妥当性 (推計対象の適切なグループ化)、パラメータ推計の確からしさ・符号条件の適合、データに対する当てはまりなどの観点から行われる

必要がある⁴⁷。

特に、比例ハザードモデルを用いて期限前返済の期間構造を推計する場合、PD の期間構造の推計の場合と同様、異なる債務者間のハザード比が時間によらず一定であるという比例ハザード性の前提に関する以下のような検討が必要である。

第1に、一括返済と一部繰り上げ返済の間で期間構造に目立った違いがある⁴⁸場合には、単一の比例ハザードモデルで推計することは適切ではない。また、債務者の信用度（累積 PD）や預金残高なども期限前返済の期間構造に影響を与えることも考えられる。例えば、資金に余裕がある信用力の高い（累積 PD が低い）顧客は、相対的に早期かつ大量に期限前返済が発生する可能性がある一方、信用力の低い（累積 PD の高い）顧客からは、相対的に期限前返済の発生が少ない可能性がある。

こうした場合には、PD の期間構造の推計の場合と同様に、債務者を特定の変数に関して「グループ化」して一つの比例ハザードモデルを構築するか、あるいは各グループに対して別個のモデルを構築するなどの適切な対応を取る必要がある。

第2に、図表2-1に示したように貸出実行後のデータ（時間依存変数）も利用した推計を行う場合、比例ハザード性の前提は必ずしも成立しなくなる。バーンアウト効果についても、過去の期限前返済の発生状況によって、それ以降の期限前返済の発生状況に影響を受ける効果を表す時間依存の説明変数としてモデルに加えることが可能である⁴⁹。一方で、比例ハザード性の前提が成立しない場合、モデルの扱いが複雑になる面もある。このため、具体的にどのような時間依存の変数を追加するかに関しては、データの入手可能性や実務に基づく知見を活用するなどして注意深く検討する必要がある⁵⁰。

47 詳細は、3（3）参照。

48 一括返済は、退職金などの一時的かつ多額の収入の発生や借換などにより強く影響されると考えられるため、一部繰り上げ返済とはかなり異なる期間構造を有する可能性が高いとみられる。

49 山崎[2005]では、期限前返済がないと仮定した場合の住宅ローンの残高に対する各時点における期限前返済適用後の住宅ローン残高の比率（対数値）を説明変数として用いる手法を紹介している。この比率は、明確な時間依存変数である。

50 時間依存変数を追加した場合の注意点の詳細については、一條・森平[2001]を参照。

5. 金融機関の実務におけるモデル利用上の留意点

金融機関の実務において、住宅ローンに関するモデルを利用する際には、以下の留意点について、経営陣と営業推進部署やリスク管理部署との間で議論を深め、認識を共有しておくことが重要である。

(1) 生涯収益の把握の重要性と戦略的な利用

住宅ローンに係るリスクと収益の評価を行う上で、貸出の全ての期間を通じた生涯収益は重要な意味を持つ。例えば、住宅ローンの初期審査において、個別の住宅ローン毎に生涯収益を計算できれば、諾否判定、金利・保証料率の水準設定などに関して金融機関はよりきめ細かな検討が可能となる。

生涯収益の適切な予測を行うには、住宅ローンの残高と単位当たり収入・費用に関する各年の適切な予想が不可欠である。例えば、信用コスト（EL）について、累積 PD×期初残高のような単純な計算ではなく、期中の残高変動を考慮した各年の予想が必要となる。こうした予測に関しては、図表10で示したように、PD および期限前返済の期間構造に関する前提の想定次第で、生涯収益の予測は大きく異なる可能性がある。実務に即して適切と思われる前提と蓄積されたデータに基づく客観的な期間構造の推計を行うことで、生涯収益の予想をより確かなものとしておくことが特に重要である。また、信用コスト以外の金利条件や資金調達・事務コストなどについても可能な限り生涯収益の計算に反映することが期待される⁵¹。なお、金融機関の多くは、住宅ローンを「家計のメイン化」の主たるツールと位置付けている。投信などの販売実績や年金受取口座の獲得状況など住宅ローン債務者に係る属性データを蓄積・分析し、生涯収益の予測に反映させることも有用である（データ蓄積の重要性については5（4）参照）。

生涯収益の戦略的な利用の仕方としては、金利優遇などの妥当性の検証を行うことで、営業推進・リスク管理面におけるPDCAサイクルを回していくことが考えられる。極端な優遇策は、一時的に貸出が増えてもその後のデフォルトや期限前返済の動向次第では結果的に生涯収益を減少させないしはマイナスに転じさせる可能性もある。PD や期限前返済の期間構造の推計モデルを利用し、生涯収益のシミュレーションを行うことで、意図せざる収益減のリスクを小さくできる可能性がある。また、金利優遇の導入当初は持続可能と思われた営業施策についても、その後の状況変化（資金調達コストの上昇等）で継続困難と判断される可能性もある。モデルの利用により、

⁵¹ 借換などに伴う固定金利と変動金利の比率の変動のほか、資金調達コストに関係する定期預金の期限前解約や流動性預金のコア預金部分に係る推計など、予想が難しいと思われるものもある。こうした要因についても、一定の想定を置くなどして収益に反映することが有益である。なお、コア預金の推計については日本銀行[2011]を参照。

