



BOJ *Reports & Research Papers*

2017年1月

周波数分析からみた近年の耐久財消費の動向

日本銀行調査統計局

東 将人

河田 皓史

本稿の内容について、商用目的で転載・複製を行う場合は、予め日本銀行調査統計局までご相談ください。

転載・複製を行う場合は、出所を明記してください。

周波数分析からみた近年の耐久財消費の動向‡

■要 旨■

個人消費は、2014年4月の消費税率引き上げ以降、全体として底堅さを維持しているものの、力強さに欠ける状態が長引いてきた。これには、様々な要因が指摘されてきたが、本稿では、2009年以降の耐久財消費を促進する各種の政策や消費税率の引き上げに伴う駆け込み購入など、耐久消費財の買替えを促進する政策や制度の影響に注目した。

本稿では、「周波数分析」を用いて、耐久財消費を買替えサイクルに基づく複数の周期変動に分解することで、各種の政策や制度が耐久財消費に与えた影響を定量的に分析した。その結果、特にデジタル家電の消費の循環変動が含まれる中期循環成分（2～7年周期）や、乗用車や白物家電の消費の循環変動が含まれる長期循環成分（7～12年周期）が、2014年4月以降の耐久財消費を大きく下押ししていたことが示された。もともと、2016年以降をみると、長期循環成分は耐久財消費に対して依然として下押しに効いているものの、中期循環成分は増加する段階となっており、この面での下押し効果は、剥落しつつあると考えられる。

* 日本銀行調査統計局 E-mail : masato.higashi@boj.or.jp

† 日本銀行調査統計局 E-mail : hiroshi.kawata@boj.or.jp

‡ 本稿は、2016年7月に公表された日本銀行「経済・物価情勢の展望（展望レポート）」のBOX3で示された分析を参考にしている。本稿の作成では、関根敏隆、中村康治、一上響、川本卓司、武藤一郎、開発壮平、古賀麻衣子、加藤直也、倉知善行、三浦弘の各氏および日本銀行スタッフから有益なコメントを得た。記して感謝の意を表したい。残された誤りは、全て筆者らに帰する。なお、本稿の内容と意見は筆者ら個人に属し、日本銀行の公式見解を示すものではない。

1. はじめに

個人消費は、2014年4月の消費税率引き上げ以降、全体として底堅さを維持しているものの、力強さに欠ける状態が長引いてきた。この背景として、各種耐久財消費促進政策等による前倒し消費の影響、消費税率引き上げや食料品価格等の上昇に伴う実質可処分所得の減少、株価下落等に伴う負の資産効果、天候不順、年金等の社会保障制度に関する不安など、様々な要因が指摘されてきた。

本稿では、その中でも、耐久消費財の買替えを促進する政策や制度の影響に注目する。2009年以降、省エネ耐久財消費を促進する経済政策の実施（家電エコポイント、エコカー補助金・減税）、地上デジタル放送への移行を受けた地上デジタル放送対応テレビへの買替えの進展、消費税率の引き上げに伴う駆け込み購入など、通常の耐久財の買替えサイクルよりも早く買替えを促進する政策や制度が相次いだ。これらの結果、その後の耐久財消費が落ち込んだと考えられる。もっとも、その影響を定量的に示した分析は少ない。そこで、本稿では、特に主要な耐久財の買替えサイクルに着目して、耐久財消費を複数の周期変動に分解することで、各種の政策や制度が耐久財消費に与えた影響を定量的に分析する。景気循環を複数の周期を持つ波で説明する試みは、Schumpeter（1939）が複合循環論¹を主張するなど古くから行われてきたが、本稿では、複数の循環成分を抽出するための時系列アプローチとして広く用いられている「周波数分析」を行った。

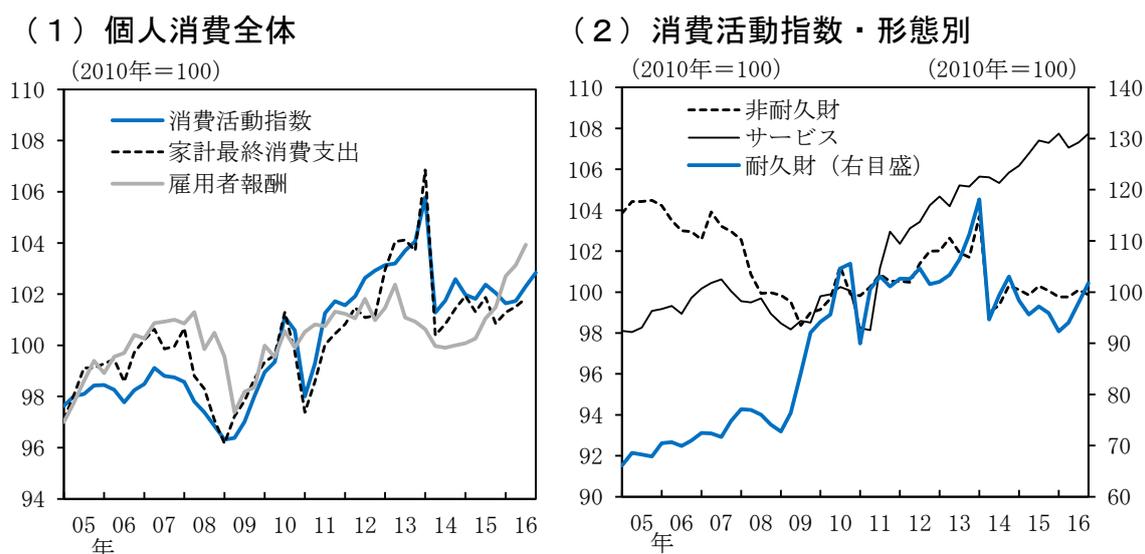
本稿の構成は以下のとおりである。第2節では、個人消費について、特に近年の耐久財消費を中心に概観する。第3節では、本稿で用いる周波数分析について説明する。第4節では、耐久財消費に対して買替えサイクルに基づいた周期で周波数分析を行い、各種の政策や制度による耐久財消費の循環的な変動が個人消費全体に与えた影響を確認する。最後に、第5節で本分析の結論と課題をまとめる。

¹ 景気循環は、Kondratieff（1925、1935）が示した約50年周期、Juglar（1862）が示した約10年周期、Kitchin（1923）が示した約40か月周期の複数の変動から構成されるとする主張。

2. 近年の個人消費と耐久財消費

2014年4月の消費税率引き上げ以降、個人消費は、全体として底堅さを維持しているものの、力強さに欠ける状態が長引いてきた(図表1)。特に2015年以降は、雇用者報酬がはっきりと増加するもとでも、個人消費は概ね横ばいで推移しており、力強さはみられない。個人消費を形態別にみると、最近では、サービス消費は堅調ななか、耐久財と非耐久・半耐久財が弱めで推移している。この背景として、各種耐久財消費促進政策等による前倒し消費の影響、消費税率引き上げや食料品価格等の上昇に伴う実質可処分所得の減少、株価下落等に伴う負の資産効果、天候不順、年金等の社会保障制度に関する不安など、様々な要因が指摘されてきた。

(図表1) 近年の個人消費

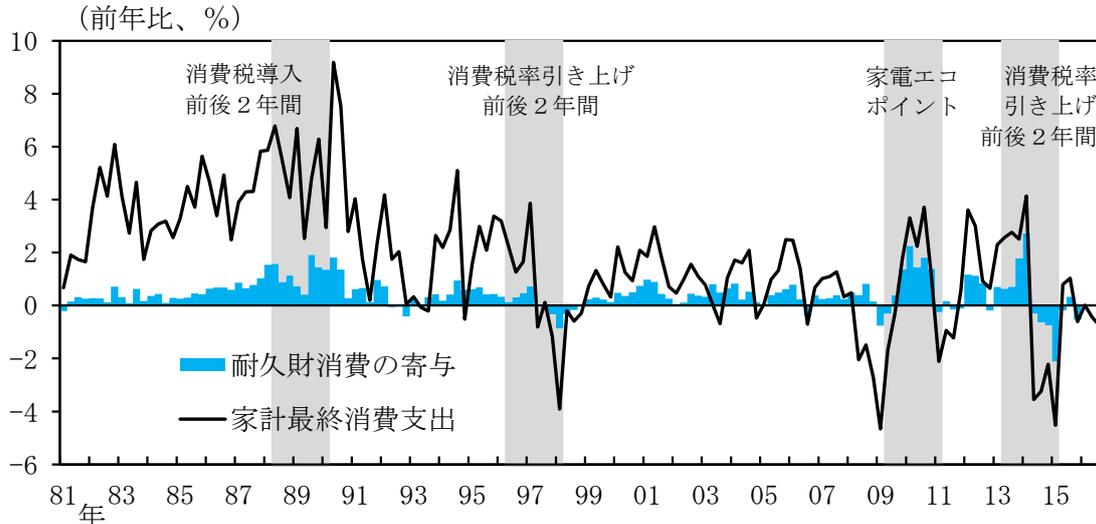


(注) (1) の消費活動指数は旅行収支調整済。家計最終消費支出は持ち家の帰属家賃を除いている。(1) (2) とも実質ベース。

(出所) 内閣府「国民経済計算」、日本銀行「消費活動指数」

特に、耐久財消費の動きに注目すると、2008年秋のリーマンショック以降、大きな変動をみせており、消費全体に与える影響も大きいことが分かる(図表2)。この背景には、2009年以降に実施された、①省エネ耐久財消費を促進する経済政策の実施(家電エコポイント、エコカー補助金・減税)や、②地上デジタル放送への移行を受けた地上デジタル放送対応テレビへの買替えの進展、③消費税率引き上げによる駆け込みとその反動などが指摘できる(図表3、参考図表1)。

(図表 2) 個人消費の変動と耐久財消費の寄与



(注) 家計最終消費支出は除く持ち家の帰属家賃。2016/1Q～3Qは、消費活動指数(旅行収支調整済)、消費活動指数・実質耐久財指数の前年比を用いて算出。実質ベース。

(出所) 内閣府「国民経済計算」、日本銀行「消費活動指数」

(図表 3) 近年の耐久財消費に関わる制度要因

		対象財	申請(購入)期間・時期
① 省エネ耐久財消費促進政策 ²	家電エコポイント	テレビ エアコン 冷蔵庫	2009年5月～11年3月
	エコカー補助金	乗用車	・2009年6月～10年9月 ・2012年4月～9月
	エコカー減税	乗用車	2009年4月～
② 地上デジタル放送への完全移行		テレビ	2011年7月
③ 消費税率引き上げ(5%→8%) ³		全て	2014年4月

例えばテレビの出荷台数をみると、2009～11年度には、それまでの年平均出荷台数の2倍強にあたる約1,900万台/年を出荷するなど大きく増加した後、その後の5年間は約500万台/年まで減少している(図表4)。テレビの買替え理由を確認すると、以前は「故障」が主要因であったが、2009～11年度は、「上位品目(への買替え)」や、地上デジタル放送への対応も含まれるとみられる「そ

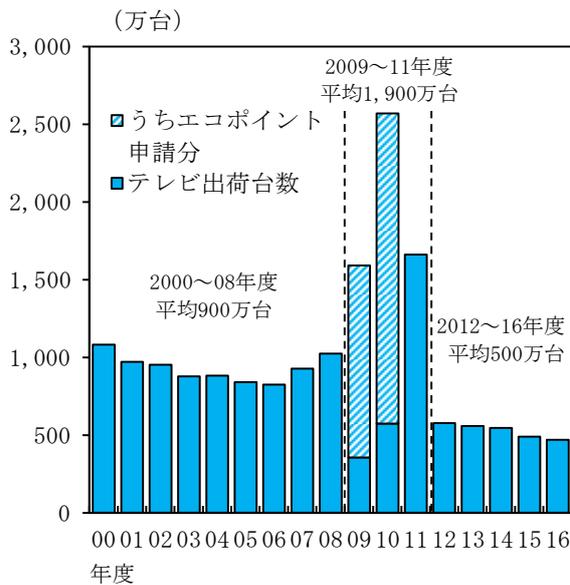
² 制度の詳細は参考図表1を参照。

³ なお、2014年4月時点では、2015年10月に消費税率を8%から10%に更に引き上げるとされていたことも、駆け込み購入を促した可能性がある。

の他」が大幅に増加している（図表 5）。

このように、2009 年以降の制度要因等が、耐久財消費を大幅に促進したとみられる。耐久消費財は一度購入すると何年にもわたって使用することが可能である。本稿の問題意識は、制度要因等に影響を受けた購買行動の変化と、その後の消費への影響を、定量的に把握することにある。

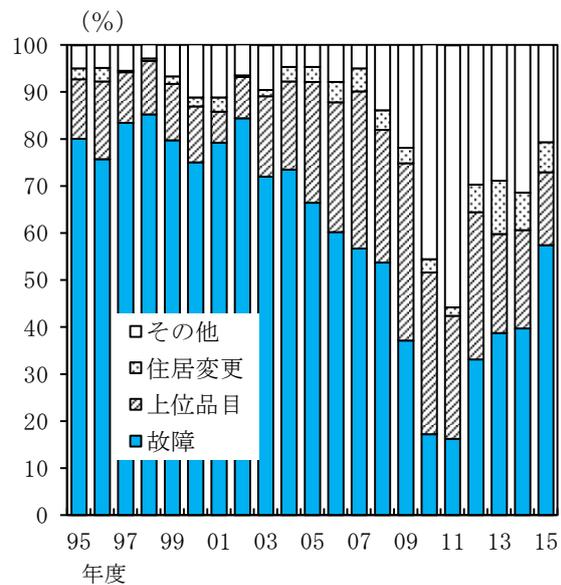
（図表 4）テレビの国内出荷台数



（注）2016 年度の値は、4～11 月の前年比を用いた年率換算値。

（出所）電子情報技術産業協会、経済産業省

（図表 5）テレビの買替え理由



（出所）内閣府「消費動向調査」

3. 周波数分析：Band-Pass フィルター

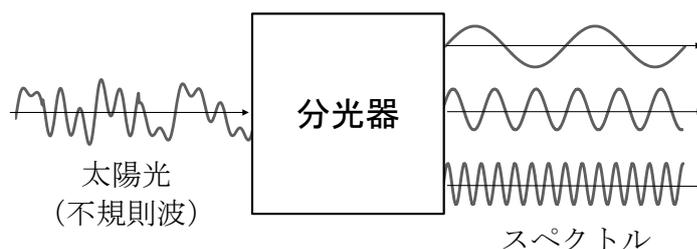
循環的な変動に着目して景気の動きを説明する試みは、Schumpeter (1939) など、古くから行われてきた。特に、GDP などのマクロデータから経済全体の循環的な変動を抽出する試みは景気分析の基礎となることから、様々な取り組みが行われてきた。具体的には、「生産関数アプローチ」、「時系列アプローチ」などがあるが、特に「時系列アプローチ」は基本的に対象となるデータ（例えば GDP データ）しか必要としないことから、実務的な簡便さもあり、広く分析に用いられている。「時系列アプローチ」で広く使用される手法には、Hodrick and Prescott (1981) が示した HP フィルターや、Baxter and King (1999) が周波数分析をもとにして特定の周期の循環の抽出を可能にした Band-Pass フィルタ

