日本銀行ワーキングペーパーシリーズ

デフォルト確率モデル再訪
－市場情報の包括的利用と推定方法の検討－

金谷信 [1]
kanaya@grad.e.u-tokyo.ac.jp
平田英明 [2]
hideaki.hirata@boj.or.jp
西崎健司 [3]
kenji.nishizaki@boj.or.jp

No.03-J-2
2003 年 10 月

日本銀行
〒103-8660　**日本橋郵便局私書箱 30 号**

[1] 東京大学大学院経済学研究科(現・ウィスコンシン大学マディソン校経済学部)、[2] 金融市場局、[3] 金融市場局 (現・調査統計局)

デフォルト確率モデル再訪
ー市場情報の包括的利用と推定方法の検討ー*

金谷　信†　　平田　英明‡　　西崎　健司§

2003 年 10 月

Abstract

本稿では、デフォルト確率の推定について、従来よりも理論モデルに忠実で、かつ個別企業に関して市場で観察される情報を包括的に活用できる方法を提示し、実際のデータを用いてその有効性を示す。構造型モデルを用いたデフォルト確率の従来の研究における推定は、不自然な仮定に基づくものであった。企業のクレジット・リスク把握のための主要な市場情報として、株式/社債情報を考えることが出来る。従来の分析ではそのどちらか片方しか活用できていないことが多かった。本稿では、企業の資本および負債を企業価値の派生商品（オプション）とみなす、いわゆる first passage タイプのシンプルな構造型モデルに基づき、株式／社債情報の両者を有効に活用して推計を行う方法を提示する。この方法を用いてケース・スタディを試みると、従来の手法による結果に比べて、求められたデフォルト確率は各局面に応じて弾力的かつリーズナブルに推移するという極めて興味深い推定結果を得た。

1　はじめに

社債のデフォルトや企業倒産が珍しくなくなっている中、我が国においても他の先進国同様にクレジット・リスクに対する関心が集まってきている (例えば Packer (1999))。企業の

*本稿の作成に当たっては、家田明氏 (日本銀行金融研究所)、河合祐子氏 (日本銀行金融市場局)、木島正明氏 (京都大学)、清水季子氏 (日本銀行金融市場局)、室井芳史氏 (東京大学大学院)、吉田敏弘氏 (日本銀行金融市場局)、吉野太喜氏 (東京大学大学院)、日本銀行金融市場局でのセミナー参加者の各氏 (順不同) から貴重なコメントを頂いた。本稿で示されている意見はすべて筆者らに属し、日本銀行、あるいは金融市場局、調査統計局の公式見解を示すものではない。

†東京大学大学院経済学研究科 (ウィスコンシン大学マディソン校経済学部留学中)
e-mail: kanaya@grad.e.u-tokyo.ac.jp

‡日本銀行金融市場局　*e*-mail: hideaki.hirata@boj.or.jp (corresponding author)

§日本銀行調査統計局　*e*-mail: kenji.nishizaki@boj.or.jp

クレジット・リスク状況を把握するにあたっては、経済学やファイナンス理論に基づくモデルを用いての分析が一つの有効な手段である。これまでにも既に、学者や実務家から、理論的・実証的側面を踏まえた様々なモデルが提示され、研究成果の蓄積がなされつつある。本稿では、企業の資本および負債を企業価値の派生商品 (オプション) とみなすアプローチに基づき、市場で観察可能なデータを用いて企業の信用状態を表す「デフォルト確率」の推定を行う。このようなアプローチによるデフォルト確率の推定例としては、米国 KMV 社による EDF$^{\mathrm{TM}}$(Expected Default Frequency) が有名である。[1] EDF$^{\mathrm{TM}}$ の成功、クレジット・リスク分析に対する関心の高まりなどにより、我が国ではそのようなアプローチによるデフォルト確率の推定は近年一定の注目を集めている。[2] そうした中、実務的な、あるいは実務に近い現場では、前提条件や利用データについての簡便化を行ってデフォルト確率の推定を行っているケースが多いようである。そのような簡便化には理論モデルが想定している構造とはいささか乖離があるように見受けられ、推定結果のパフォーマンスへの影響について留意する必要があるかも知れない。また、利用可能な複数のデータや代替的なモデルについて、どのような組み合わせでの利用を図るかについて、一部の実務家の間ではやや単純と思われる認識がなされているようにも見受けられる。[3]