そうした変化を早期に把握できるようなPDCAサイクルの管理体制を整えておくことが重要である。

住宅ローンのポートフォリオのリスク管理の観点からは、「金利優遇策による新規顧客開拓によって、住宅ローンのポートフォリオがどのように変化する可能性があるのか、その結果、PD や期限前返済の期間構造にどのような影響が及ぶのか」について予想するとともに、リスク管理上必要と思われる対策を検討しておくことも必要である。例えば、住宅ローンのPDの上昇がみられた場合に、まずは、それが「期間構造に起因するものなのか（その場合、予想の範囲内のものなのか）」、あるいは「現実にポートフォリオの質的悪化が進んでいるのか」を見極めた上で、必要な対応策を講じていくことが考えられる。

（2）ストレステストの重要性

前述の生涯収益に係るシミュレーションを行う際に、ストレステストを組み込むことは有益である。これに関し、マクロ経済要因がPDや期限前返済に与える影響については、本稿で触れなかった重要な視点の一つである⁵²。現状、モデルの複雑化の観点から、マクロ経済要因を直接モデルに組み込んでいる例はあまりみられていない。現状では、ストレステストにおけるシナリオ選択に反映するなどの方法でリスク評価を行うことが現実的な対応策と考えられる。モデルに含まれる変数に各種のマクロ経済のストレスを加えたシナリオを作成し、ストレステストを行う⁵³ことで、ストレスシナリオの影響を測定することは極めて有益である。

なお、今回の東日本大震災のような非常に大きなストレス事象の影響は、本稿で取り扱ったような通常のモデルによる分析では評価が困難である。こうした非日常的な要因に関する影響評価はストレステストで行い、PDや期限前返済の期間構造などの日常的な要因の影響分析はモデルで行うなど、場合に応じて適切に使い分けることが重要である。

（3）モデルの開発・運用体制の整備

本稿で扱った住宅ローンのPDや期限前返済の期間構造を推計する手法には、モデルの前提や推計方法などを含めて相当程度複雑なものも含まれている。このため、第1に、金融機関が独自にこうしたモデルを開発・運用するには、専門知識を有する人材の育成・確保や関連データの収集・整理に係る体制整

⁵² 低金利の新規貸出の実行が続く中で、過去に実行した高金利の貸出が返済されていくに伴って、住宅ローンの金利スプレッドが急激に低下するリスクも懸念されている。このような金利に関するストレスシナリオも重要な選択肢の一つである。

⁵³ 住宅ローンに関するストレステストについては、日本銀行[2007]を参照。

備が必要である。

第2に、金融機関の中には、作業の一部を外部の専門的な業者にアウトソースするケースもみられるが、この場合、「金融機関がどの程度技術的な側面を理解しておくべきか」という論点がある。金融機関がモデルの技術的事項の全てを完全に理解しておくことを求めるのは必ずしも現実的ではないが、モデルが依拠する統計理論や推計・検証方法の概要、利用上の注意点などについては、モデルの開発・運用に関わる部署を中心にしっかりと理解する必要がある。

その上で、上記の2つの点のいずれも、重要事項については経営陣を含めて認識を共有しておくことが求められる。

(4) 住宅ローンに係るデータの重要性

PDと期限前返済の期間構造の推計のいずれについても、本稿で取り上げた手法を金融機関の実務に応用するには、十分なデータの確保が極めて重要である。例えば、過去のデフォルト実績データから直接PDの期間構造の推計値を計算する場合、長期にわたる住宅ローンのデフォルトデータの蓄積が不可欠である。また、統計モデルを用いる場合は、デフォルトデータに加えて、債務者属性、住宅ローンの商品属性などに関する長期間のデータ蓄積⁵⁴も必要となる。

もともと、こうしたデータの整備については、課題を抱えている金融機関もみられる。そうした中で、一部では外部ベンダーなどの協力のもとで、複数の金融機関のデータ⁵⁵を集積して構築した「統合モデル」を用いて各種の分析を行い、そこから得られた各種の知見を自行のモデル開発に活かすという動きもみられている。この場合、住宅ローンポートフォリオの特徴は金融機関毎に異なる可能性もあるため、単純に自行の住宅ローンポートフォリオのデータ不足を補う目的で用いることは難しいかもしれない。しかし、平均的なモデルによる推計結果を一つのベンチマークとして、これと自行のモデルによる推計結果を対比し、ベンチマークからの乖離を調べることで各種の知見を得ることは有意義であると考えられる。

⁵⁴ データ期間内に構造的な変化が生じた場合（債務者属性等の大幅な変化・不連続性が生じた場合等）、時系列データをそのままモデル推計に利用できないため、モデル構築そのものが困難になるケースも少なくない。

⁵⁵ 住宅ローンの債務者属性などの定義が金融機関毎に異なる場合、定義の調整や統一を行う必要がある。

6. おわりに

本稿では、住宅ローンのリスク・収益管理を一段と強化していくための重要な論点である、PD や期限前返済の期間構造に関する推計について、まず、金融機関の実務で用いられている主な手法を整理した。その上で、モデルの背後にある統計理論や現実のデータに応用する場合のモデル選択の考え方、採用したモデルの検証についての留意点などを説明した。

一方で、固定特約期間終了後の金利選択などの金利リスク要因、保証料率や回収率の設定のあり方のほか、マクロ経済要因が PD や期限前返済の期間構造に与える影響などについては本稿では触れなかった⁵⁶。日本銀行では、これらの論点も含め、今後とも、考査・モニタリングや金融高度化センターの活動などにおける議論を踏まえ、追加的かつ継続的に調査・研究を行う必要があると考えている。本稿を一つの材料としながら、住宅ローンのリスク・収益管理に関して金融機関との対話を一層深めていくことができれば幸いである。