一が挙げられる。

本稿では、買替えサイクルの異なる耐久財消費の循環変動を捉えるために、複数の周期の循環を抽出可能な周波数分析を用いる。周波数分析とは、ある時系列データについて、①様々な周期を持つ波の加重和として示し、②分析対象としたい周期の波だけを抽出してその特性を分析する手法のことを指す（詳細は補論参照）。

この手法をイメージする分かりやすい事例として、太陽光を分光器に通すことで、波長の長さの順に七色の光に分解される事象が挙げられる（図表6）。この事象は、様々な波長（周期）の波の集合体である太陽光が、分光器によって波長の異なる波に分解された結果であるが、まさに、この概念を経済の時系列データに応用するのが周波数分析である。

（図表6）分光器による光の分解



（出所）日野（1977）

上記の例における分光器のように、時系列データの中から、ある周波数の波を取り出す手法として、フーリエ変換を用いる。フーリエ変換は、ある時系列データを正弦関数（ $\sin \theta$ ）と余弦関数（ $\cos \theta$ ）の加重和を用いた数学的表現に基づいて解析を行う手法であり、電気回路などを扱う電気工学などでは一般的に用いられている。具体的には、以下のような手順で行う。

- ①時系列データを正弦関数と余弦関数の加重和（フーリエ級数）で記述する。
- ②フーリエ級数で表現された時系列データから、フーリエ変換によって周波数毎の成分を求める。
- ③抽出したい周期に相当する成分はそのままとし、それ以外の成分をゼロに置き換える。
- ④逆フーリエ変換を施して、時系列を復元する。

フーリエ変換を用いた周波数分析では、Band-Pass フィルターという手法が、信号解析などで広く用いられている。経済分析に用いられる Band-Pass フィルターとしては、Baxter and King (1999) が示した BK フィルターと、Christiano and Fitzgerald (2003) が示した CF フィルターが知られている（図表 7）。BK フィルターは、中心移動平均に基づいて計算されているため、最新期のデータが追加されてもフィルター抽出後の値が不変だが、最新期の値が計算できないという点で、足もとの景気分析に適さない。一方、CF フィルターは、最新期の値まで計算可能であるが、最新期に近いデータは中心移動平均から徐々に後方移動平均に近い計算になることから、データが追加されて再推計を行うたびに全ての期の値が変化するという短所がある⁴。本稿では、消費の近年の変動の分析が主眼であるため、最新期まで計算可能な CF フィルターを用いて分析を行う。

（図表 7）BK フィルターと CF フィルターの特徴

	長所	短所
BK フィルター	<ul style="list-style-type: none"> データが更新されてもフィルター後の値が変わらない。 	<ul style="list-style-type: none"> 最新期が計算できない 移動平均の項数（ウインドウ）を超える長い周期のデータが取り出しにくい。
CF フィルター	<ul style="list-style-type: none"> 最新期まで計算できる。 	<ul style="list-style-type: none"> データが更新されると、すべての期の結果が変わる。

（出所）山澤（2009）

4. 耐久財消費の周波数分析

2 節で述べたように、近年の制度要因等が、耐久財消費の変動に大きく影響していた可能性がある。これらを定量的に確認するために、Band-Pass フィルター（CF フィルター）を用いて、耐久財消費の周波数分析を行う。

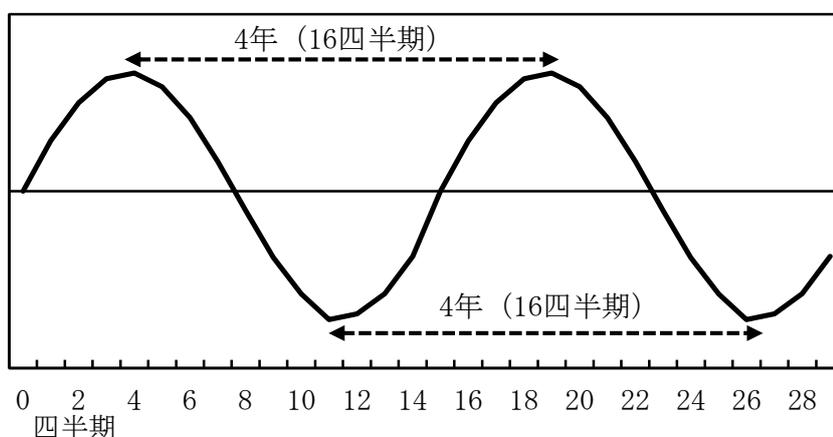
4-1. 周期の設定

CF フィルターは、抽出する周期の幅を任意に設定する必要がある。周期とは

⁴ また、多くのフィルター手法に共通の問題である、サンプル始期と終期の推計誤差が大きくなる、いわゆる端点問題が指摘されている。詳しくは、浦沢・清谷（2008）、山澤（2009）を参照。

波形のピークから次のピークまでの期間を指す（図表 8）。本稿の分析では、耐久消費財の買替えサイクルを捉えることを目的に、耐久消費財の買替え時の平均使用年数をもとに、抽出する成分の周期幅を設定することとした。これは、例えば 4 年で買替えられる財の消費に盛り上がり（ピーク）が発生した時には、買替えサイクルである 4 年後に次のピークが発生する可能性が高くなるという考え方を前提としている。

（図表 8）周期のイメージ（4 年の場合）



耐久財の買替え時の平均的な使用年数を確認すると、テレビやデジカメ、パソコンなどのデジタル家電や携帯電話などは相対的に短い年数（5 年程度）で買替えが行われる一方で、エアコンや冷蔵庫などの白物家電や乗用車は、長い年数（10 年程度）で買替えが行われている（図表 9(1)）。両者の買替え理由にも差異が表れており、白物家電は「故障」するまで買替えない消費者が多い一方で、デジタル家電や携帯電話では「上位品目（への買替え）」などの「故障」以外の理由で買替える消費者が多い⁵（図表 9(2)）。したがって、デジタル家電や携帯電話などの中期で買替えられる耐久財と、乗用車や白物家電など長期で買替えられる財では、購買行動や購買理由に差異があると考えられる。

本稿では、景気循環に関する既往の分析も考慮して循環成分を 12 年までの周期成分としたうえで⁶、その循環成分からデジタル家電や携帯電話などの買替え

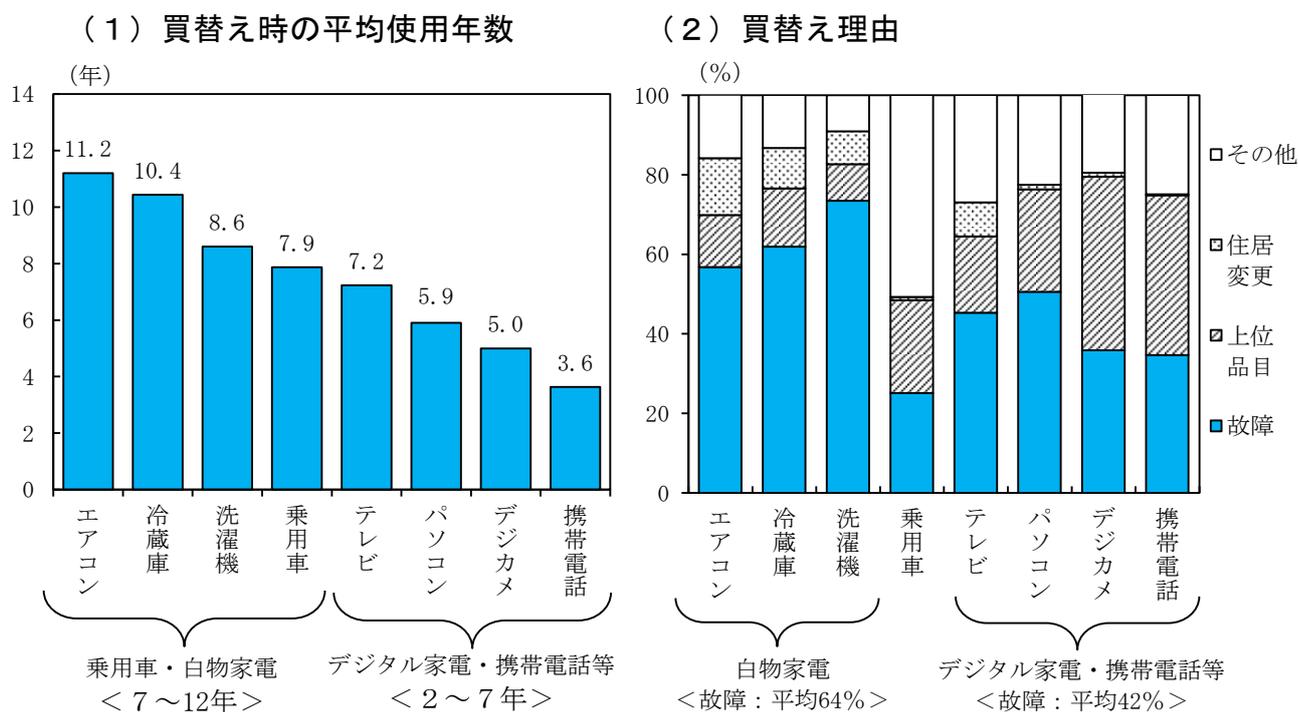
⁵ 「乗用車」の買替え時の平均使用年数は長い一方で、買替え理由として「故障」を挙げる比率は少ない。この背景として乗用車には中古市場が発達していることが挙げられ、故障する前に売却（買替え）を行う消費者が相応にいることが推察される。

⁶ Burns and Mitchell (1946) が「景気循環は 1~10 年または 12 年の周期である」と指摘したことや、Howrey (1968) などが約 10 年周期のジュグラー循環よりも長い周期の循環の存

サイクルが含まれると考えられる2～7年の周期成分（中期循環成分）と、乗用車や白物家電の買替えサイクルが含まれると考えられる7～12年の周期成分（長期循環成分）を抽出することとした。このようにして抽出した周期成分は、振幅一定の波ではなく、時間とともに変化する（詳細は補論参照）。したがって、制度要因等で購買行動が変化するなどの様々な要因で振幅や（指定した周期の範囲内の）周期が変化する、複雑な循環成分が取り出せることになる。

本稿の周波数分析では、中期・長期循環の抽出と同時に、統計のノイズや天候要因または1年後には影響が剥落するようなイベントショックなどの短期の変動が含まれると考えられる、周期が2年以下の短い成分（短期循環成分）も抽出した。そのうえで、耐久財消費の実際の変動と3つの周期（2年以下、2～7年、7～12年）の残差を「トレンド」とみなし、耐久財消費を4つの成分に分解した。

（図表9）耐久財買替え時の平均使用年数・買替え理由



（注）耐久財消費促進政策の影響のない2013～15年度の平均値。

（出所）内閣府「消費動向調査」

在に否定的な見解を示したことなどから、その後の景気循環の分析では、10～12年程度を最大とすることが多い。

4-2. 周波数分析結果

(1) 周波数分析結果の概観

1980年以降の耐久財消費（四半期、季節調整済）について、Band-Pass（CF）フィルターを用いて、①短期循環成分（2年以下）、②中期循環成分（2～7年）、③長期循環成分（7～12年）、④トレンド（12年以上）に分解した（図表10）⁷。

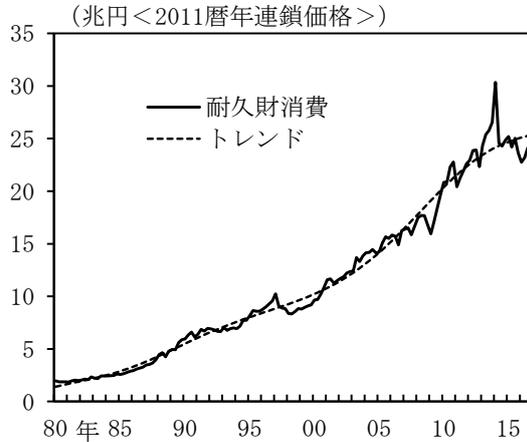
本稿で分析対象としている耐久財消費は、中期循環成分と長期循環成分の影響を受ける。そこで、中期・長期循環成分が耐久財消費全体にどの程度影響したかをみるために、耐久財消費全体の前期比変化率への両成分の寄与度の推移をみた（図表11）。2009年以降の動きに注目すると、2009～10年には中期・長期循環成分ともに前期比で大きく押し上げた後、2011年中は中期循環成分が下押しに効いていた。これは、図表3で挙げた耐久財消費促進政策や地上デジタル放送への切り替えに伴いテレビの買替えが促進された影響を強く受けていると考えられる。その後、2014年4月の消費税率引き上げに伴う駆け込み購入もあって、2013年から2014年1Qまでは中期循環成分が押し上げに効いていた。その後、2014年2Qから2015年4Qまでは、消費税率引き上げに伴う駆け込み購入の反動に加えて、2009年以降の耐久財消費促進政策等の影響で買替えが進んでいたことも受けて、中期・長期循環成分の両者が同時に押し下げに寄与していた。このように、2014年2Qから2015年の間は、周期の異なる主要な耐久消費財の需要の循環が同時に下押しに効いていたことが示唆される。2016年に入ってから、長期循環成分は依然として下押しに効いている一方で、中期循環成分が増加する段階に入っており、中期・長期循環成分の影響は、マイナスからプラスに転じている。今後、耐久財消費への下押し効果は、徐々に剥落していくと考えられる。

これらの周波数分析の結果からは、2009年以降の耐久財消費促進政策や消費税率引き上げに伴う駆け込み購入の影響で買替えが進んだ結果、その後の耐久財消費が下押しされてきたことが示唆される。