我々の問題意識は、そうした既存研究の問題点や認識への疑問符に根ざしている。推定上の簡便化は、しばしばモデル内部で論理的な矛盾を含むような仮定をおくことを意味する。利用データ/モデルについて異なる組み合わせでの推定を行った場合、例えば、構造型モデルに基づいて市場情報として株式情報のみを用いた場合と、誘導型モデルに基づいて社債情報のみを用いた場合とでは、推定結果には無視し得ない隔たりがあることが多い。その理由としては、市場の不完全性 (および各モデルのデフォルトに関する定義の相違等) もさることながら、本源的には実証分析のためのパラメータ推定にあたっての簡便化が推定結果に大きな歪みを与えているのではないか、というのが我々の考えるところである。

そこで、我々は構造型モデルの推定にあたって用いられてきたややきつめの仮定を緩め、株式と社債双方の情報を総合的に用いて両者からインプライされる「デフォルト確率」を推定するという、新しい方法を提示する。一般に経済状態について何かしらの「予想」を行う場合、予想時点で集められる情報をすべて活用するのが「合理的」であると考えられる。標準的な経済学では、経済主体はそのような経済合理性を持って行動しているということが仮定されている。理論モデルそのものがどんなに精緻であったとしても、デフォル

[1]EDF 推定のためのモデルの解説は、その詳細は完全には明らかにされていないものの、Crosbie and Bohn (2002)、Vasicek (1984) 等にその概要が説明されている。

[2]EDF$^{\mathrm{TM}}$ の有効性を述べた文献としては、例えば、濱條、平田、中村 (2002) を参照。

[3]例えば、東京三菱銀行 (2003) では、債券や株式の発行企業についての分析・推定を行う際には、株式情報のみを用いるのであれば構造型モデルを、社債情報を用いるのであれば誘導型モデルを採用してデフォルト確率を推定するのが望ましく、これらのモデルは局面に応じて使い分けられるべきである、と述べられている。

トの分析に際して株式、あるいは社債の情報のどちらか一方しか用いないとすると、それは利用可能な情報の一部を「(その有効性を吟味することなく) 先験的」に排除してしまっていることになり、経済学的に見て必ずしも「合理的」な分析を行っていることにはならない。デフォルトというイベントは必ずしも事前に予想できないものであるので、デフォルト・モデルに期待される重要な目的の一つは、事前に、もしくは少なくともリアル・タイムにデフォルトに関わる状況を把握し、予測することにある。「今回のデフォルトのシグナルは主に社債情報に含まれていた」、あるいは「この局面では、株式情報を参照すべきだった」等といった事後的な説明が出来るだけでは、その本分は十分には達せられない。どの局面でどの情報を使うべきかということについての答えを事前に知ることは極めて難しい。株式のみ、社債のみ、といった単一の市場データだけを各々用いて分析してきた従来の多くの研究は、このような問題への直接的な答えを与えてくれない。事前に (または同時的に) 分析者の適切な裁量で、局面に応じて適切であると思われる情報を選択し、分析を (リアル・タイムに) 行うことにも意義があるかもしれない。しかしながら、今後市場性証券の種類が増大して行くことが予想される中で、そのような分析には限界も出てこよう。複数の情報から一つの「デフォルト確率」という指標をある意味で機械的に構成できるという点が、本稿で提示される推定方法の特徴であり、従来の研究で用いられてきた方法と区別される点である。