以 上

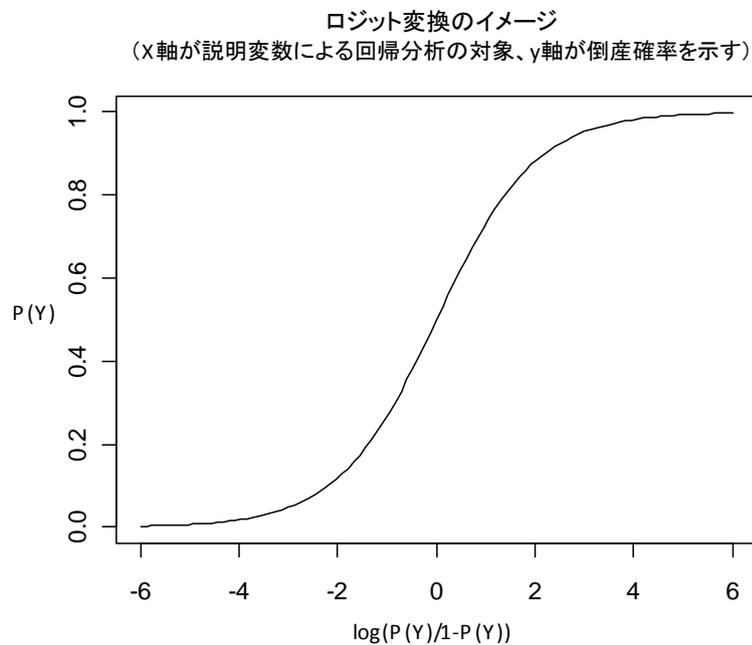
⁵⁶ モデル利用の観点からのより発展的な課題としては、①PD および期限前返済の期間構造の「同時」推定への対応、②マクロ経済や地域経済要因の PD の期間構造の推計への取り込み、③収益性分析における金利変動の不確実性の問題への対応、④住宅ローンの証券化における価値分析、などが考えられる。

補論 1. ロジット回帰モデルについて

(1) ロジット回帰モデルの概要

ロジット回帰モデル⁵⁷は、二値変数（倒産、非倒産）に対する回帰分析ととらえることができ、倒産、非倒産の二つのカテゴリーを 0 と 1 のデータとしてパラメータ推計が行われる。

ロジット回帰モデルでは、被説明変数が 0 と 1 の二値変数のため、通常の間帰分析のように連続変数として予測することはできない。ここで、被説明変数の範囲が $[-\infty, +\infty]$ となるように変換すれば、通常の間帰分析の考え方を適用することができるようになる。ロジット回帰モデルでは、ロジット関数と呼ばれる式でこの変換を行う。



倒産事象を Y として、倒産確率を $P(Y=1)$ で表すと、 $P(Y)$ は確率であるので $[0, 1]$ の範囲の値を取る。この $P(Y=1)$ に対して、以下のロジット関数を適用する。ロジット関数は、 $P(Y=1)$ に関する対数オッズを求める式となっている。

$$\text{logit}[P(Y=1)] = \log \left[\frac{P(Y=1)}{1-P(Y=1)} \right]$$

⁵⁷ PD 推計のモデルとして、「ロジスティック回帰モデル」という用語もよく使われる。ロジスティック回帰モデルは、一般に被説明変数がロジスティック曲線に従う連続量データで表される時の回帰分析の呼称とされる。本稿では、ロジット回帰モデルという用語を用いたが、同様の手法に対してロジスティック回帰モデルという用語を使用している文献もみられる。

この変換により被説明変数の範囲を $[-\infty, +\infty]$ とすることができ、通常の回帰分析と同様に説明変数の係数の推計（最尤法による推計）を行うことが可能となる。

ロジット変換で得られた被説明変数に対して、回帰モデルを n 個の説明変数 (x) を用いて以下のように当てはめる。

$$\log \left[\frac{P(Y=1)}{1-P(Y=1)} \right] = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n$$

上式の両辺の指数をとると、

$$\frac{P(Y=1)}{1-P(Y=1)} = \exp[\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n]$$

ここで、ロジット回帰モデルにおける説明変数 (x) と倒産確率 (P) の関係を見ると、説明変数の変化が倒産確率に及ぼす影響は、倒産確率の水準によってその割合が異なっていることがわかる。すなわち、倒産確率が極端に低いあるいは高い値（例えば 0 や 1）に近い時には、説明変数が大きく変化しても倒産確率の変化は相対的に小さい。一方、倒産確率が中間の値（例えば 0.5 近辺）に対しては、相対的に小さな説明変数の変化によってより大きな倒産確率の変化が生じることになる（説明変数に対する倒産確率の反応がより敏感＜前掲のグラフ参照＞）。

係数の推定値が得られれば、以下の関係式を使って説明変数のデータからデフォルト確率の推計値を計算することができる⁵⁸。

$$P(Y=1) = \frac{1}{1 + \exp[-(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n)]}$$

次に、回帰係数の意味を考えるため、他の変数は全て一定とした上で、変数 x_1 が 1 増えた場合の左辺の変化を比率（オッズ比）で表すと、

$$\frac{\frac{P(Y=1 | x_1 = a+1)}{1-P(Y=1 | x_1 = a+1)}}{\frac{P(Y=1 | x_1 = a)}{1-P(Y=1 | x_1 = a)}} = \frac{\exp[\beta_0 + \beta_1(a+1) + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n]}{\exp[\beta_0 + \beta_1(a) + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n]} = \exp[\beta_1(a+1) - \beta_1(a)] = \exp[\beta_1]$$

となり、変数 x_1 の係数 β_1 の指数値と変数 x_1 のみが 1 単位変化した時のオッズ比、すなわち倒産が発生する確率 $P(Y=1)$ としない確率 $1-P(Y=1)$ の比率（オッズ比）を示している。