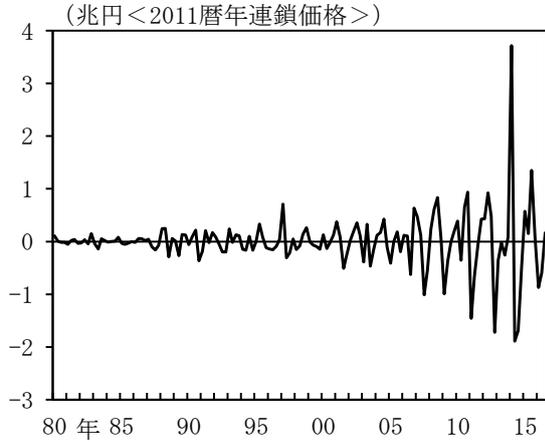
⁷ なお、Band-Pass フィルターでは対象系列の定常性を前提としているため、Cristiano and Fitzgerald (2003) に倣って線形トレンドを除去したうえで、フィルタリングを行っている。なお、耐久財消費を対数値にしたうえで同様の周波数分析を行った場合も、以降で述べている結論と同じ結論が得られている。

(図表 10) 耐久財消費の周波数分析結果

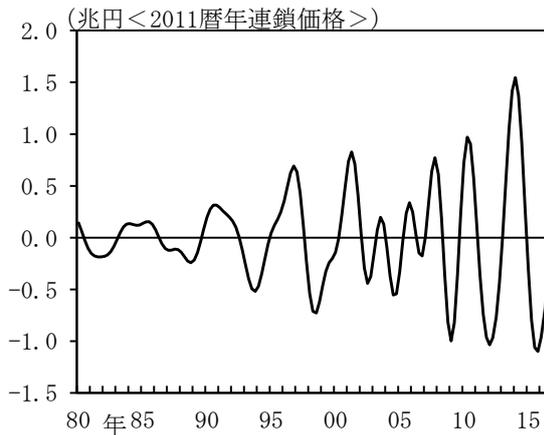
(1) 原系列とトレンド



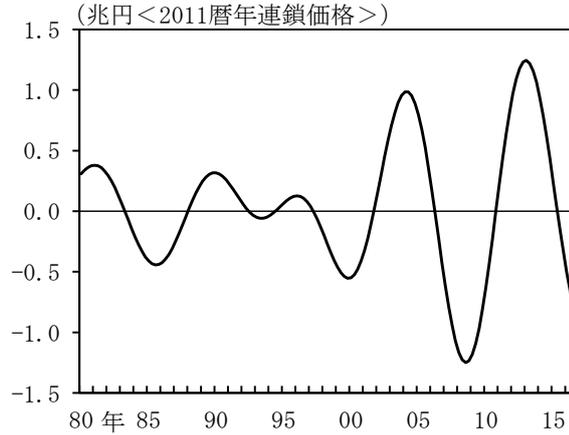
(2) 短期循環成分 (2年以下)



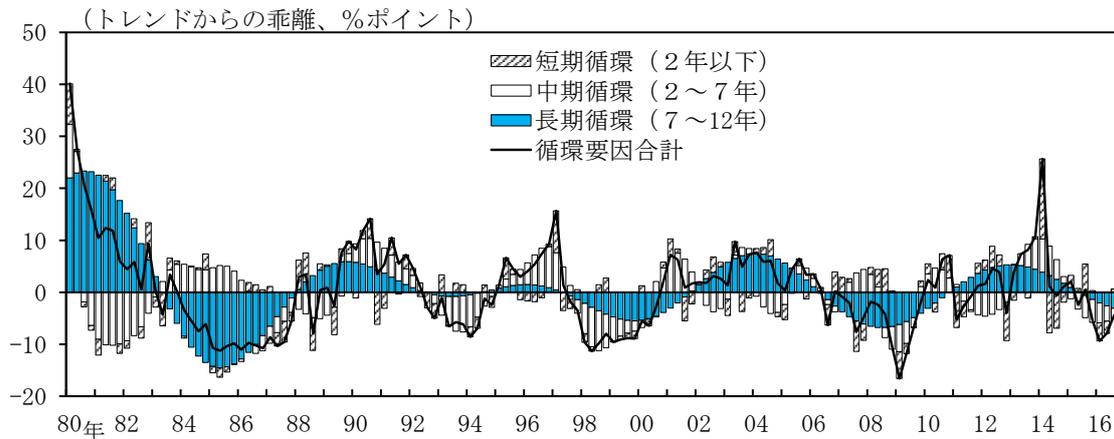
(3) 中期循環成分 (2~7年)



(4) 長期循環成分 (7~12年)



(5) 循環要因の分解

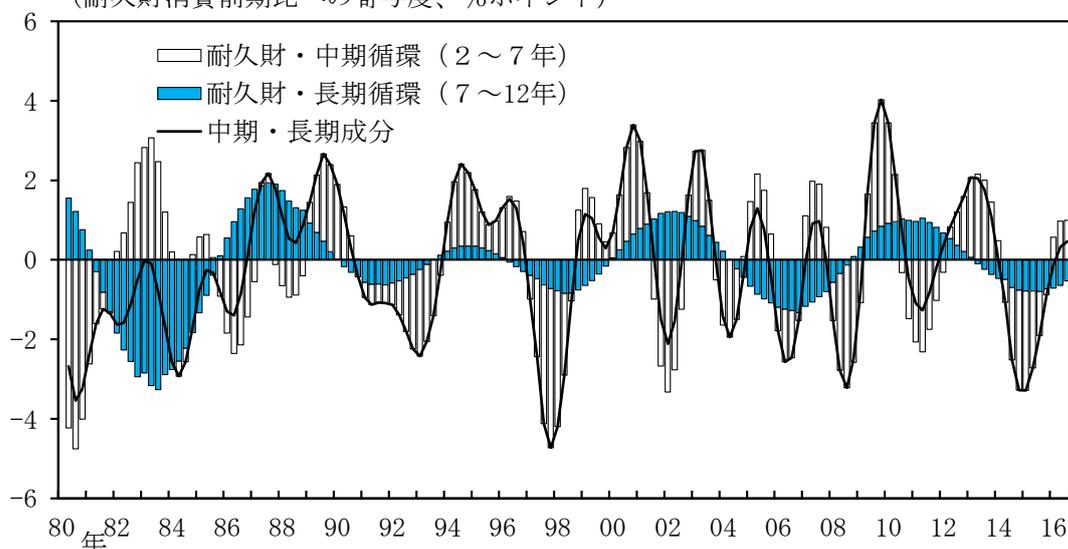


(注1) GDP 実質形態別消費・耐久財 (2016/1Q~3Q は、実質消費活動指数・耐久財の前期比を用いた延長推計値) を用いて周波数分析を実施。以降同様。

(注2) トレンド成分は、原系列から①短期循環成分 (2 年以下)、②中期循環成分 (2~7 年)、③長期循環成分 (7~12 年) を除いた残差。以降同様。

(図表 11) 耐久財消費（前期比）への中期・長期循環要因の寄与

(耐久財消費前期比への寄与度、%ポイント)



(2) 各循環成分の変動の背景

本項では、耐久財消費の各循環成分の変動の背景について、消費に影響を与えると考えられるいくつかの要因（株価、消費者マインド、家計所得）と比較することによって分析を行う。具体的には、上記の各種要因について、耐久財消費と同様の周波数分析を行ったうえで（参考図表 2～4）、各循環成分同士の関係性を考察した⁸。

① 短期循環成分（2年以下）

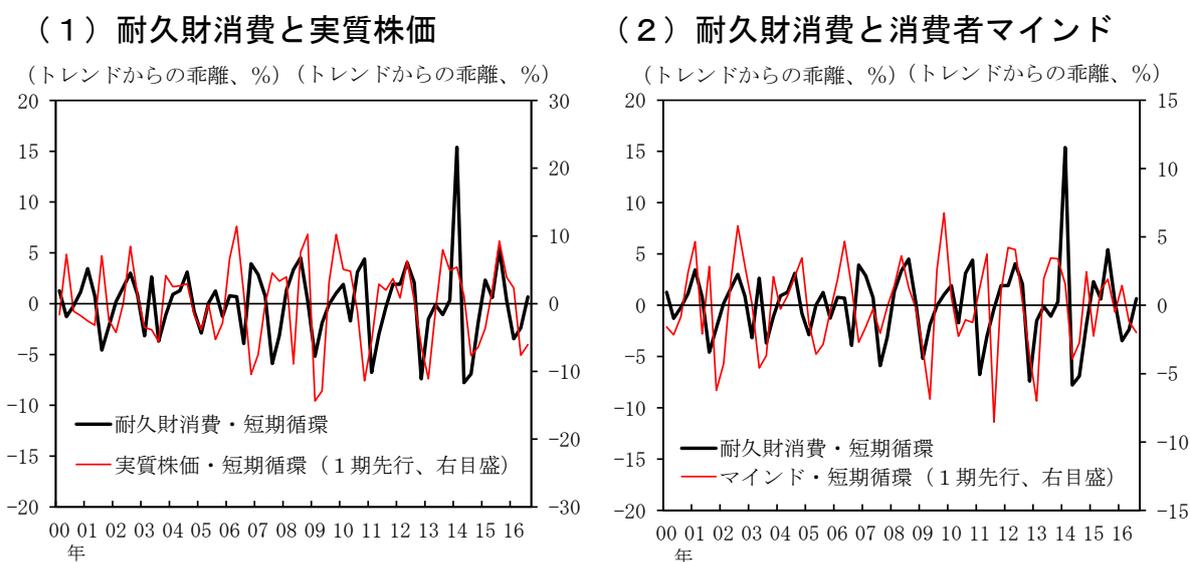
2年以下の周期を持つ成分には、いわゆる統計のノイズも含めた短期の変動や、エアコンなど季節商品に対する天候の影響なども含まれると考えられるが⁹、特に、消費税率引き上げに伴う駆け込み購入とその反動の影響が特徴的である。2014/1Qの短期循環成分は、耐久財消費全体を+14%押し上げているが、翌2Qには-18%押し下げている（前掲図表 10）。このように、消費税率引き上げに伴う駆け込みとその反動の影響は、短期循環成分にも相応に抽出されている。

⁸ 耐久財消費との比較のために12年までの周期を循環成分と定義した。ただし、日本経済の景気循環は約4～5年であるため（内閣府）、やや長い周期までを循環成分と捉えていることには注意が必要。

⁹ 天候要因による、耐久財も含めた個人消費全体への影響については、日本銀行「経済・物価情勢の展望（2016年4月）」のBOX4を参照。

また、株価の変動が大きいことを考えると、株価の短期的な変動を通じた消費への影響も短期循環成分に含まれる可能性が高い。このほか、消費者マインド面を通じた短期的な影響も短期循環成分に含まれると考えられる。そこで、耐久財消費と実質株価やマインド指標（1期先行）の短期循環成分を比較したところ、周期と位相（一周期のうちどのタイミングにいるか）が類似している局面も多い（図表 12）。すなわち、株価やマインドの短期的な変動は、耐久財消費の短期的な変動に相応に影響していることが示唆される。

（図表 12）耐久財消費・株価・消費者マインドの短期循環成分



(注1) 実質株価は、日経平均株価を消費者物価指数（総合）でデフレートして算出。
 (注2) 消費者マインドは、内閣府「消費動向調査」の消費者態度指数。

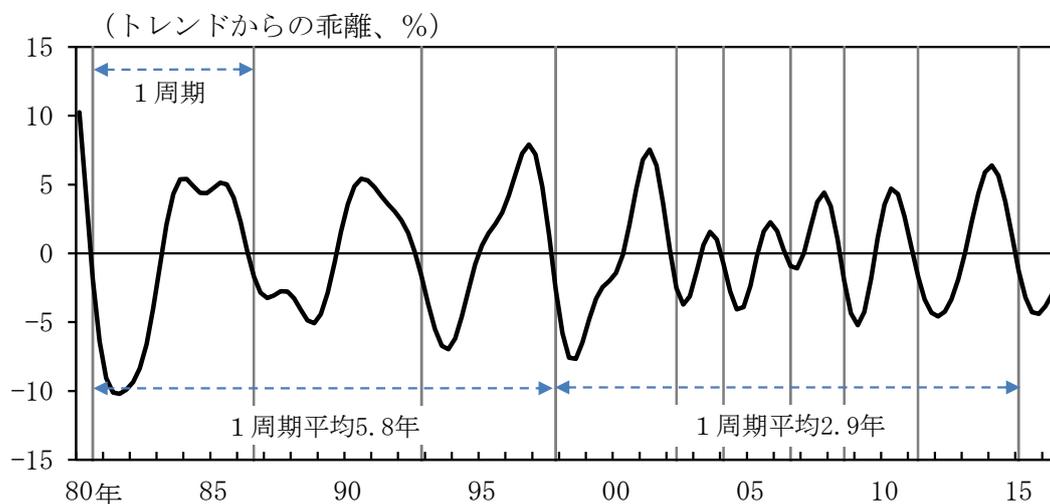
② 中期循環成分（2～7年）

(a) 買替えサイクル要因

2～7年の周期を持つ循環成分には、テレビなどのデジタル家電やパソコン、携帯電話などの耐久財の消費の循環的な変動が反映されている。長期的に中期循環成分の推移をみると、2000年以前の循環周期は1周期が平均5.8年であったが、2000年以降に発生した循環周期は平均2.9年となるなど、2～7年の中でも変動の周期が短くなってきている（図表 13）。これは、買替えサイクルが他のデジタル家電財に比べて短い「携帯電話」の購入が増えてきたことと、特に2009年以降は図表 3 で挙げた耐久財消費に関連する制度要因等が買替えサイクルを

一時的に早めた結果だと考えられる。

(図表 13) 耐久財消費の中期循環成分(2~7年)の周期



近年の中期循環成分の変動をみると、リーマンショック以降に実施された耐久財消費促進政策や地上デジタル放送への移行などが、特にテレビの買替えを促進して2009年~10年にかけてプラスに寄与したあとに反動が出ている。その後、2014年4月の消費税率引き上げ前の駆け込み需要の影響も加わって、耐久財消費を押し上げたあと、その反動が出ていたことが示唆される。もっとも、2016年以降は再び中期循環要因が押し上げに寄与する段階に入ってきているとみられる。