もっとも、このような方法のパフォーマンスが、従来の簡便化された推定法と大差ないのであれば、実務的視点からは簡便性を優先させることが賢明であるかもしれない。しかしながら、その簡便化はモデルのパフォーマンスに対して無視し得ないマイナスの影響をもたらしているかもしれない、というのが我々のケース・スタディが示唆するところである。例えば、伊藤、原田 (2001) において示されているように、株価は当該企業危機のニュースに敏感に反応し、当該企業の市場評価の変化を捉える重要な指標の一つであると考えられる。その株価を含めた株式情報のみを用いて構造型モデルからデフォルト確率を推定すると、推定値は株価の変化 (株価の変動) と強い逆相関 (あるいは、相関) を持つことが示される (楠岡、中川、青沼 (2001)、森平 (2000))。このことに鑑みると、株式情報を用いてわざわざデフォルト確率を推定する意義そのものすらが実務的に見ると実は曖昧であるという可能性が想起される。他方、株価、社債両者の情報を使う我々の方法によって推定されたデフォルト確率の系列は、株式情報だけ、あるいは債券情報だけに注目していた場合には、見過ごしていたであろうと思われる状況を上手く取り込んでいる。その意味で、そこには両者の情報がバランスよく反映されているといえる。この結果は、我々の手法が簡便性を優先させてきた従来のデフォルト確率推定手法から改善されたものであること、を示唆していると考えられる。

本稿では、上に述べたような問題/疑問点の解消が企図されている一方で、ある種の問題点については解決がなされていない。7 節で詳述するが、本稿で得られる「デフォルト

確率」に対し、それが市場で通常想定される投資家によって抱かれる信念としての確率であるという解釈を与えることは出来ない。通常想定される投資家とは、リスク回避的な選好を持つ投資家のことである。本稿でいうところの「デフォルト確率」は、同値マルチンゲール・メジャーに基づく、いわゆるリスク中立確率である。[4] リスク中立的な選好を持つ(線形の効用関数を持つ) 投資家を想定した場合には、そのような確率はその投資家の信念を記述する確率としての意味を持つ。しかしながら、そうした想定は現実とは若干距離のあるものであると考えられ、本稿でいうところの「デフォルト確率」は、通常の投資家が抱く信念をそのままには反映していない。そういった意味で、本稿でいうところのデフォルト確率は「デフォルト確率指標」などど呼んだ方がよいかも知れない。先行研究である安藤、丸茂 (2001)、家田 (1999)、家田、吉羽 (1999)、及び黒子、神山 (2000) 等で計算されているデフォルト確率も、本研究と同様、リスク中立確率である。7 節では、このような問題点がどこに起因しているのかを明らかにし、その解決のための考察を行う。

さて、本稿の構成は以下の通りである。まず第 2 章で、クレジットリスク・モデルの類型を概観し、今回の分析対象となる企業と適用するモデルの関係を整理する。次に、第 3 章では基本的なモデルに即して既存の実証研究の問題点を明らかにしていく。第 4 章では第 3 章のモデルの一般化を行う。また、比較静学分析を用いてモデルの特性を確認し、さらにデフォルト確率を推定することの意義を考察する。第 5 章で実証分析の方法論を概観した後、第 6 章で幾つかのケース・スタディを試みる。最後に、本稿の結論と今後の課題に言及する。

2　クレジットリスク・モデルの類型とその適用対象企業

実務的 に個別企業のクレジット・リスクを定量化するにあたっては、理論的精緻さもさることながら、簡便性や速報性といった側面が重視される。定量的なクレジット・リスク計測モデルには様々なタイプがあり、研究者によってその分類法が異なる。教科書的説明に拠れば、各種のクレジット・リスク計測モデルの「分類学」は主に手法や概念の違いによってなされているが、必ずしも定型化された分類学が存在するわけでもない。統計学的アプローチとオプション理論アプローチとに類型化したり、デフォルト自体を予測するかデフォルト確率を予測するかで類型化する、といったような例がある (Saunders and Allen (2002) など)。ここではあえて従来の分類学に拘らず、より実務的観点を重視した座標軸で概念整理を行う (図表 1 参照)。すなわち、既存の研究や手法をデータ制約の観点から整理し、本稿で提示するデフォルト確率推定モデルの特性を明らかにしていく。[5]