⁵⁸ 右辺の関数は、ロジスティック（logistic）関数と呼ばれる。ロジスティック関数は、ロジット関数の逆関数。

ズ) の変化の割合に等しくなる。

ロジット回帰モデルでは、このオッズ比の概念を用いることで、例えば、「債務者の年齢が 1 歳増えたらデフォルトリスクが $\exp(\beta)$ 倍になる」といった比較検討を行うことが可能になる。

(2) ロジット回帰モデルによる PD 推計およびメリットと留意点

ロジット回帰モデルで PD 推計を行う場合、説明変数としては、債務者の属性情報として、年収などの連続的な数値データに加え、業種や性別など債務者が属するカテゴリーデータ（状態の有無を 0、1 の数値の組み合わせなどで表現する）⁵⁹も変数として用いられる。また、関連性の強い複数の変数を採用する場合は、複数の変数を一つの変数（合成変数）にまとめてモデルに組み込まれることもある⁶⁰。

説明変数の選択は、金融機関の住宅ローンポートフォリオに即して検討されるべきものであり、限定的な変数列挙を行うことは適切ではないが、一般的な例としては、「勤務先（業種・企業・職種）」、「年収」、「年齢・勤続年数」、「性別」、「借入額・借入期間」、「購入物件価格」、「DTI（年収に対する元利金返済の割合）」、「LTV（担保物件価値に対する借入金額の割合）」などが選ばれることが多い⁶¹。モデルにどのような変数が含まれるべきかについては、必ずしも明確な基準があるわけではなく、実際のデータに対するモデルの当てはまり度合いなどを基準に様々な試行⁶²を重ねた上で決められることが多い。

PD 推計にロジット回帰モデルを用いるメリットとしては、デフォルト件数が比較的少ない住宅ローンポートフォリオでも PD 推計の安定したモデル構築が可能なこと、回帰分析の形態をとっているため、モデルの構成が分かりやすく納得性が得やすい、説明変数の寄与度が計算しやすいなどの点が挙げられる。

モデルの評価・検証については、パラメータ推計の精度・安定性、変数選

⁵⁹ 名義変数と呼ばれることもある。

⁶⁰ 一般に、回帰分析の場合、変数間の独立性の仮定を前提としていることが多いため、変数間の相関の問題を回避するためにこうした対応策が採用されることは少なくない。合成変数を作成する際の変数の組み合わせなどについては、ツリー分析などの手法で別途の分析が行われることもある。

⁶¹ これら変数の交差効果（例：年収×年齢が同時に変化した場合の影響）が含まれる場合もあり得る。また、モデルにこれらの変数が全て含まれていなければならないという意味ではなく、これらの変数以外にも有効な変数が存在しているケースも当然考えられる。

⁶² 変数選択法として比較的よく用いられる方法にステップワイズ法がある。これは、尤度比などの統計量を用い、その統計量の改善が最も適したものになるように変数を選択していく方法である（より細かくは、変数増加法、変数減少法、変数増減法等のアプローチがある）。

扱の妥当性⁶³などの観点から各種の統計的な検定が行われる。各変数の係数が事前に期待していた符号条件を満たしているかは、厳密に確認する必要がある。また、モデルの推計を行った債務者のデータに対する当てはまりは良くても、新たな債務者に関する PD 推計の精度が十分に出ないという、いわゆるオーバーフィッティングの問題が生じていないかについても注意する必要がある。

(3) ロジット回帰モデルによる PD の期間構造の推計

① 1 期間のロジット回帰モデルを複数組み合わせる方法

ロジット回帰モデルを複数組み合わせることで PD の期間構造を推計することは可能である。具体的には、まず、住宅ローンのデータを複数年限（1年、3年、5年等）に区切る。次に、それぞれの年限に対してロジット回帰モデルを適用し、各年限に対応する複数の累積 PD を求める。最後に、累積 PD から n-1 年まではデフォルトしなかった債務者が n 年目にデフォルトするという条件付確率を計算し、PD の期間構造を得る。

しかし、こうした方法に関しては、各年限の累積 PD を単純に別々のロジット回帰モデルから推計した場合、例えば、3 年間の累積 PD の推計値の方が 5 年間の累積 PD の推計値より高くなるという現実には想定し難い問題が生じてしまう可能性がある。こうした問題を回避するには、制約条件付の複雑な推計手法を導入する必要性が生じてくる。また、年限別のデフォルト事象に関するデータが十分得られないというデータ上の制約が問題になることも少なくない。こうしたことから、金融機関の実務でこうした手法が用いられることは少ないようである。

② 離散時間ロジット回帰モデルを用いる方法

1 本のロジット回帰モデルのみで、住宅ローンの過去の履歴データ（デフォルトデータおよび各種属性）を「パネルデータ」（クロスセクションと時系列データのプーリングデータ）として扱い、多期間にわたる限界 PD (PD の期間構造) を直接推計する手法として、「離散時間ロジット回帰モデル」(Discrete-time Logit Model、Allison[1982]) がある。同モデルは、順序のある離散的な時間単位におけるイベントの発生確率を求めるものであり、ロジット回帰モデルを多期間に拡張したものと捉えることができる。

⁶³ モデルの推計精度や変数選択の適切性（意味のある変数を適切に選んでいるか）などの評価に関しては、各種の統計量による検定が行われるのが一般的であるが、どのような方法を用いるべきかは推計手法や変数選択法にも依存する。具体的な手法の例としては、Wald 検定（パラメータの帰無仮説の棄却可否、p 値の算出）、尤度比検定（モデルのデータへの適合度、変数選択の妥当性確認）、残差分析（残差の χ^2 乗分析等）などが挙げられる。