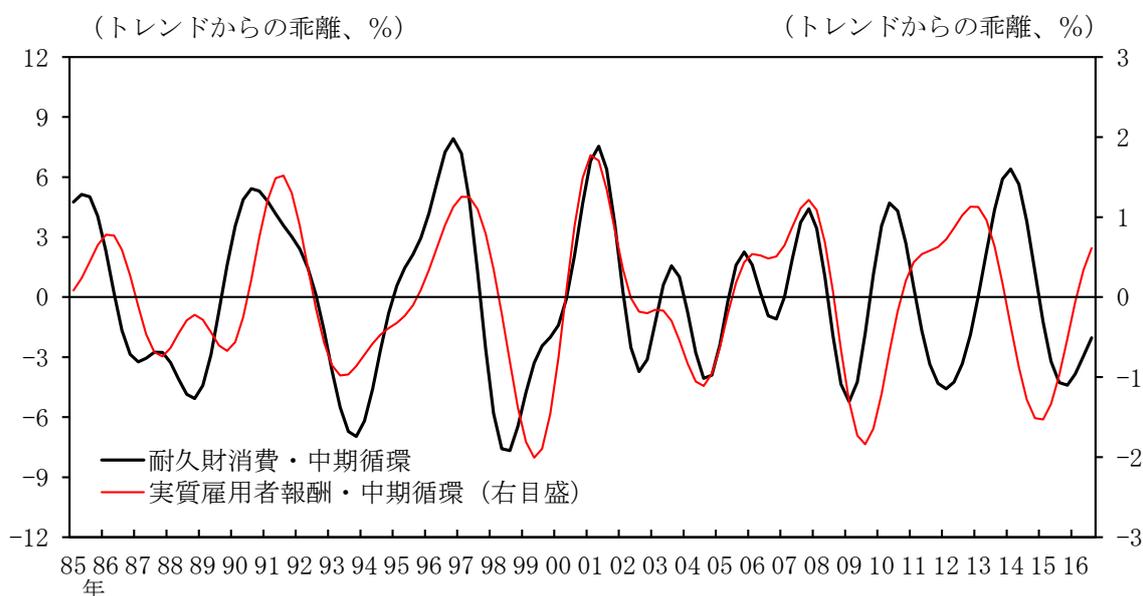
(b) その他の要因

耐久財消費の中期循環には、買替えサイクルの影響だけではなく、マクロの景気循環を背景とした家計の所得環境の変化も相応に影響していると考えられる。そこで、耐久財消費の中期循環成分と家計所得(実質雇用者報酬)の中期循環成分を比較してみると、2009年頃までは概ね周期と変動のタイミングが一致している(図表14)。もっとも、2010年以降は、両者の相関が大きく崩れている。これは、上述した制度要因等の影響で、家計所得の動きとは乖離した購買行動が発生したことを示唆している。

短期循環成分と同様に、耐久財消費の中期循環成分には、株価やマインドの中期的な動きも影響すると考えられる。例えば株価の場合は、日本企業の中期的な収益力の変化(それを受けた配当の変化)などを通じた消費への影響と考

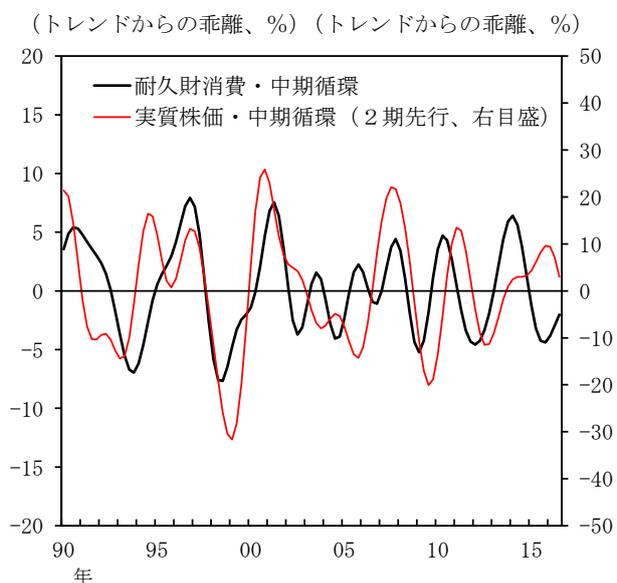
えられる。消費者マインドの場合は、消費者が直面する雇用・所得環境などの中期的な動向への反応などを抽出していると考えられる。そこで、耐久財消費と株価・マインドの中期循環成分を比較してみると、概ね周期と変動のタイミングが一致している（図表 15）。もっとも、株価と耐久財消費については、2014年以降やや乖離している。これは、上述した制度要因等の影響で、株価の動きと連動しないような購買行動が発生したことを示唆していると考えられ、前倒し購入による影響の大きさがうかがわれる。

（図表 14）耐久財消費・実質雇用者報酬の中期循環成分

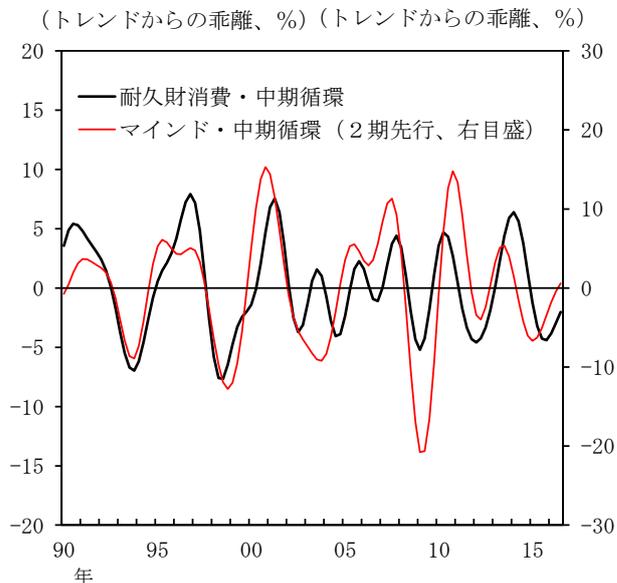


（図表 15）耐久財消費・株価・消費者マインドの中期循環成分

（1）耐久財消費と実質株価



（2）耐久財消費と消費者マインド



③ 長期循環成分（7～12年）

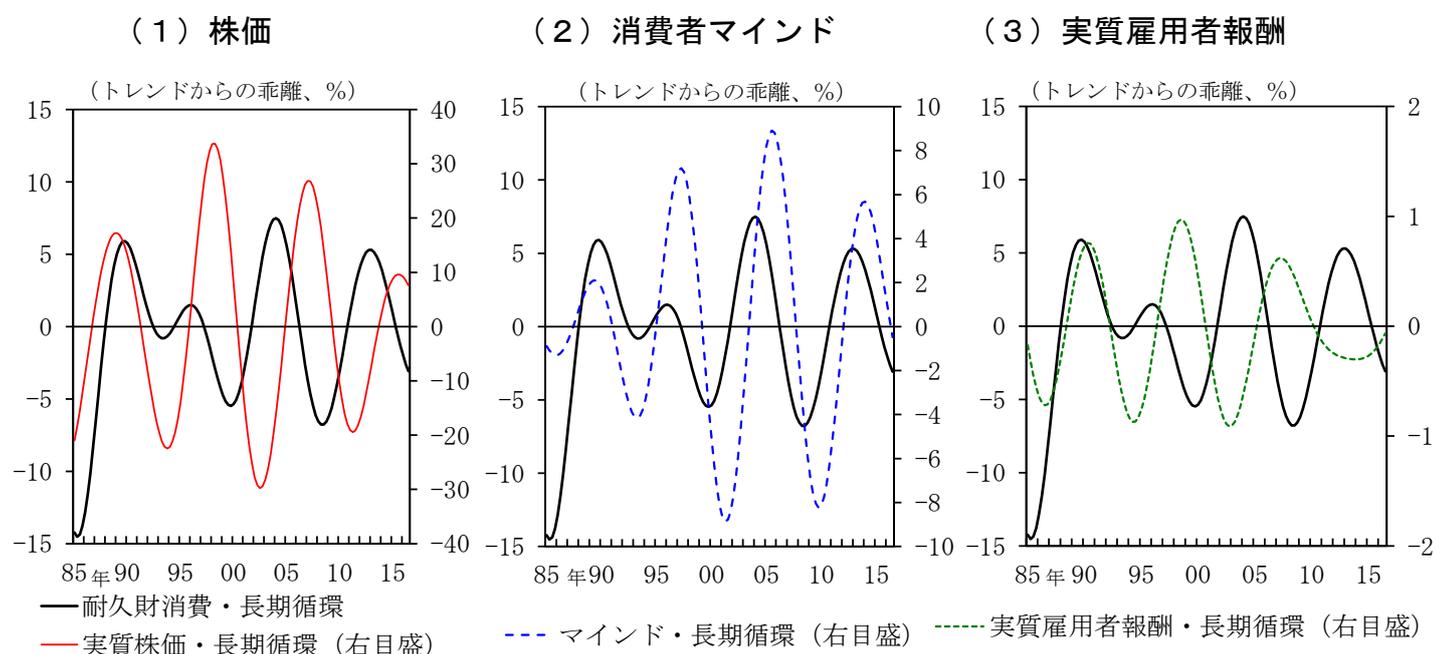
(a) 買替えサイクル要因

7～12年の周期を持つ長期循環成分には、乗用車や、洗濯機・冷蔵庫・エアコンなどの白物家電の買替えサイクルの影響が含まれると考えられる。近年の長期循環成分の変動をみると、2009年～12年頃は前期比でみて押し上げに効いている（前掲図表11）。直前の2000年～09年の循環から大きく周期が変わっていないことを考えると、家計が保有してきた耐久財の買替えサイクル（既往のサイクル）が到来したことによる買替え需要の顕現化と考えられる。特に、2009年～10年頃は、中期循環成分が耐久財消費促進政策の影響もあって増加に寄与する中で、長期循環成分も同時に押し上げていたとみられる。その後2013年頃から長期循環成分は下押しに効き始め、特に、2014年4月から2015年中は中期循環成分の下押しも重なった結果、中期・長期の買替えサイクルが同時に耐久財消費を下押ししていたとみられる。なお、2016年以降も、長期循環は依然として耐久財消費の下押しに効いている。

(b) その他の要因

耐久財消費の長期循環にも、買替えサイクルの影響だけでなく、他の要因が影響している可能性がある。そこで、中期循環成分と同様に、株価、消費者マインド、家計所得の長期循環成分と比較を行った。いずれも、1990年代半ば頃までは循環的な変動が似ていたものの、その後はほとんどそうした相似がみられない（図表16）。このことから、買替えサイクルが非常に長い耐久財については、近年では、買替えサイクル要因が強く影響していることが示唆される。なお、買替えサイクルが長い白物家電は他の耐久財に比べて故障するまで買替えない傾向が強いことも、この仮説と整合的である（前掲図表9(2)）。

(図表 16) 耐久財消費と株価・マインド・家計所得の長期循環成分



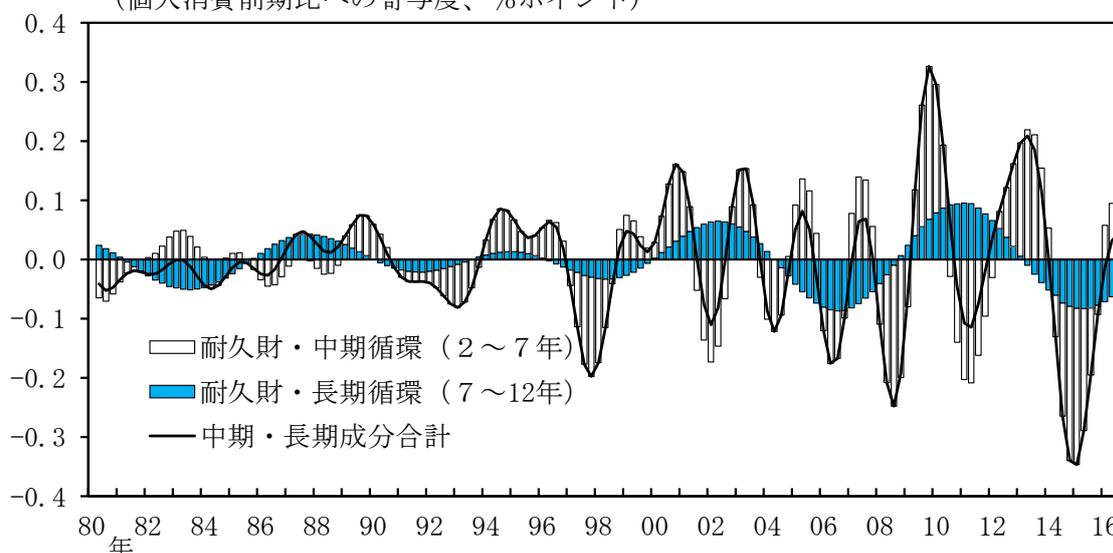
4-3. 近年の耐久財消費が個人消費全体に与えた影響

ここまでの分析からは、近年の制度要因等による耐久財消費の購買行動の変化が、買替えサイクルの一時的な短期化などを伴いつつ、中期・長期循環成分に影響を与えている様子が見られる。では、これらの成分は、個人消費全体にどの程度影響を与えていたのだろうか。そこで、耐久財消費の中期・長期循環成分の、個人消費全体の前期比への寄与をみしてみる (図表 17)。

特に近年の影響をみると、耐久財消費促進政策等を背景に中期・長期循環成分がともにプラスに寄与していた 2009～10 年には、個人消費の前期比に対して最大+0.3%ポイント程度の押し上げに効いた後、2012 年中は中期循環成分の反動を中心に最大-0.1%ポイント程度下押しに効いていた。その後、消費税率引き上げに伴う駆け込み購入が増えた局面、すなわち 2013 年から 2014 年 1Q までは、中期循環成分のプラス寄与拡大によって、前期比に対して最大+0.2%ポイント程度押し上げに効いていた。その後、中期・長期循環成分ともマイナスに寄与した 2014 年半ばから 2015 年までは、前期比を最大-0.4%ポイント程度押し下げている。

(図表 17) 耐久財消費の中期・長期循環要因の個人消費全体への影響

(個人消費前期比への寄与度、%ポイント)