[4]ただし、3.2 節で説明されるデフォルト確率については、リスク中立確率ではなく、現実を記述する確率測度に基づいて計算される確率である。

[5]なお、クレジット・リスク・モデルを総合的に説明した資料としては、木島、小守林 (1999)、Basel Committee on Banking Supervision (1999)、Caouette, Altman and Narayanan (1998)、Cossin and Pirotte (2000)、

まず、市場で取引されている金融商品を発行している企業については、市場で日々観察/更新されるデータを用いた分析が可能であるという点、つまりデータの速報性を重視して、マーケット・オリエンテッドなデフォルト確率の推定がなされることが多い。代表例としては構造型モデルと誘導型モデルがあげられる。Merton (1976) に始まるとされるアプローチは、一般に構造型モデルと称される。この種のモデルでは、確率的に変動すると仮定される企業価値が目減りして負債額を下回る状況をデフォルトとして定義する。デフォルトが経済学的に解釈できるフレームワークの中で内生的に記述されているため、構造型モデルと称されるのである。構造型モデルを用いてデフォルト確率を推定する従来の分析では、日次データを取得可能な株価情報を用いることが多かった。そのため、モデルの適用対象が (十分に流動性のある) 株式を発行している大企業に限定される。先行研究例としては、安藤、丸茂 (2001)、楠岡、中川、青沼 (2001)、黒子、神山 (2000)、斎藤、森平 (2000)、森平 (2000)、及び Trussel (1997) を挙げることが出来る。一方、誘導型モデルの場合は企業価値、もしくは企業の財務状況を明示的に考慮せず (＝クレジット・イベントを経済学的に定義しない)、デフォルトまたはハザードの発生が外生的に与えられると考える (例えば、家田 (1999)、Duffie and Singleton (2003))。このようなモデルは、債券のプライシングを志向して提案されることが多いこともあり、推定にあたっては日次データとして債券の情報が用いられることが多い。

他方、市場で取引されている金融商品を発行していない企業 (中堅・中小企業の場合が多い) については、株式/債券情報など、日々観察可能なデータを取得可能でないという制約がある。このような制約の下では、自ずと財務諸表等から得られる公表頻度の低いデータを用いてデフォルト確率を推定するというアプローチが取られることになる。例えば、北原 (2003) で触れられているように、最近では我が国においても中堅・中小企業向けの貸付債権を証券化するケースが急増してきている。そうした貸付債権に関するクレジット・リスクを計測する際、多くの場合は計量経済学的手法を用いて財務情報を精査するという方法が用いられる。[6] しかしながら、財務諸表のみに頼るデフォルト確率またはクレジット・リスクの推定は、タイムリーさに欠けるという問題点に加え、一部で指摘されるような財務諸表データの品質の問題 (中小企業の会計に関する研究会 (2002)) もあり注意を要する。なお、このようにデータ制約が存在する企業に関しては、本稿の分析の視点からは外れるため、詳細な説明は割愛する。

本稿では、上記のような様々なアプローチの中でも特に構造型モデルに注目して、デフォルト確率の推定を行っていくこととする。

Duffie and Singleton (2003)、Giesecke (2002)、Jackson and Perraudin (2000) 、Madan and Unal (1998) 等が挙げられる。

[6]例えば、ムーディーズ社はリスクカルク、S & P 社は中小企業クレジット・モデルといったモデルを利用している。最新の研究としては Dietsch and Petey (2002) 等が挙げられる。

3　基本モデル

3.1 節では、クレジット・リスク分析研究における最も基本的なモデルとして、Black and Scholes (1973)、Merton (1976) 等の議論にもとづいたモデル (基本モデル) を解説する。3.2 節ではそのモデルに即して、先行研究に見られるデフォルト確率推定に用いるパラメータの求め方とその問題点について考察する。