離散時間ロジット回帰モデル

$$\log \left[\frac{P_t(Y=1)}{1-P_t(Y=1)} \right] = \alpha_t + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \dots + \beta_n x_{nt}$$

P_t は限界 PD (PD の期間構造)、 α_t は時間変数⁶⁴、 β_k は説明変数 x_{kt} の係数

この手法の利点としては、以下の点が挙げられる。

- (i) 1 期間のロジット回帰モデルの自然な拡張として PD の期間構造の推計を理解しやすい
- (ii) 繰り返しイベント (延滞、一部繰り上げ償還等) の分析にも応用できる
- (iii) 2 変量ロジット回帰モデルを用いることで期前償還との同時推定が可能
- (iv) マクロ経済要因や時間依存変数の導入が可能

ただし、①の手法同様、この手法についても金融機関の実務で用いられることは少ないようである。

⁶⁴ 時間経過のみに対応する変化分 (比例ハザードモデルのベースラインハザード関数に相当するもの)。

補論 2. ハザードモデル (生存時間分析) について

ハザードモデルでは、イベント (デフォルト) が生じるまでの時間 T を確率変数ととらえ、時間 T が時点 t を超える確率 (生存確率) を $P(t < T)$ と表す。同様に、時点 t まではイベントが発生しない確率を生存関数 $S(t)$ とし、その密度関数を $f(t)$ とする。生存関数は、時点 t の関数である。

$$S(t) = P(T \geq t) = \int_t^{\infty} f(u) du$$

$$f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t \leq T < t + \Delta t)}{\Delta t} = -\frac{dS(t)}{dt}$$

また、時点 t の直前までイベントが発生していない状況で、次の Δt の期間にイベントが発生する確率をハザード (危険度) と呼ぶ。生存関数と同様、時点 t に関するハザードの関数をハザード関数と呼び、以下の式で定義される。

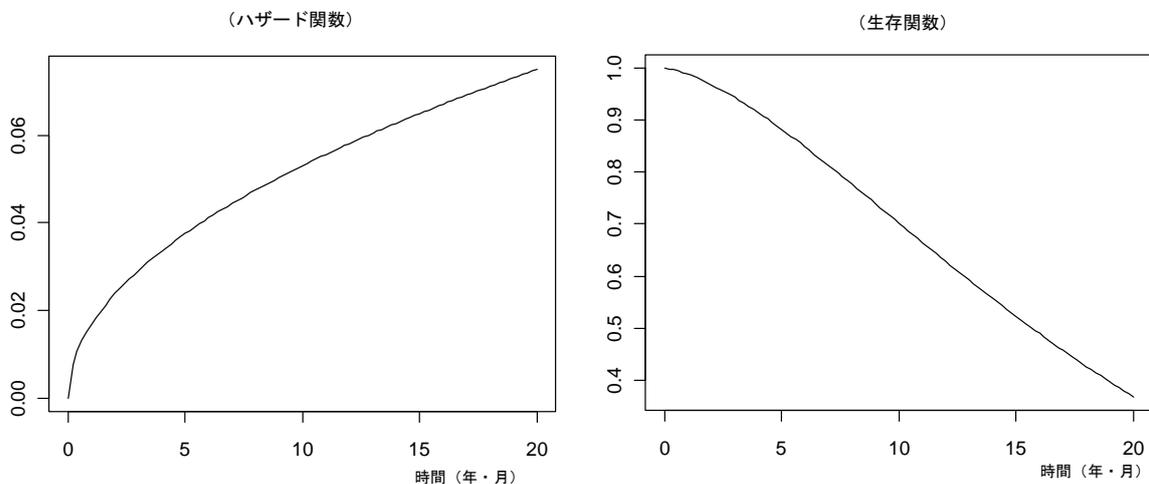
$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t \leq T < t + \Delta t | T \geq t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t) - S(t + \Delta t)}{\Delta t S(t)} = -\frac{dS(t)}{dt} \frac{1}{S(t)} = -\frac{d(\log S(t))}{dt}$$

この式を変形すると、

$$S(t) = \exp\left[-\int_0^t h(u) du\right]$$

となる。生存関数 $S(t)$ とハザード関数 $h(t)$ は、連続性の前提のもとでは、通常 1 対 1 対応しており、どちらか片方が決まれば、もう片方を求めることができる。なお、上式は時間が連続の場合で表記してあるが、離散時間で考える場合も基本的な考え方は同様である。

ハザード関数と生存関数のイメージ



(1) 比例ハザードモデル (Cox 比例ハザードモデル)

比例ハザードモデルでは、デフォルトに影響を及ぼす複数の要因の影響を分析することを前提としてハザード関数に時間とそれ以外の要因 x を想定する。特に、ハザード関数 $h_0(t)$ が全ての $t > 0$ と x について以下の関係が成り立つとき、これを比例ハザードモデルと呼ぶ。なお、 x は年収のような連続変数、性別のようなカテゴリーを示す離散変数およびこれらの交差項などを含む変数ベクトルである。

$$h(t|x) = h_0(t)r(x)$$

最もよく用いられる Cox 比例ハザードモデルでは、 $r(x)$ に指数関数が用いられ、以下のような回帰モデルの形式で表記される (以下 Cox 比例ハザードモデルを比例ハザードモデルと記述)。

$$h(t|x) = h_0(t) \exp\left[\sum_{i=1}^n \beta_i x_i\right], \quad h_0(t) > 0$$

ここで $h(t|x=0) = h_0(t)$ となることから、 $h_0(t)$ はベースラインハザード関数と呼ばれる。ベースラインハザード関数は、全債務者に共通の時点 t のみに依存する関数であり、比例ハザードモデルでは、その形状が事前に明確に指定されることはない。基本的な比例ハザードモデルでは、説明変数 x は時間に依存しないもののみで構成されるが、拡張されたモデルでは時間依存の変数が加えられることもある。