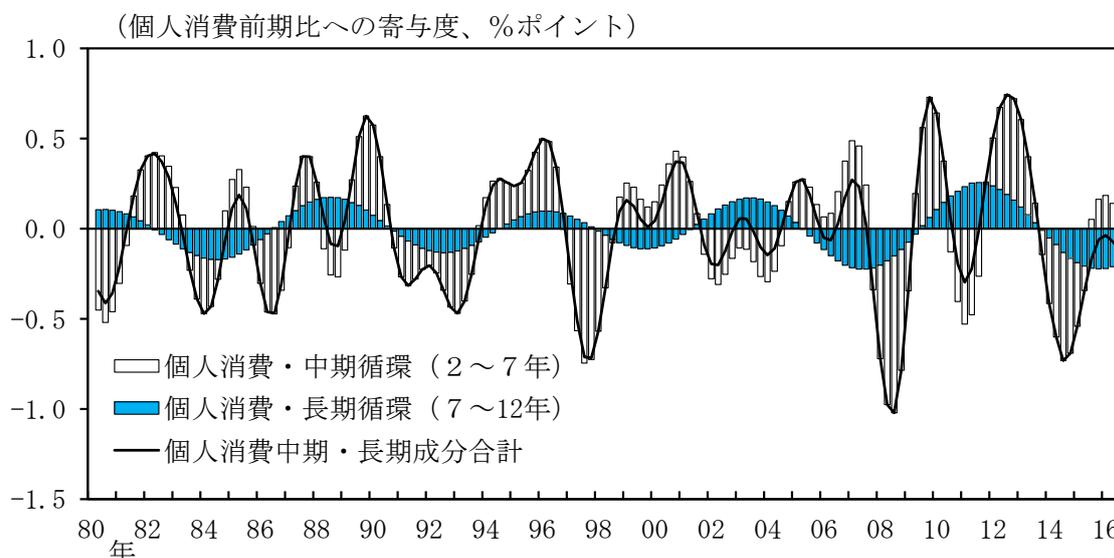
(注) 個人消費全体は、GDP 家計最終消費支出除く持ち家の帰属家賃 (2016/1Q~3Q は、実質消費活動指数の前期比を用いた延長推計値) を用いている。

このことを、より直接的に確認するために、家計消費についても耐久財消費と同様の周波数分析を行い、個人消費全体の中期・長期循環要因を確認した(図表 18、参考図表 5)。この際、いわゆる端点問題を緩和するために、2016年 4Q~2018年 1Q までの 6 四半期について、民間エコノミストの実質民間消費の予想値 (ESP フォーキャスト) を使用した系列を用いた¹⁰。

推計結果をみると、耐久消費財の分析結果と同様に、2014~15 年までは中期・長期循環要因ともに押下げに効いている。この結果は、耐久消費財の買替えサイクルの影響が、個人消費全体の変動に相応に影響しているという本稿での分析結果と整合的であると考えられる。

¹⁰ 山澤 (2009) では、いわゆる端点問題を緩和するために、本稿と同様に民間エコノミストの予測値で最新期の値を補完したうえで周波数分析を行うことで、推計誤差の改善を図っている。

(図表 18) 個人消費の中期・長期循環要因



(注) GDP 家計最終消費支出除く持ち家の帰属家賃 (2016/1Q～3Q は実質消費活動指数の前期比を、2016/4Q～2018/1Q は民間エコノミストによる平均的な予想値<ESP フォーキャスト、2016年12月時点>を用いた延長推計値) を用いて周波数分析を実施。

5. 結論と課題

本稿では、2014年4月の消費税率引き上げ以降の力強さに欠けた個人消費の背景を探るため、耐久財の買替えサイクルに注目し、耐久財消費について、主要な耐久財の買替え周期に基づく周波数分析を行った。その結果、デジタル家電・携帯電話の買替えサイクルを示す中期循環成分(2～7年周期)と、乗用車・白物家電の買替えサイクルを示す長期循環成分(7～12年周期)が、2009年以降に実施された耐久財消費促進政策や、地上デジタル放送への移行、消費税率の引き上げに伴う駆け込み購入といった制度要因等の影響を受けて、2014年4月以降は耐久財消費を大きく下押ししていたことが示された。すなわち、2014年4月以降の力強さに欠けた個人消費の要因の一つとして、耐久財の買替えサイクルの影響があることを示している。もっとも、2016年以降は、長期循環成分は依然として下押しに効いているものの、中期循環成分が前期比で押し上げる段階となっており、耐久財の買替えサイクルの下押し効果は、剥落しつつあると考えられる。

本稿の分析には課題も残されている。一つは、2014年4月の消費税率引き上げ以降の力強さを欠いてきた個人消費の要因を探るために、耐久消費財の買替えサイクルという観点から分析を行ったが、同じく弱さがみられている非耐久・半耐久財の消費についての分析は行っていない点である。非耐久・半耐久財消費の弱さには買替えサイクル以外の要因が影響していると考えられ、現状の個人消費全体を評価するという観点からは注意が必要である。また、分析手法の技術的な課題として、本稿で用いた Band-Pass フィルター (CF フィルター) は、最新期まで推計結果が抽出できる一方で、最新期のデータが蓄積された後に再推計を行うと全ての期の結果が変わり得る点が指摘できる¹¹。したがって、データの蓄積が進んだ後に再推計を行うことで、本稿の結論が適当であったかを再検証することが求められる。

以 上

¹¹ 耐久財消費について、①フルサンプル (1980/1Q~2016/3Q)、②2010年時点 (1980/1Q~2010/4Q)、③2013年時点 (1980/1Q~2013/4Q) の3時点のリアルタイム周波数分析結果を比較すると、波の強弱は幾分変化するものの、周期は概ね同じとなっている (参考図表6)。このことから、本稿での「2014年4月以降は中期・長期循環成分が耐久財消費を下押ししていた」という分析結果が妥当であることが示唆される。

(補論) 周波数分析の基礎

本補論では周波数分析の基礎について、できるだけ直感的な説明を試みる。より厳密な解説は、補論中の脚注にある参考文献を参照されたい。

1. 周波数分析とは

周波数分析に入る前に、まず以下のような回帰分析を考える。被説明変数を y_t 、説明変数を x_{nt} とする (ただし、 $t = 1, \dots, T$ 、 $n = 1, \dots, N$)。このとき、各 t 期の説明変数の数 N を、被説明変数の数 T と等しくなるまで増やしたとする ($N = T$)。このとき、どのような y_t も

$$y_t = \lambda_1 x_{1t} + \lambda_2 x_{2t} + \dots + \lambda_N x_{Nt} \quad \dots (1)$$

と表すことができる。ここで、右辺に誤差項がないのは、被説明変数 y_t が説明変数 x_{nt} で完全に説明されていることによる。

このことを具体例で確認する。補論図表 1 で示されているように、 y_t として、 $[0,1]$ の一様分布から 5 つのランダム変数を取りだしたとする。この場合、 $T = 5$ となる。ここで、各期に 1 の値をとる 5 つのダミー変数を説明変数 x_{nt} として用意する ($N = 5$)。これで (1) 式のように回帰分析を行うと、各ダミー変数 x_{nt} に係るパラメータは y_t の値そのものになり、

$$y_t = 0.61 x_{1t} + 0.98 x_{2t} + 0.27 x_{3t} + 0.01 x_{4t} + 0.28 x_{5t}$$

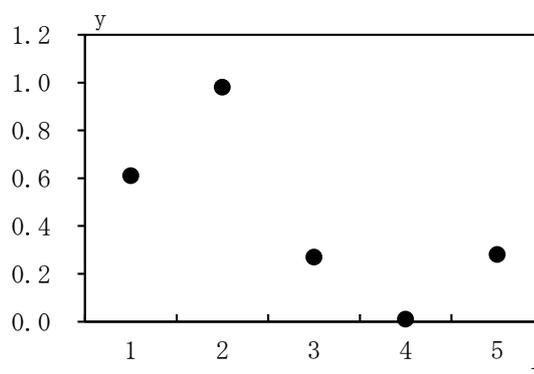
という結果になる。実際に、上記の数値例を用いて、計量ソフトで回帰分析を行えば、同じパラメータが得られ、残差がゼロになるはずである。その際、通常の計量ソフトであれば、自由度がゼロという警告を発するだろう。というのも、 x_{nt} としてどのような説明変数を 5 つ用意しても、それらが互いに独立であれば、誤差項はゼロ以外の値になる自由度がないためである。言葉を換えると、ここでやっていることは、回帰分析というよりも、一種の恒等式分解に他ならない。

周波数分析とは、上記ケースの x_{nt} として異なる周波数の“波”を用いていると考えればよい。ここで、波のような循環的な動きは三角関数で表現できるので、

$$x_{nt} = a_n \sin \theta_n t + b_n \cos \theta_n t \quad \dots (2)$$

(補論図表 1) ランダム変数 ($T = 5$)

t	y_t
1	0.61
2	0.98
3	0.27
4	0.01
5	0.28



とする。 θ_n は角周波数(角速度、angular frequency)と呼ばれる。三角関数は $\theta_n t$ が0からはじめて 2π になると1周するので、 $t=0$ のときと、 $t=2\pi/\theta_n$ のとき($\theta_n t=2\pi$ のとき)は同じ値となる。つまり、この波の周期(cycle)は $2\pi/\theta_n$ となり、高い(低い)周波数の波ほど短い(長い)周期で循環することになる¹²。

ここで、 T 個の異なる角周波数の波を用意して、(1)式に代入すると、

$$y_t = \sum_{n=1}^T \alpha_n \sin \theta_n t + \beta_n \cos \theta_n t \quad \dots (3)$$

と表せる(ただし、 $\alpha_n = \lambda_n a_n$ 、 $\beta_n = \lambda_n b_n$)。つまり、周波数分析(frequency domain analysis)とは、 y_t を様々な周波数(周期)の波に置き換えている(分解している)ことに他ならない。自由度ゼロの回帰分析の例で分かるように、どのような変数 y_t でも十分な数の独立な波を用意すれば、必ずそれらの波の線形結合として表現できるはずである。このように、任意の時系列が、様々な周波数の波の重ね合わせで表現できることは、数学的にはスペクトル表現定理(spectral representation theorem)として証明されている¹³。

このような周波数分析については「時間領域(time-domain)の表現を周波数領域(frequency-domain)の表現に置き換えること」などと言われることもある。これは、「時間とともにどう変化するかを表している時間領域のグラフは、時系列にどれだけ特定の周波数の波が含まれているかを表した周波数領域のグラフに変換できること」を意味している。しかし、より直感的に捉えれば、ある系列に対して様々な周波数(周期)の循環(波)を使って自由度ゼロの回帰分析

¹² すなわち、(角)周波数 \times 周期 $=2\pi$ という関係が成り立つ。

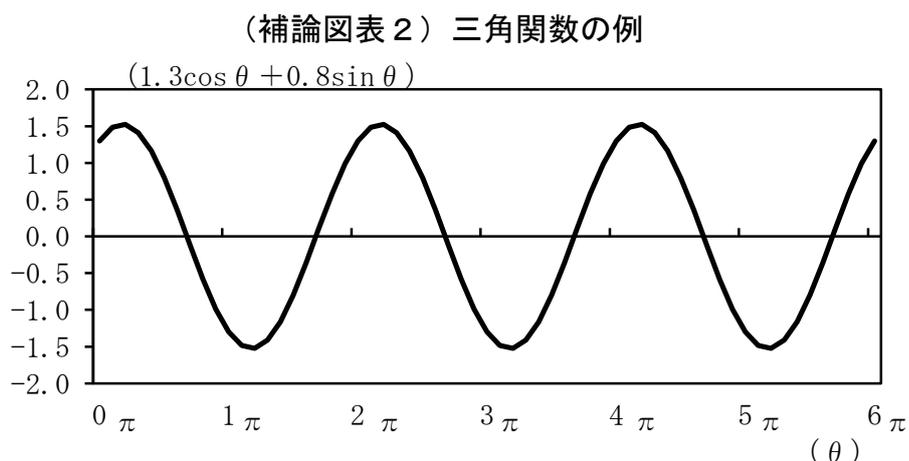
¹³ スペクトル表現定理の詳細については、例えば、Hamilton (1994) を参照。

を行っている（様々な独立した波の線形結合として表現している）ことに過ぎない¹⁴。

ここで、三角関数を再度確認すると、

$$x = a \cos \theta + b \sin \theta$$

で $a = 1.3$ 、 $b = 0.8$ のケースでは、補論図表 2 のような値を取る。



三角関数の合成公式を用いれば、

$$a \cos \theta + b \sin \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \gamma)$$

と表せる。 $\sqrt{a^2 + b^2}$ は波の振幅 (amplitude) を表し、 γ は元の \sin 関数に対して位相 (phase) がそれだけずれていることを示している。一つ一つの波は、 \sin 関数の位相が異なるだけなので、規則正しい動きになるのは自明である。

このように、一つ一つの波は、規則正しい動きを示しているにも関わらず、様々な振幅、位相の波を組み合わせることによって、本文中で示した周期 2~7 年の中期循環のように、時間によって振幅が変わる波を表現することができる¹⁵。

¹⁴ なお、それぞれの循環 x_m を波で表現する際には、フーリエ変換にしたがって、波の周波数を決め、対応する係数を求めるのが一般的である。フーリエ変換の解説は、例えば、Harvey (1993) や日野 (1977) を参照。

¹⁵ これに対して、一つ一つの波の振幅が変わり得るのではないかとの指摘もあろう。周波数分析の発展形である wavelet (稲田・鎌田、2004) や stochastic cycle (Harvey、1993) では、こうした点を取り込み、 a 、 b が時系列で変化する周波数分析モデルを考えている。これらの手法を耐久財消費の周波数分析に用いることも有用であろう。

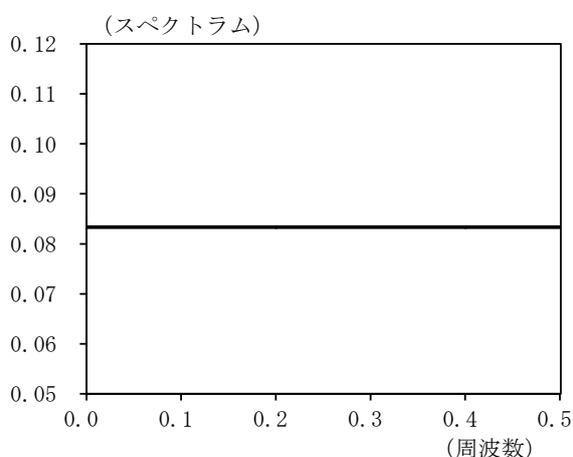
2. スペクトラム

補論1節では、 y_t を様々な波に分解できることを簡単に示したが、どの周波数の波がどの程度重要なのかも分析を行う上では重要である。それを簡潔に表現したものがスペクトラム (spectrum) である¹⁶。