3.1　基本モデルの構造

分析の対象となる企業は時点 0 期から満期 T 期まで活動するとし、満期時点 T 期においては、その企業はそれまでの活動を全て清算するとする。すると、実現した企業価値の清算について、(清算に際して、税金等のコストがないとすると) 株式保有者と債権者の間で図表 2 に表されるような配分が行われると考えられる。図表 2 は企業価値の配分において、債権者が株主に対して優先権を持っていることを示している。満期時点において、仮に企業価値の値が負債額を上回っている場合、債権者はその貸付分を全額回収し、株式保有者は実現した企業価値から借入返済分 (＝貸付分) を引いた残余企業価値を得る。逆に、満期時に企業価値の値が負債額を下回っている場合、債権者は実現した企業価値の全額を得るが、株式保有者には何も取り分が残らない。これは、債権者は返済されるべき借入分を一部しか回収できず、株主は出資額を全く回収できない状況である。このような状況を本稿では当該企業の デフォルト として定義する。[7]

以上のような株式保有者と債権者の間の配分を考えると、企業の株式および負債は、企業価値を原資産、T 期を満期、(その満期日に返済されるべき) 負債額を行使価格とした場合のヨーロピアン・オプションであると見なすことが出来る。図表 2 に表されている満期時点のペイオフ曲線から自明なとおり、このような考え方は「満期時の企業価値に対するプット・オプションを、社債保有者が株主に売っている」と解釈することも可能である。

A_T ＝満期 T 期での企業価値の実現値、P ＝満期において返済されるべき負債額 (promised final payment) であるとすると、デフォルトは、

$$\{A_T < P\} \tag{1}$$

というイベントによって表される。したがって、株式保有者の取り分 S_T と債権者の満期における取り分 D_T は、

$$S_T = \max[A_T - P, 0] \tag{2}$$

[7] デフォルト (倒産、若しくは債務不履行) という言葉は, 法律的に定義された用語ではなく、格付機関やデフォルト・モデルごとに、その定義もさまざまである。本稿では、何らかのイベントによって生じる「債権者が負債を全額回収できない状況」を総称して「デフォルト」と呼ぶ。また、本稿ではデフォルトに際しての株主の取り分はゼロになると考える。

$$D_T = \min[A_T, P] \tag{3}$$

と定義される。(2)、(3) 式の形を見ると、株式は企業価値に対するコール・オプションから、負債は企業価値に対するプット・オプションのショート・ポジションと安全資産のロング・ポジションから構成されていると見なせる。そのため、任意の $s\,(\in[0,T])$ について、企業価値の評価額が株式と負債の評価額の和からなるという関係、すなわち

$$A_s = S_s + D_s \tag{4}$$

は、ヨーロピアン・オプションについて成立するコール・プット・パリティーの関係とみなすことができる。

ここで、企業価値の額を表す過程 $\{A_s\}_{s\in[0,T]}$ が、以下のような幾何ブラウン運動:

$$dA_s = \mu_A A_s ds + \sigma_A A_t dz_s \tag{5}$$

に従っていると仮定する。ただし、z_s は現実を記述する確率測度 P のもとで標準ブラウン運動とし、μ_A 及び σ_A は正の定数としておく。加えて安全資産の利子率が満期までは時間によらず一定あること、市場には摩擦がなく連続的な取引が可能であること、を仮定する。すると、いくつかの導出過程を経て、いわゆる Black-Scholes 公式 (Black and Scholes (1973)) により、企業価値評価額と当該企業株式に対する評価額、換言すれば企業価値の評価額と当該企業の負債に対する評価額との間に、$t\,(\in[0,T])$ 期において成り立つ関係式を得ることができる。すなわち、

$$S_t = A_t\Phi(d_1) - Pe^{-r(T-t)}\Phi(d_2), \tag{6}$$

$$D_t = A_t\{\Phi(-d_1)\} + Pe^{-r(T-t)}\Phi(d_2) \tag{7}$$

を得る。ただし、S_t、D_t、A_t は株式、負債、企業価値に対する t 期における評価額、$r\,(\le \mu_A)$ は定数で安全資産の利子率、Φ は標準正規分布の分布関数であり、

$$d_1 := \frac{\log(A_t/P) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma_A^2\right)(T-t)}{\sigma_A\sqrt{T-t}},$$

$$d_2 := d_1 - \sigma_A\sqrt{T-t}$$

とする。

3.2 先行研究における推定方法とその問題点

ここでは基本モデルに即して、先行研究 (安藤、丸茂 (2001)、楠岡、中川、青沼 (2001)、黒子、神山 (2000)、斎藤、森平 (2000)、森平 (2000)、及び Trussel (1997) 等) で見られる「デフォルト確率」の推定方法を説明し、その問題点を解説していくこととする。[8]