比例ハザードモデルにおける生存関数は以下の通り。

$$\begin{aligned} S(t|x) &= \exp\left[-\int_0^t h_0(u) \exp\left[\sum_{i=1}^n \beta_i x_i\right] du\right] = \exp\left[-\exp\left[\sum_{i=1}^n \beta_i x_i\right] \int_0^t h_0(u) du\right] \\ &= \exp\left[-\int_0^t h_0(u) du\right]^{\exp\left[\sum_{i=1}^n \beta_i x_i\right]} = S_0(t)^{\exp\left[\sum_{i=1}^n \beta_i x_i\right]} \end{aligned}$$

ただし、 $S_0(t) = \exp\left[-\int_0^t h_0(u) du\right]$ はベースライン生存関数

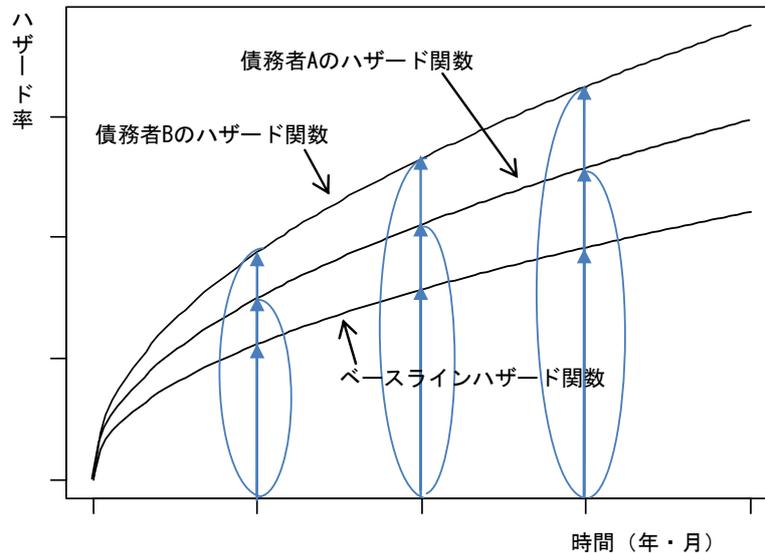
比例ハザードモデルでは、説明変数 x について値の異なる 2 群のハザード関数の比をとると、

$$\frac{h(t|x = x_a)}{h(t|x = x_b)} = \frac{h_0(t) \exp\left[\sum_{i=1}^n \beta_i x_{ai}\right]}{h_0(t) \exp\left[\sum_{i=1}^n \beta_i x_{bi}\right]} = \exp\left[\sum_{i=1}^n \beta_i (x_{ai} - x_{bi})\right]$$

となり、生存時間に関係なく一定の値を取ることがわかる。このハザード関

数の比をハザード比と呼び、ハザード比が経過時間に無関係に一定の値を取るといふ想定を比例ハザード性の前提と呼ぶ。比例ハザードモデルを用いて回帰分析を行う場合は、この比例ハザード性の前提が常に成立している必要がある。

比例ハザードモデルのハザード関数の例
 <債務者Aと債務者Bのハザード比は常に一定値>



(2) パラメトリックモデル⁶⁵

比例ハザードモデルでは、ベースラインハザード関数がパラメトリックには特定されずとは限らないことから、生存時間が特定のパラメトリックな確率分布に従うわけではない。これに対して、生存時間が「特定のパラメトリックな確率分布に従う」という仮定の下で構築されたモデルをパラメトリックモデルと呼ぶ⁶⁶。すなわち、パラメトリックモデルでは、ハザード関数と生存関数の積で表わされる密度関数がパラメトリックに特定されている。

$$f(t) = h(t)S(t) \quad f(t) \text{は特定の確率密度関数}$$

パラメトリックモデルでは、密度関数、ハザード関数、生存関数のうちどれか一つが決まれば、残りの二つとも特定される。このため、ハザード関数あるいは生存関数について何らかの事前情報があれば、密度関数を特定する(選択すべき確率分布を決める)ことも可能である。

パラメトリックモデルは、何らかの事前情報に基づいて生存時間の確率分

⁶⁵ 事象が発生するまでの時間がリスク要因によって伸縮するという意味で、AFT (Accelerated Failure Time)モデル、あるいは加速度モデルなどと呼ばれることもある。詳細は、Kleinbaum and Klein[2005]参照。

⁶⁶ パラメトリックモデルのタイプについては、分類上、別のタイプ(パラメータで指定した共変量を有するハザードモデル等)も存在する。本稿では、簡単化のため、上記の定義を用いた。

布の形状を予め特定する必要があるため、こうした制約がない比例ハザードモデルに比べると応用範囲が限定される。一方で、確率分布を明示するため、モデルの構造がわかりやすく、分布の特定が正しくなされれば、モデルの推計結果も高い精度が期待できる。

生存時間の確率分布としてよく使われる確率分布には、指数分布、ワイブル分布、対数正規分布などがある。パラメトリックモデルでは、通常、ハザード関数に関するパラメータ λ を説明変数 x で回帰し x の計数 β を推計する。また、確率分布の形状を示すパラメータ p もデータから推計する必要がある。