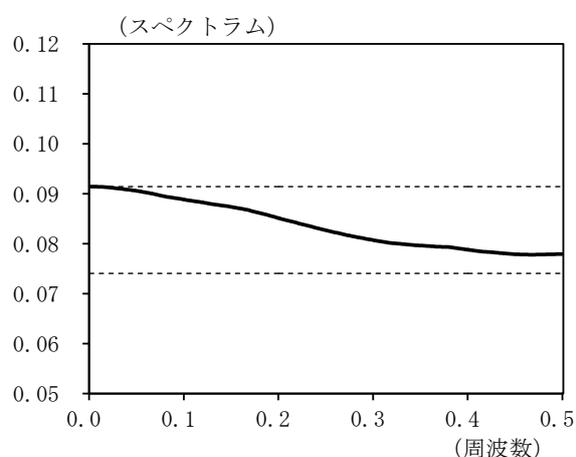
補論図表3(1)は、補論図表1で用いた[0,1]の一様分布におけるランダム変数 y_t について理論的に求まるスペクトラムである。横軸は周波数¹⁷を表し、縦軸にその周波数がどの程度重要であることを示している¹⁸。ここで線がフラットになっているのは、ランダム変数の場合、どの周波数の波も等しく重要であることを示している。右図は、実際に[0,1]の一様分布から1,000回ランダム変数を発生させ、スペクトラムを描いたものである。必ずしもフラットな線とは言い難いが、点線で示している95%信頼区間から評価すると、観察されたスペクトラムがフラットであることは棄却できず、右図の高さも概ね左図の理論的なスペクトラムと変わらない。

(補論図表3) 一様分布のランダム変数のスペクトラム

(1) 理論的なスペクトラム



(2) 1000回ランダム変数発生時のスペクトラム



(注) 右図の点線は95%信頼区間。以降同様。

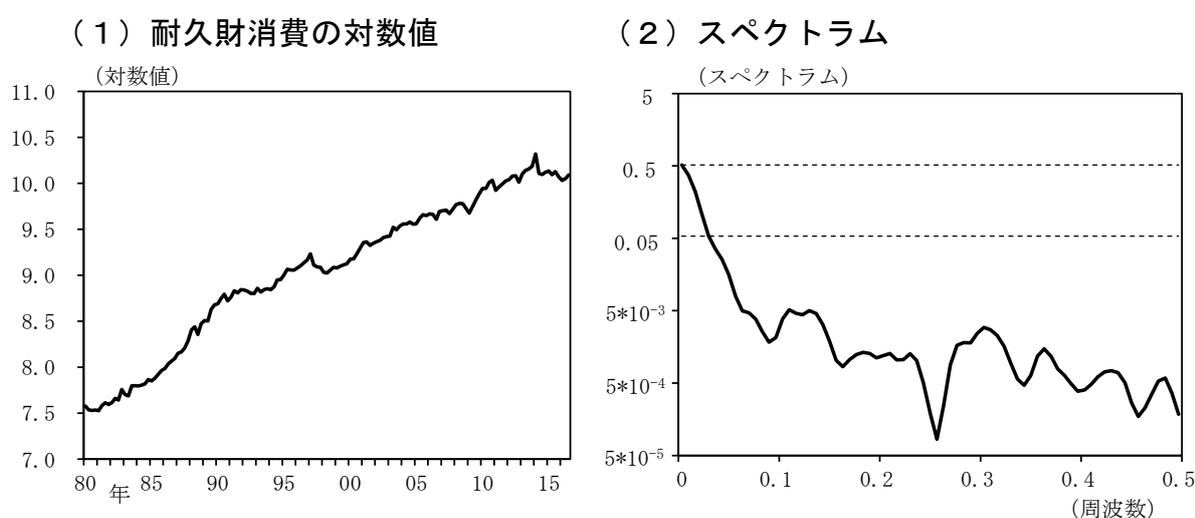
¹⁶ 本稿では、計量ソフトR(関数コマンド:spectrum)を用いてスペクトラムの推計を行った。なお、スペクトラム解析には、自己系列相関のヒストグラムをスムージングして推計する方法と自己回帰モデルを推計する方法があるが、本稿では前者を用いている。

¹⁷ ここでの周波数 θ は、単位期間あたりに波が何回振動するかを表す実数として定義され、前述の角周波数 θ_n との間には、 $\theta = \theta_n/2\pi$ という関係が成り立つ。この場合、周波数 \times 周期 $=1$ となる。

¹⁸ スペクトラムの下の面積を0から0.5の間で積分すると、元の系列の分散の1/2になる。[0,1]の一様分布の分散は $1/12 (=0.083\dots)$ なので、左図のフラットな線の縦軸上での高さも同じ値をとることになる。

次に、本稿での分析対象である耐久財消費のスペクトラムをみる。補論図表 4(1)が耐久財消費の対数値、補論図表 4 (2)がスペクトラムである。(1)をみても明らかなように、耐久財消費の系列には強いトレンドが観察される。このため、スペクトラムは、周波数が極めて低い波（周期が極めて長い波）ほど強くなっている。同時に、周波数が 0.05 未満の循環（周期：5 年以上¹⁹）や 0.1～0.15 の循環（周期：1.5～3 年程度）、0.3 程度の短期循環（周期：1 年程度）でもスペクトラムの強まりが確認され、本稿での周期設定は概ね妥当であると考えられる。

(補論図表 4) 耐久財消費のスペクトラム



3. Band-Pass フィルター

(3)式で示されるように、 y_t は様々な周波数の波の加重和で表現できるのだから、例えば、周期が2年間から7年間に相当する波だけ抽出して再合成すれば、関心のある周期の動きが把握できるのではないか。Band-Pass フィルターは、そのような考えのもとに開発されたものである。

Band-Pass フィルターは、系列を「濾過」して、トレンドやノイズなどを取り除くための手法の一つである。本文中にあるように、経済学の分野における Band-Pass フィルターとしては、Baxter and King (1999) の BK フィルター、Christiano and Fitzgerald (2003) の CF フィルターがよく用いられている²⁰。詳細な説明は行わないが、 y_t に適当なラグ多項式 $B(L)$ を乗じて、

¹⁹ 脚注 17 の関係からすると、周波数が 0.05 ということは、周期は 20 期間 (= $1/0.05$) ということになる。これは四半期データでは 5 年間 (= $20/4$) に相当する。以下も同様の計算で、周波数に対応する周期が求められる。

²⁰ BK フィルター、CF フィルターともに、EViews や R などの多くの計量ソフトでサポートされている。例えば、EViews では Frequency-filter としてビルトインされているほか、計量

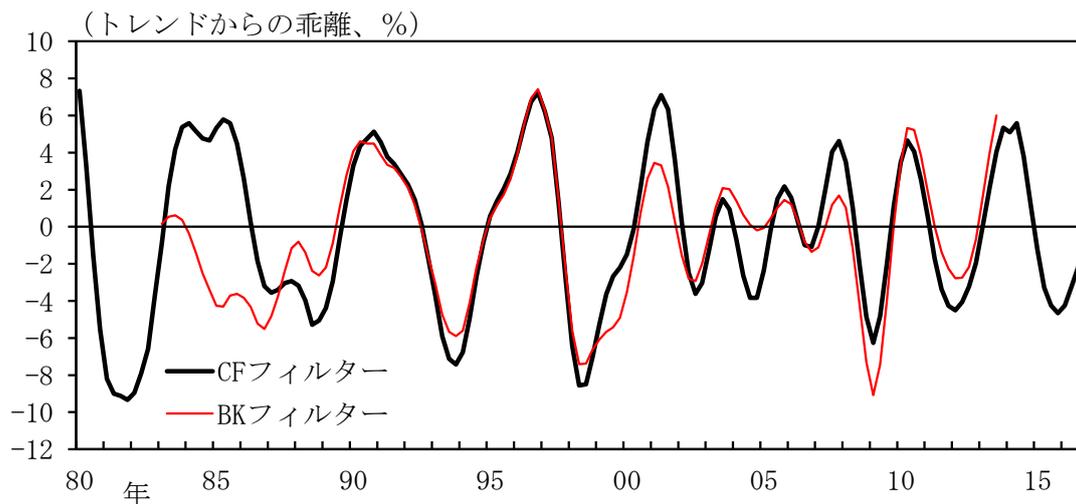
$$\hat{y}_t = B(L)y_t$$

という変換を行うと、指定した周期の循環成分だけ抽出可能なことが知られている。

両フィルターとも、理想的な $B(L)$ を何らかに近似するとの発想に基づいているが、近似の手法が異なっている。BK フィルターはリード・ラグ期間を適当に (Baxter and King (1999) では3年間程度のリード・ラグ期間を推奨) とった、ウエイト付の中心移動平均を用いている。そのため、サンプル期間の期初と期末の値が、リード・ラグの期間分だけ算出できない。一方、CF フィルターは、 t に合せて、リード・ラグ期間やウエイトを調整して移動平均を算出するため、期初と期末の値も算出可能である。

補論図表 5 では、耐久財消費について、BK フィルターと CF フィルターをかけたうえで、それぞれの2~7年間の中期循環成分を示している。両者とも概ね波の山谷は一致しており、Christiano and Fitzgerald (2003) の結果と同じく、どちらのフィルターを使ってもそれほど大きな差はない。ただし、1980年代や2000年代前半のように、振幅の大きさが異なる時期もあることや、BK フィルターでは期初と期末の3年間(設定したリード・ラグ期間)の値が算出できないことには注意が必要である。

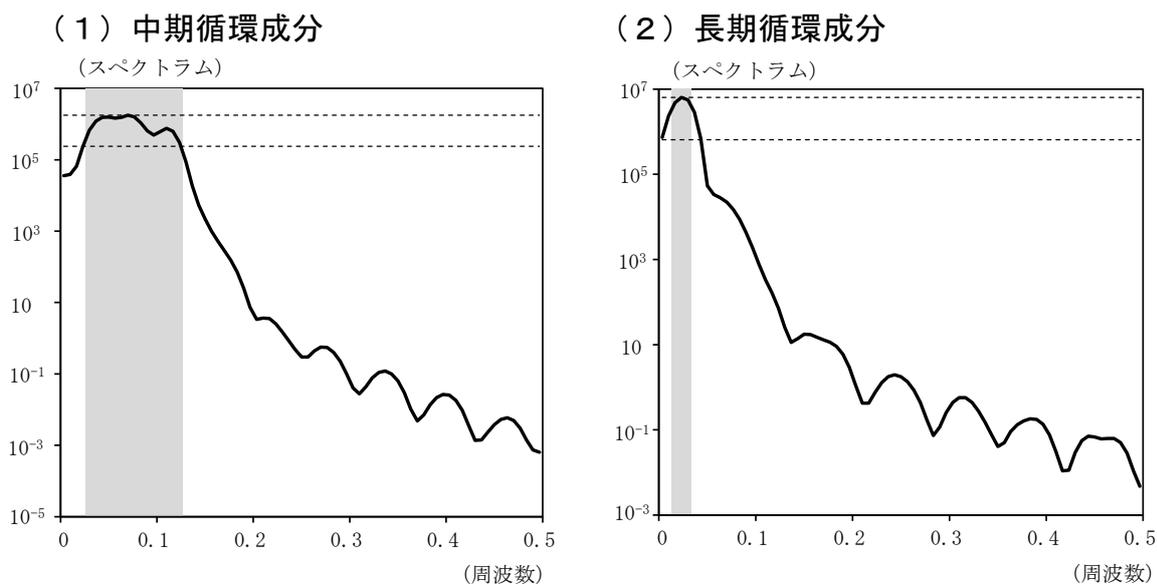
(補論図表 5) 耐久財消費の中期循環成分 (BK フィルター・CF フィルター)



ソフト R ではパッケージ“mFilter”を用いることで推計可能である。また、アトランタ連銀のホームページでは、MATLAB、GAUSS、Stata、RATS で使用できる CF フィルターのコードファイルを掲載している。本稿では、EViews を用いて BK フィルターおよび CF フィルターの推計を行った。

補論図表 6 では、CF フィルターで抽出した成分が、期待通りに必要とする周波数の波に絞り込まれているかをスペクトラムで検証した。中期循環（周期 2～7 年）、長期循環（7～12 年）ともに、指定した周波数（中期：0.037～0.14、長期：0.021～0.037）のスペクトラムが強くなっていることが確認できる。

（補論図表 6）耐久財消費の中期・長期循環成分のスペクトラム



(注) シャドー期間は中期・長期循環で抽出を試みた周波数。

以 上

(参考図表 1) 省エネ耐久財消費促進政策

1. 家電エコポイント

購入期間	2009年5月～11年3月
制度概要	<ul style="list-style-type: none"> ➤ 省エネ基準を満たした「地上デジタル放送対応テレビ」、「エアコン」、「冷蔵庫」の購入に対して、家電エコポイント（1ポイント＝1円相当）を発行するもの。ポイントは、商品券などに交換可能。 ➤ 発行ポイント数は、機種の大きさ等によって異なる。 (例：テレビ<2010年12月申請分まで>) 46型以上 36,000ポイント/台 42型、40型 23,000ポイント/台 37型 17,000ポイント/台 など ➤ 総発行ポイント数：6,395億ポイント（≒6,395億円）

2. エコカー補助金

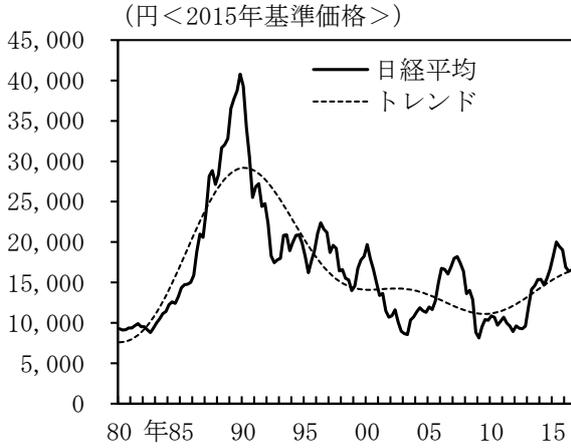
申請期間	<ul style="list-style-type: none"> ① 2009年6月～10年9月 ② 2012年4月～9月
制度概要	<ul style="list-style-type: none"> ➤ 「経年車の廃車(車齢13年以上)を伴う環境性能に優れた新車購入」ならびに「環境性能に優れた新車購入」に対して、補助金を給付。 ➤ ①普通車等(廃車有)：25万円/台、普通車等(廃車無)：10万円/台、軽自動車(廃車有)：12.5万円/台、軽自動車(廃車無)：5万円/台 ②普通車等：10万円/台、軽自動車：7万円/台 ➤ 予算(自家用分)：①約5,800億円、②約2,700億円