[8]「デフォルト確率」を推定する方法の問題点は、安藤、丸茂 (2001) においても指摘されており、それを克服するための代替的な方法も検討されている。以下では、安藤、丸茂 (2001) では取り上げていない推定方法の問題点についても解説する。

3.1 節では、企業のデフォルトを (1) 式によって表されるイベントとして定義した。企業価値額が従う確率過程を (5) 式のように特定化していたので、現実を記述する確率測度 P に関しての、t 期における企業のデフォルト確率は

$$\begin{aligned} P\left[A_T < P\right] &= P\left[A_t \exp\left\{\left(\mu_A - \frac{\sigma_A^2}{2}\right)(T-t) + \sigma_A\sqrt{T-t}z\right\} < P\right] \\ &= P\left[z < -\frac{\log\left(A_t/P\right) + \left(\mu_A - \sigma_A^2/2\right)(T-t)}{\sigma_A\sqrt{T-t}}\right] \\ &= \Phi\left(-\frac{\log\left(A_t/P\right) + \left(\mu_A - \sigma_A^2/2\right)(T-t)}{\sigma_A\sqrt{T-t}}\right) \end{aligned}$$

となる。ただし、z は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数、Φ は標準正規分布の分布関数である。つまり、デフォルト確率は、t 期における企業価値額 A_t、満期 T で返済すべき負債額 P 、企業価値のボラテリティー σ_A、企業価値の期待成長率 μ_A、満期までの残存期間 $(T-t)$ といった 5 つのパラメータの関数となっている。その推定のためには、この 5 つのパラメータをパラメタライズ (=パラメータを推定) すればよい。ところが、企業価値というものは市場で直接的には観察され得ないものであり、何らかの代理的なデータを用いたり、間接的に推計する必要が生じる。そのため企業価値に関するパラメータである、A_t、σ_A、μ_A については、便宜的な仮定をおいて実証研究を行うのが通例となっている。

以下では、先行研究で見られる 2 種類の推定方法について述べ、それらの問題点を明らかにしていく。特に A_t 及び σ_A に関する推定方法について詳しく述べることにする。第一の方法では、負債評価額が常に定数であるという比較的強い仮定をおく。既に述べたように、全ての $s\,(\in[0,T])$ について (4) 式

$$A_s = S_s + D_s$$

が成立する。従って、S_t と D_t とを観察することが出来れば、A_t は容易に求められる。S_t は株式時価総額として観察可能である。一方、負債評価額 D_t については、観察が難しく適当な代理変数も存在しない。そこで、全ての時刻 $s\,(\in[t,T])$ において、負債評価額が一定値 P であるとして、

$$A_s = S_s + P \tag{8}$$

と仮定する (安藤、丸茂 (2001)、楠岡、中川、青沼 (2001)、及び Trussel (1997))。さて、全ての時刻について負債評価額が一定値 P で表されているとすると、当然時刻 T においても $D_T = P$ となる。これが、成立するためには、式 (3) より、常に $A_T \geq P$ が成立しているはずである。他方で、デフォルトの発生は $\{A_T < P\}$ というイベントによって表されていたのだから、$A_T \geq P$ を常に満たすということは結局、推定されるべきデフォルト確率は常にゼロとなってしまう。あるいは、デフォルトというイベントは $\{A_T - P < 0\}$ を満足するため、(8) 式を前提とすると、

$$A_T - P = S_T < 0$$

のようになってしまい、負の株式時価総額が得られてしまう。だが、式 (2) によりこのモデルでは常に $S_T \geq 0$ が仮定されているのであるから、矛盾が生じてしまうこととなる。