各分布を想定した場合の密度関数、ハザード関数、生存関数は以下の通り。

①指数分布モデル

ハザード率が時点 t に無関係に固定値をとるモデル。

$$\begin{aligned} f(t) &= \lambda \exp[-\lambda t] \\ h(t) &= \lambda \\ S(t) &= \exp[-\lambda t] \end{aligned}$$

②ワイブル分布モデル

ハザード率が時間の経過とともに上昇していく場合 (increasing Weibull)、あるいは下落していく場合 (decreasing Weibull) などに用いられることが多い。

$$\begin{aligned} f(t) &= \lambda p t^{p-1} \exp[-\lambda t^p] \\ h(t) &= \lambda p t^{p-1} \\ S(t) &= \exp[-\lambda t^p] \end{aligned}$$

③対数正規分布モデル

ハザード率が、最初上昇してその後下落するというパターンを示す場合などに用いられることが多い。

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}t\sigma} \exp\left[-\frac{(\log t - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] \\ h(t) &= \frac{f(t)}{S(t)} \\ S(t) &= 1 - \Phi\left[\frac{\log t - \mu}{\sigma}\right], \Phi[\] \text{は標準正規分布の分布関数} \end{aligned}$$

(3) ノンパラメトリックモデル

観察された生存時間データから生存関数 $S(t)$ を推定する際に、生存時間 T に対して確率分布の仮定を置かずに (ノンパラメトリック)、生存関数の推

定を行うモデル。一般的に用いられる手法としては、KM (Kaplan-Meier) 法がある。KM 法では、データのみから生存率の推移を計算する。回帰分析の形式はとらないため、説明変数は必要とされない。KM 法で推定された生存関数は、通常、階段状のグラフとして表示される。KM 法による生存関数の推定値のプロットは十分な大きさのサンプルが得られれば、その母集団の真の生存関数に近づくことが知られている。債務者のグループを細分化し、生存関数の差があるかを統計的に検証する場合などにも利用される。

(4) 比例ハザード性の前提の検証

比例ハザード性の前提の検証手法は幾つか存在するが、比較的好く用いられるのは、2重対数プロットと呼ばれる生存率のグラフを描いて検証する方法である。具体的には、職種・業種など特定の説明変数を基準に債務者全体を幾つかのグループに分割する。この複数のグループについて、y 軸に $\log(-\log(\text{生存率}))$ を、x 軸に $\log(\text{生存時間})$ を取ってグループ毎に KM 法で計算した生存率をプロットする。このとき、グループ毎に引かれた生存率の線が交わることなく、平行であれば、当該変数に関する比例ハザード性を仮定しても問題ないと判断される。

これは、比例ハザードモデルでは、生存率、ベースラインハザード関数について、以下の関係式が成立していることを利用している。

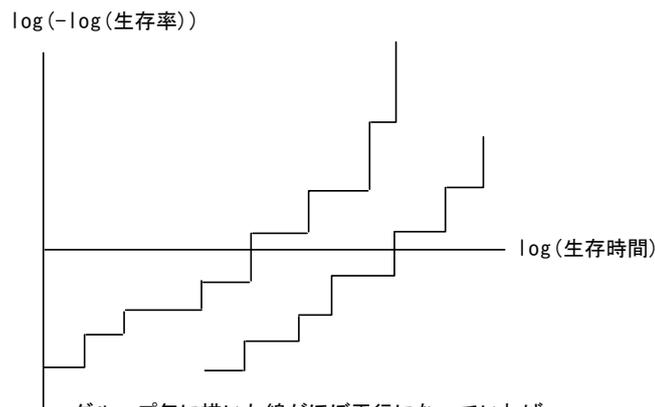
$$\log[-\log S(t|x)] = \beta x + \log h_0(t)$$

ここで変数 x について、変数 x_1 のみに注目して $x = x_1$ (例えば、 x はダミー変数で 0 か 1 をとる) とすれば、以下の関係式が得られる。

$$\log[-\log S(t|1)] = \beta_1 + \log[-\log S(t|0)]$$

これにより、比例ハザード性の前提が成立している場合は、変数 x_1 でグループ化した時の生存関数の 2 重対数は、グループ間で平行になること、さらに、生存関数の 2 重対数間の距離は、変数 x_1 の効果を表すパラメータそのもの (β_1) であることがわかる。

2重対数プロットのイメージ



グループ毎に描いた線がほぼ平行になっていれば、比例ハザード性の前提は成立していると判断できる

補論 3. パラメトリック・ハザードモデルによる期限前返済の推計

(1) パラメトリックモデルによる推計の概要

パラメトリックモデルを用いた期限前返済の推計では、住宅ローンの実行から期限前返済が生じるまでの時間が「特定の確率分布」に従うと仮定して、モデルの構築・推計がなされる。パラメトリックモデルを用いる場合、ハザード関数や生存時間関数の形状が明確に特定される点が特徴的である。また、パラメトリックモデルでは、比例ハザードモデルとは異なり、比例ハザード性の前提は必要とされない⁶⁷。

パラメトリックモデルを用いた場合の期限前返済の推計手法の概要は以下の通り。

[パラメトリックモデルによる期限前返済の推計の仕組み]

期限前返済が発生するまでの時間が従うと想定する確率分布の密度関数 $f(t, \lambda, p) =$ ハザード関数 $h(t, \lambda, p) \times$ 生存関数 $S(t, \lambda, p)$

- ・ 3つの関数のうち一つが決まれば、残り二つも自動的に特定される。
- ・ モデルに含まれる二つのパラメータ

λ : ハザード率 (PDの期間構造の場合と同様に各年における期限前返済の発生率に相当する) に関するパラメータ。これは、債務者属性などの各種変数で回帰分析により推計される。