3. エコカー減税

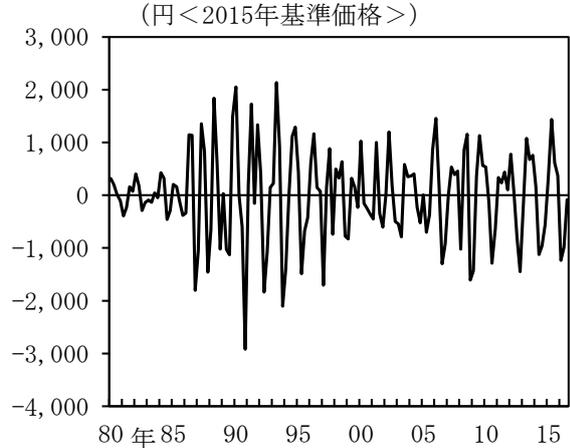
購入期間	2009年4月～
制度概要	<ul style="list-style-type: none"> ➤ 燃費性能に優れた自動車の購入に対して、自動車取得税の免除・減免(80%、60%、40%、20%)、自動車重量税の免除・減免(75%、50%、25%)を実施。 ➤ 対象とする燃費性能や減免率を見直しながら、2017年1月時点で継続中。

(参考図表 2) 実質株価の周波数分析結果

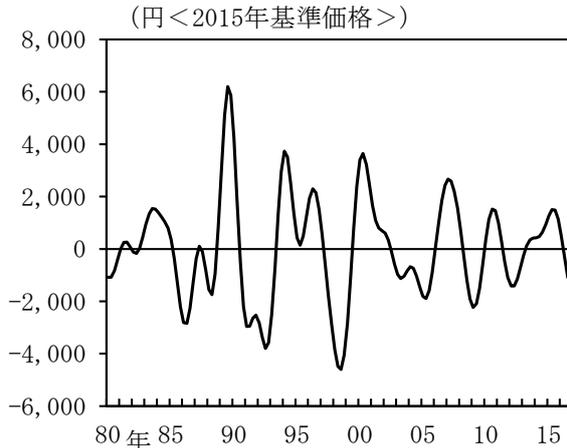
(1) 原系列とトレンド



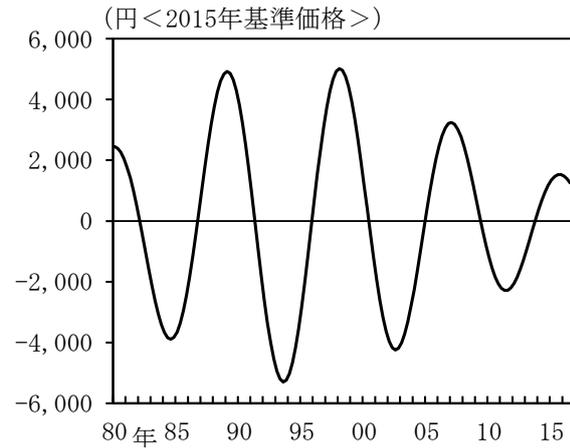
(2) 短期循環成分 (2年以下)



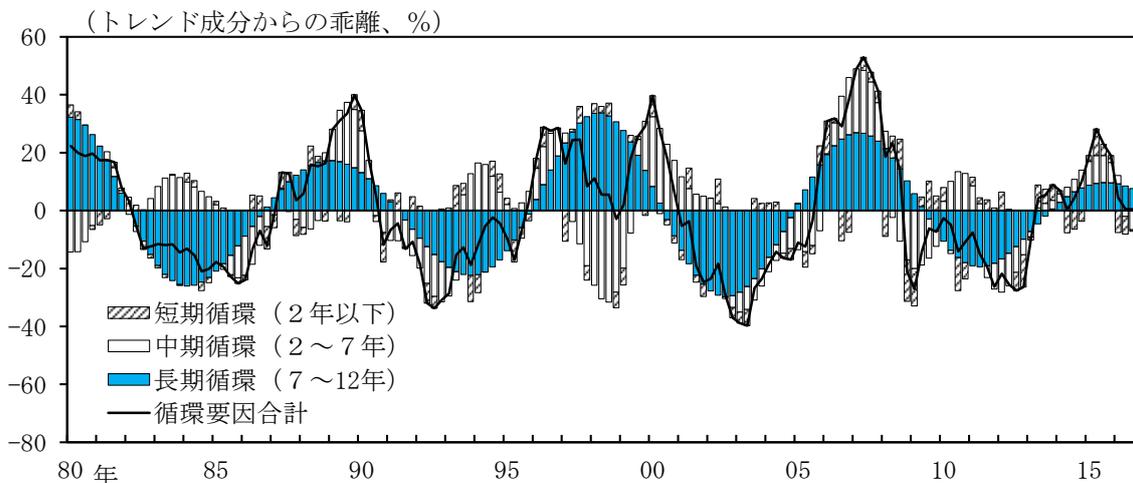
(3) 中期循環成分 (2~7年)



(4) 長期循環成分 (7~12年)



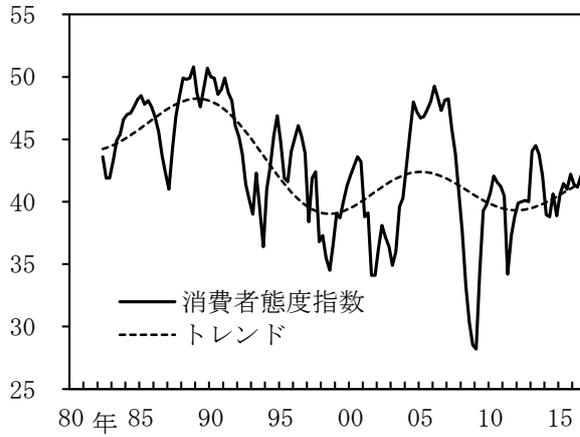
(5) 循環要因の分解



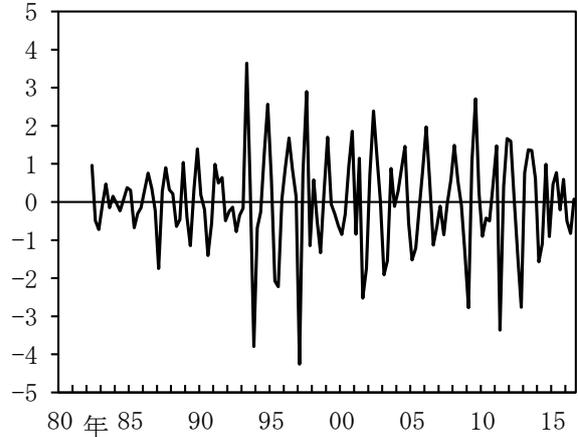
(注) 実質株価は、日経平均株価を消費者物価指数(総合)でデフレートしている。

(参考図表3) 消費者マインドの周波数分析結果

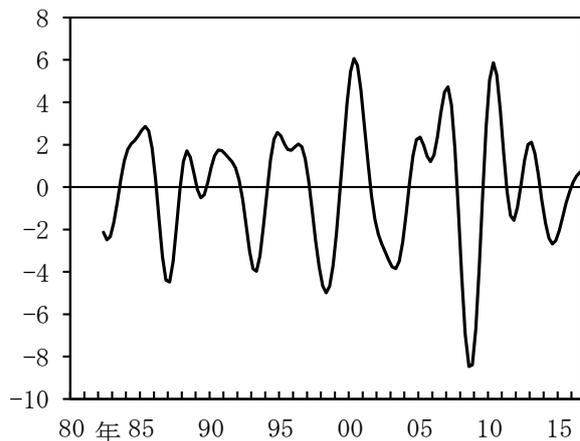
(1) 原系列とトレンド



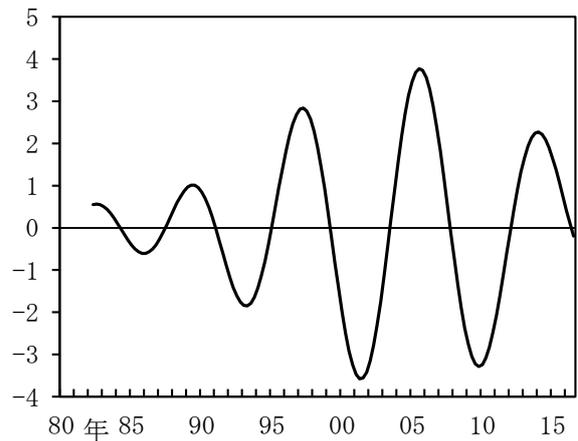
(2) 短期循環成分 (2年以下)



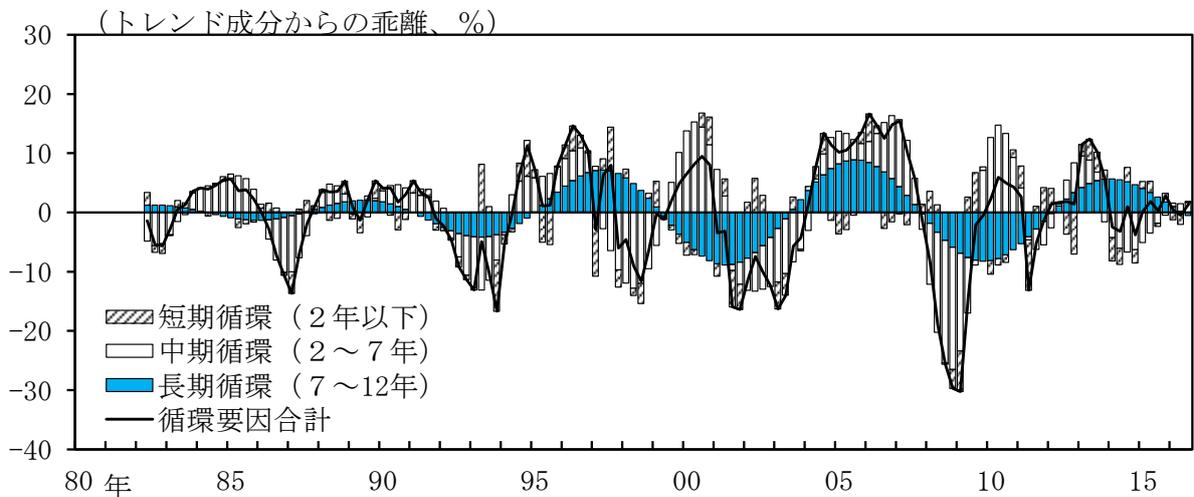
(3) 中期循環成分 (2~7年)



(4) 長期循環成分 (7~12年)



(5) 循環要因の分解

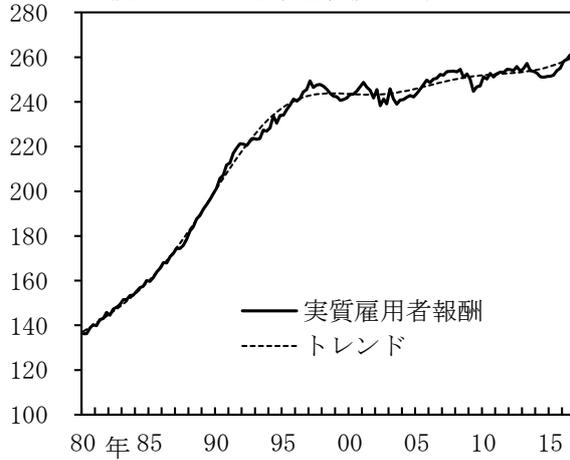


(注) 消費者マインドは、内閣府「消費者態度指数 (季節調整済)」(1982年2Q~)。

(参考図表 4) 実質雇用者報酬の周波数分析結果

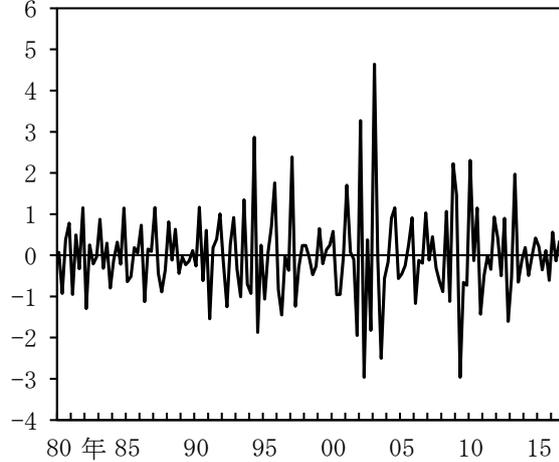
(1) 原系列とトレンド

(兆円<2011暦年連鎖価格>)



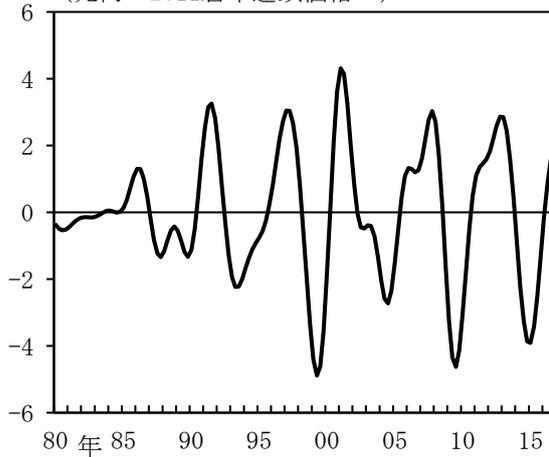
(2) 短期循環成分 (2年以下)

(兆円<2011暦年連鎖価格>)



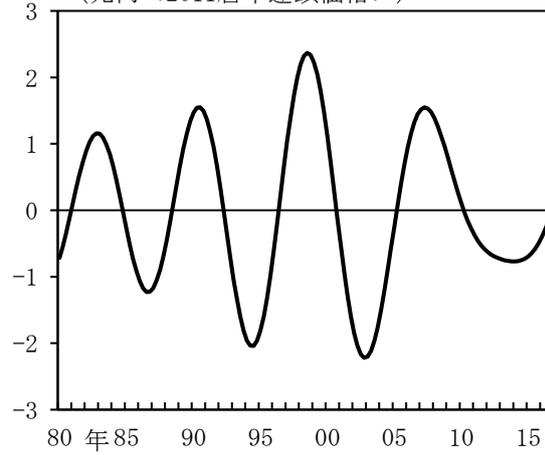
(3) 中期循環成分 (2~7年)

(兆円<2011暦年連鎖価格>)