以上の考察より、全ての時刻について負債評価額が一定であるとする想定は、理論的にみて不整合性を持つものである。このような想定は、本質的には、負債評価額が式 (7) によって表されるという点を考慮していないことを意味している。企業価値のボラティリティ σ_A、期待成長率 μ_A も、「デフォルト確率」の推定にとって必要なパラメータであり、これらについても既存の研究では (8) 式の関係を使ってその推定を行っている (楠岡、中川、青沼 (2001)、Trussel (1997))。P が定数であるとの仮定と (8) 式の関係より、企業価値の変動 (ΔA_s で表すことにする) と株式時価総額の変動 (ΔS_s) は一致する。すなわち、

$$\Delta A_s = \Delta S_s \tag{9}$$

のような関係式が成立する。この (9) 式を仮定すれば、企業価値のボラティリティ及び期待成長率は、各々株式時価総額のボラティリティ及び期待成長率と一致する。これらは、データから容易に (例えば、ヒストリカルに) 推定することが可能である。しかしながら、そもそも前提とした (8) 式の関係が矛盾を含むものであるので、その妥当性については十分注意する必要があると思われる。なお、ここで解説した方法に基づく推定結果は、6 節に以下で我々が提示する新しい推定方法による結果とともに示される。

次に、もう一つの推定方法について説明する。(6) 式の左辺を $f(t, A_t)$ とおいて、これに伊藤の補題を適用する。そして (5) 式を用いると、株式の価格過程は、

$$\begin{aligned} dS_t &= \left(f_t + \frac{1}{2} f_{AA}\right) dt + f_A dA_t \\ &= \left(f_t + f_A A_t \mu_A + \frac{1}{2} f_{AA}\right) dt + f_A A_t \sigma_A dz_t \end{aligned} \tag{10}$$

のように表される。ただし、添字付きの f は,添え字の変数に関する偏導関数を表しており、

$$f_t = -A_t \frac{\sigma_A}{2\sqrt{T-t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{d_1^2}{2}\right\} - rP \exp\left\{-r(T-t)\right\} \Phi(d_2), \tag{11}$$

$$f_A = \Phi(d_1), \tag{12}$$

$$f_{AA} = \frac{\partial}{\partial A_t} \Phi(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{d_1^2}{2}\right\} \tag{13}$$

を意味している。ここで (10) 式で表現された $\{S_t\}$ が従う過程を

$$dS_t = \mu_S(t, S_t) S_t dt + \sigma_S(t, S_t) S_t dZ_t \tag{14}$$

と表すことにする。ただし、$\mu_S(t, S_t)$ と $\sigma_S(t, S_t)$ は、各々株式時価総額の期待成長率とボラティリティを表わしている。すると、(10)、(12) 及び (14) 式より、企業価値のボラテリティー σ_A について、

$$\sigma_A = \frac{S_t}{A_t \Phi(d_1)} \sigma_S(t, S_t) \tag{15}$$

という関係式が成立する。これは、企業価値のボラティリティが、株式時価総額のボラティリティの関数となっていることを意味している。ここで特に注意しなければならないのは、企業価値のボラティリティσ_Aは定数であるのに対し、(10) 式からも明らかなように、$\sigma_S(t, S_t)$は時間の経過に応じて変化するという点である。そのため、この式を用いてσ_Aを定める場合、t期における株式 (時価総額) のボラティリティ$\sigma_S(t, S_t)$の推定方法が問題となる。多くの先行研究では、$\sigma_S(t, S_t)$の推定値を

$$\sigma_S(t, S_t) = \text{定数} \tag{16}$$

と仮定し、過去の株価系列の収益率の標準偏差によってこの値を与えることで、(15) 式の関係を用いてσ_Aの推定値を得ている (安藤、丸茂 (2001)、黒子、神山 (2000)、斎藤、森平 (2000)、三好 (1998)、森平 (1997)、森平 (2000))。[9] 一般に時間について変動すると仮定されたボラティリティの推定は容易ではなく、このような方法は簡便な近似法と解釈される。だが、これは本来のモデル構造とは大きな隔たりのある推定法である。例えば、(15) 式によると、株価に対する企業価値の変化の値$A_t f_{A_t}/S_t \left(= A_t \Phi(d_1)/S_t\right)$が時間について減少 (増大) している時には、株価のボラティリティも時間について減少 (増大) することになる。こうした場合に株価のボラティリティを一定とおいてしまうと、企業価値のボラティリティについて、その値を過大推定 (過小推定) をしてしまうことになる。