λ の推計値 = Σ (係数 \times 債務者属性等の説明変数)

p : 分布の形状を決めるパラメータ (通常は固定値、同様にデータから推計される)。

このようにパラメトリックモデルでは、ハザード率に関するパラメータ λ と、何らかの基準で予め選択した確率分布の形状を決めるパラメータ p をデータに基づいて推計する。特に、 λ については、金利や債務者属性などの説明変数を用いた回帰分析により推計される。

期限前返済の推計にパラメトリックモデルを用いる場合の留意点としては、ハザード関数の形状を決める密度関数 $f(t)$ を持つ分布として何を想定すべきか、という点が挙げられる。一般的には、指数分布 (ハザード率が時間によらず固定値の場合)、ワイブル分布 (ハザード率が時間の経過とともに上昇あるいは下落していく場合)、対数正規分布 (ハザード率が当初上昇して、その後下落するような場合) といった分布が用いられることが多い。

⁶⁷ パラメトリックモデルでも、想定する確率分布の種類によっては比例ハザード性の前提を満たす比例ハザードモデルの性質を持たせることができる場合もある。

(2) 金融機関の実務におけるモデル選択に係るメリットと留意点

期限前返済の期間構造の推計に際して、パラメトリックモデルと比例ハザードモデルのいずれを選ぶべきかについては、慎重な検討が必要である⁶⁸。

過去の期限前返済に関するデータの十分な蓄積があり、経験的な知見としての予想が可能な場合には、その予想にあった形状の分布を選ぶことでパラメトリックモデルを利用することができる。パラメトリックモデルでは、こうした期限前返済の期間構造に関する事前の予想をモデル構築に活かすことができるという利点を持つ。また、ハザード関数、生存関数を明確に特定できるという点でモデルの構造が簡潔であり、その分、回帰モデルとしても高い精度が期待できるというメリットがある。

一方で、データ蓄積の不足などにより、期限前返済の期間構造に関する予想が得られない場合は、期限前返済の発生予想を理論的に考察し、そこから適切な確率分布に関する知見を得ることは容易ではない。実際とは異なる分布を選択することで推計結果に歪みを生じさせる危険性もあり得る。

したがって、金融機関の実務におけるモデル選択（比例ハザードモデル、パラメトリックモデルの選択）に関しては、期限前返済に関する知見が十分得られているかなどについてしっかりとした検討を行った上で適切なモデルの選択が行われる必要がある。

⁶⁸ 金融機関の一部には、実際にパラメトリックモデルを用いているところもあるようである。なお、パラメトリックモデルでも、説明変数の選択、モデルの推計・検証方法などの基本的な流れは比例ハザードモデルと大きくは変わらない。

(参考文献)

- 一條 裕彦、森平 爽一郎[2001]、「住宅ローンのプリペイメント分析」、JAFEE2001 夏季大会予稿集、221-239 頁
- 志立 正弘[2004]、「金利低下時における住宅ローン期限前返済率の変動特性について—ローン設定からの経過月数との関連性に着目して」、ニッセイ基礎研究所、<http://opac.ndl.go.jp/articleid/6908703/jp>
- 日本銀行 金融機構局[2007]、「住宅ローンのリスク管理～金融機関におけるリスク管理手法の現状～」<リスク管理と金融機関経営に関する調査論文>、http://www.boj.or.jp/research/brp/ron_2007/ron0703c.htm
- 日本銀行 金融機構局[2011]、「コア預金モデルの特徴と留意点—金利リスク管理そしてALMの高度化に向けて—」<リスク管理と金融機関経営に関する調査論文>、http://www.boj.or.jp/research/brp/ron_2011/ron111124a.htm
- 日本証券業協会[2006]、「PSJモデルガイドブック」、<http://www.jsda.or.jp/html/syoukenka/psj/guide.pdf>
- バーゼル銀行監督委員会[2010]、「信用リスクの計測と管理のためのベンダー・モデル」(原題: Vendor models for credit risk measurement and management), BCBS Working Papers No. 17, http://www.bis.org/publ/bcbs_wp17.htm
- 藤井 眞理子、竹本 遼太[2009]、「中小企業のデフォルトリスクとその期間構造: 大規模財務データによる実証分析」、金融庁金融研究研修センターディスカッションペーパーDP2009-12
- 山寄 輝[2005]、「住宅ローン債権担保証券のプライシング手法について: 期限前償還リスクを持つ金融商品の価格の算出」、金融研究第 24 巻別冊第 2 号、日本銀行金融研究所、57-113 頁
- 山下 智志、安道 知寛[2006]、「時間依存共変量を用いたハザードモデルによるデフォルト確率期間構造の推計手法」、統計数理 54 巻第 1 号、統計数理研究所、23-38 頁
- Allison, Paul D. [1982], “Discrete-Time Methods for the Analysis of Events Histories,” *Sociological Methodology*, pp. 61-98.
- Cox, D. R. [1972], “Regression models and life tables,” *J. R. Stat. Soc. [B]*, 34, pp. 187-220.
- Kleinbaum, D.G and Klein, M. [2005], *Survival Analysis*, Springer
- Shumway, Tyler [2001], “Forecasting Bankruptcy More Accurately: A Simple Hazard Model,” *Journal of Business*, 74, pp. 101-124.
- Sugimura, Toru [2002], “A Prepayment Model for the Japanese Mortgage Loan Market: Prepayment-Type-Specific Parametric Model Approach,” *Asia-Pacific Financial Markets*, 9, pp. 305-335.