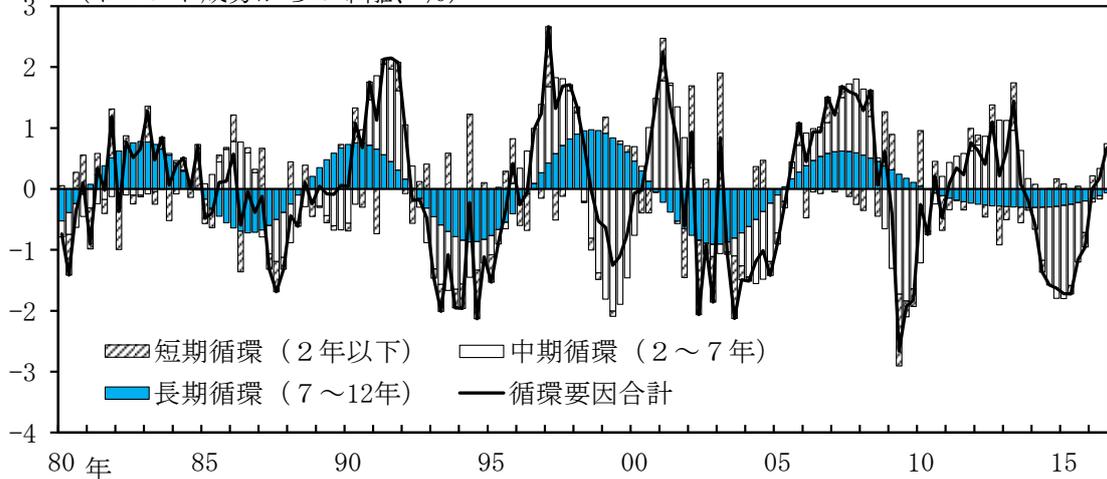
(4) 長期循環成分 (7~12年)

(兆円<2011暦年連鎖価格>)



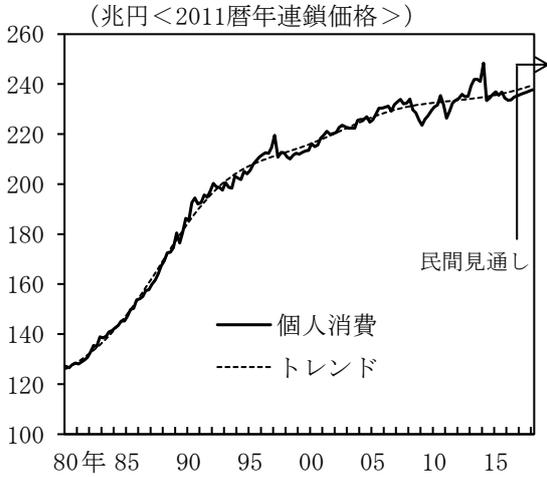
(5) 循環要因の分解

(トレンド成分からの乖離、%)

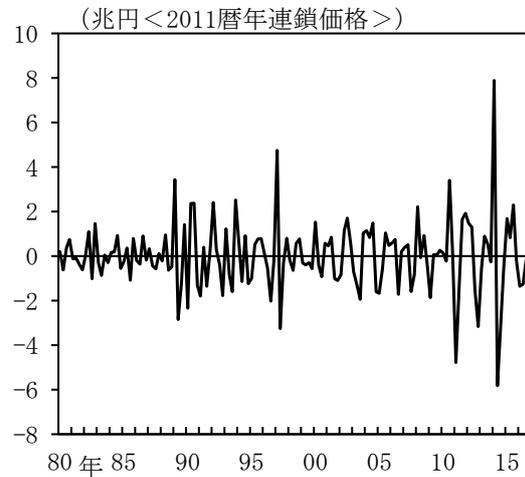


(参考図表5) 個人消費の周波数分析結果

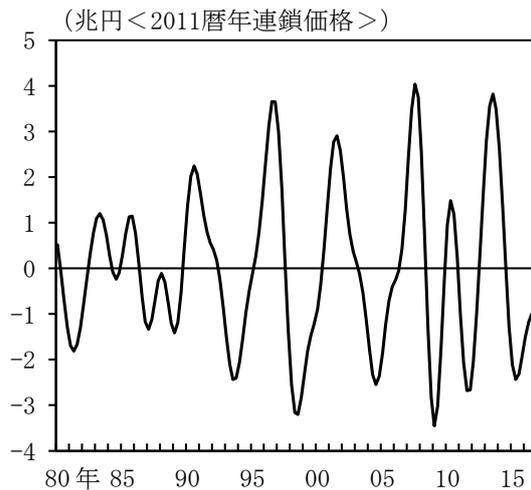
(1) 原系列とトレンド



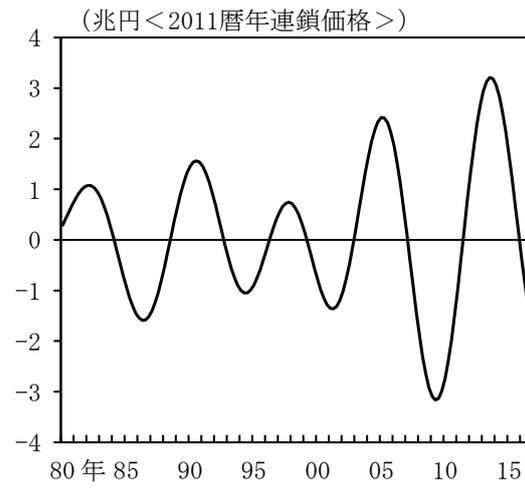
(2) 短期循環成分 (2年以下)



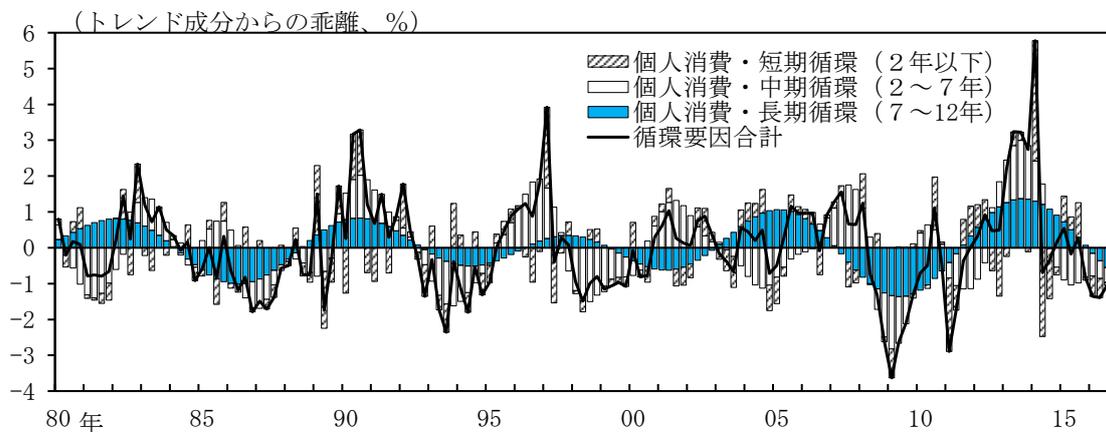
(3) 中期循環成分 (2~7年)



(4) 長期循環成分 (7~12年)



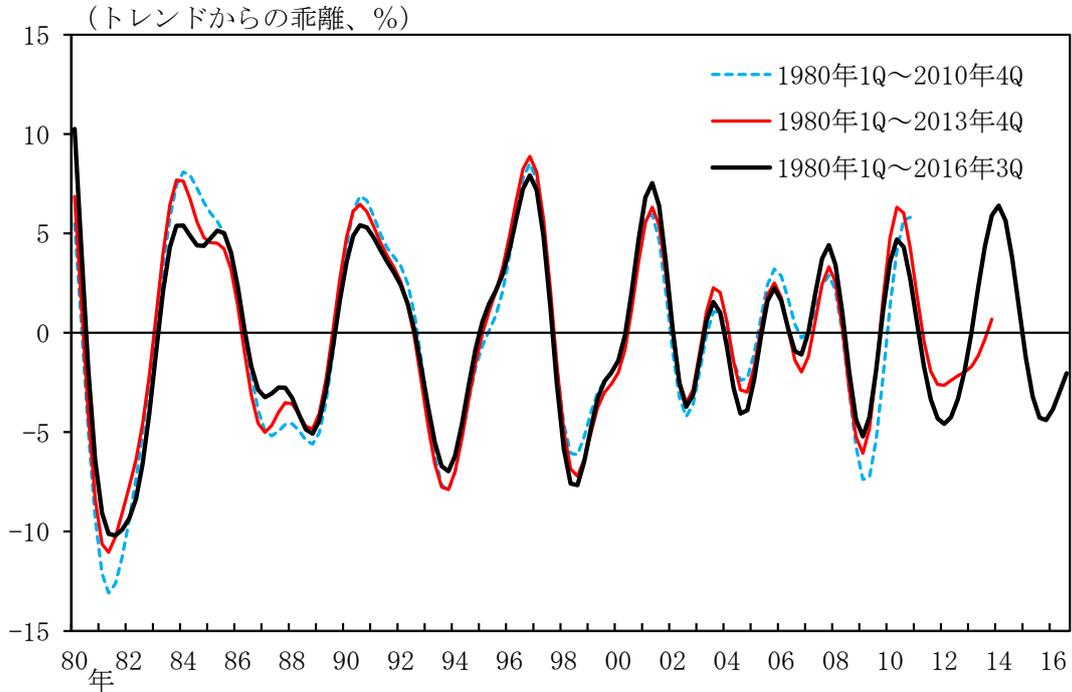
(5) 循環要因の分解



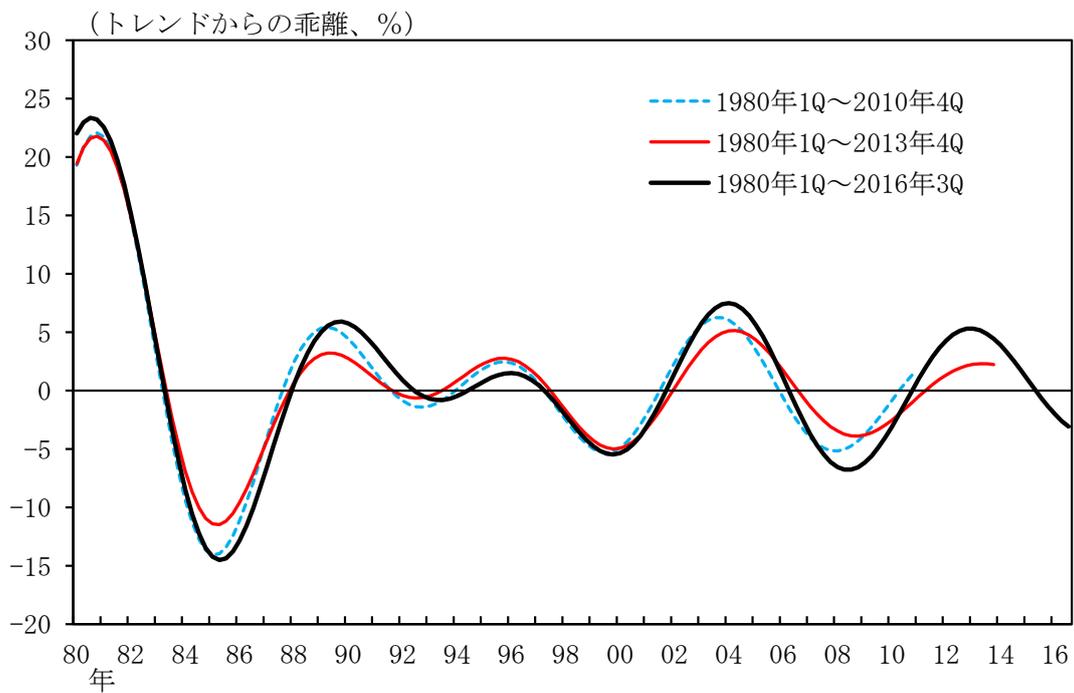
(注) 個人消費は、家計最終消費支出 (除く持ち家の帰属家賃)。実質ベース。2016/1Q~3Qは実質消費活動指数 (旅行収支調整済) の前期比を、2016/4Q~2018/1Qは民間エコノミストによる平均的な前期比予想値 (2016年12月時点) を用いた推計値。

(参考図表6) 耐久財消費・周波数分析のリアルタイム推計結果

(1) 中期循環成分 (2~7年)



(2) 長期循環成分 (7~12年)



【参考文献】

- Baxter, M. and King, R. G. (1999), "Measuring Business Cycles: Approximate Band-Pass Filters for Economic Time Series," *The Review of Economics and Statistics*, Vol.81, No.4.
- Burns, A. F. and Mitchell, W. C. (1946), "*Measuring Business Cycles*," NBER Books
- Christiano, L. J. and Fitzgerald, T. J. (2003), "The Band Pass Filter," *International Economic Review* Vol.44, No. 2.
- Hamilton, J. D. (1994), "*Time Series Analysis*," Princeton University Press.
- Harvey, A. C. (1993), "*Time Series Models*," Harvester Wheatsheaf.
- Hodrick, R. J. and Prescott, E. C. (1997), "Postwar U.S. Business Cycles: An Empirical Investigation," *Journal of Money, Credit and Banking*, Vol. 29, No. 1.
- Howrey, E. P. (1968), "A Spectrum Analysis of the Long-Swing Hypothesis," *International Economic Review*, Vol. 9, No. 2.
- Juglar, J. C. (1862), "*Des crises commerciales et de leur retour périodique en France, en Angleterre et aux Etats-Unis*," Guillaumin et Cie, librairies (岩田佳久訳「クレマン・ジュグラー『商業恐慌について』: 部分翻訳資料と解題」、東京経大会誌(経済学)、289号)
- Kitchin, J. (1923), "Cycles and Trends in Economic Factors," *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 5, No. 1.
- Kondratieff, N. D. (1926) "Die langen Wellen der Konjunktur," *Archiv für Sozialwissenschaft und Sozialpolitik*, Bd. 56 (英訳 : Kondratieff, N. D. and Stolper, W. F. (1935), "The Long Waves in Economic Life," *The Review of Economics and Statistics* Vol. 17, No. 6.)
- Mills, C. T. (2003), "*Modelling Trends and Cycles in Economic Time Series*," Palgrave Macmillan.
- Pollock, D. S. G. (2009), "Consumption and Income: A Spectral Analysis," *Statistical Inference, Econometric Analysis and Matrix Algebra*.
- Schumpeter, J. A. (1939), "*Business Cycles: A Theoretical, Historical and Statistical Analysis of the Capitalist Process*," McGraw Hill.
- 稲田将一・鎌田康一郎 (2004)、「ウェーブレットによる経済分析」、『金融研究』23 巻 1 号、日本銀行金融研究所

浦沢聡士・清谷春樹 (2008)、「景気循環成分の推計精度：シミュレーション手法による GDP ギャップの信頼区間の導出」、ESRI Discussion Paper Series No.194、内閣府経済社会総合研究所

日本銀行 (2016)、『経済・物価情勢の展望』（展望レポート）2016年7月 BOX3

日野幹雄 (1977)、『スペクトル解析』、朝倉書店

山澤成康 (2009)、「バンドパスフィルターによる月次 GDP ギャップの計測－後方移動平均型の試算と予測との結合」、JCER Discussion Paper No.119、日本経済研究センター