このように、多くの先行研究で用いられてきた、デフォルト確率計算のためのパラメータの推定方法には理論との整合性の面で課題があることが伺われる。そこで、以下ではこれらの問題に取組む方法について考えていく。

4　一般化されたモデル

これまでは、既存の実証研究の問題点を明確にするため単純なモデルを取り上げてきたが、本節では first passage モデルと呼ばれる、より一般化されたモデルを提示する。モデルの定式化、その議論の多くは、Black and Cox (1976) 及び Briys and de Varenne (1997) に負っている。一般化されたモデルは、現実の状況を描写する点において、前節で提示した基本モデルに比べてよりもっともらしいものである。

4.1　デフォルトの定式化

拡張されたモデルでは、基本モデルと同じく、(1) 企業の活動期間が有限$[0, T]$、(2) 安全資産利子率が定数r、(3) 市場には摩擦がなく連続的な取引が可能、である状況を仮定する。一方、企業のデフォルトは、基本モデルのように満期T期においてのみ発生するだけでは

[9] 実際の推定にあたっては、(16) の仮定を課し、(σ_Sをヒストリカル・ボラティリティで与えて) 式 (6)、(15) をA_t、σ_Aの連立方程式として解くという方法が用いられている。

なく、T 期以前の任意の時点においても起こり得ると考えることにする。ここでは、満期日以前に企業価値が最初にある水準にヒットした場合 (first passage) をも「デフォルト」と考えることにする。具体的には、ある過程 $\{A_s\}_{s\in[0,T]}$ が各時点 $s\,(\in[0,T])$ について、

$$\{A_s \le m_s\} \tag{17}$$

となる最初のイベントをデフォルトとして定義する。[10] ここで、m_s は企業価値がその水準を下回るとデフォルトとなる閾値 (デフォルト境界) を意味する。

デフォルト境界の過程 $\{m_s\}$ をいかに定式化するかについては、いくつかの議論が存在する。債券の価格付けモデルを構成している Longstaff and Schwartz (1995) では、$\{m_s\}$ を時間等に依存しない定数の過程として定式化し、安藤、丸茂 (2001) でも同様な定式化を採用している。一方、Black and Cox (1976) 及び Briys and de Varenne (1997) では、P を満期時点での返済負債額、ρ を $[0,1]$ に値をとる定数として、

$$m_s := \begin{cases} \rho P \exp\{-r(T-s)\} & \text{if } s < T \\ P & \text{if } s = T \end{cases} \tag{18}$$

と設定している。通常は資金の借入れに対する利払いが必要であることから、デフォルト境界 m_s が常に一定であると考えるよりは、この (18) 式の定式化のように m_s が時刻 s について増加すると考える方がもっともらしい。そこで、本稿ではこの (18) 式を採用する。[11][12]

[10]デフォルトが発生した場合には、その時点で直ちに清算が行われ、その時点における企業価値の実現額が債権者に支払われるものとする。これは業績が望ましくない時には債権者保護のために、当該企業は早期にデフォルトさせられ、その財産の保全が図られるという状況をモデル化したものである。なお、デフォルトが発生した場合、株主の取り分は 0 になるものとする。

[11]我々は、$\{m_s\}$ が安全資産利子率 r で成長すると定式化している。この定式化は以下のような便利な点を持つ。デフォルトの発生後、債権者が、デフォルト時の清算で得た額を直ち安全資産に投資し、それを満期まで保有するような状況を考えてみよう。$\{m_s\}$ が r の率で成長する場合には、ρ の値は債権者が満期に手にする金額と一対一に対応する。それに対し、$\{m_s\}$ の成長率が r とは異なる値の時には、同一の ρ の値でも、デフォルト時点が違えば債権者が満期に手にする金額が異なってくる。また特に $\{m_s\}$ が r よりも小さな率で成長する場合には、(ρ の値が十分に小さくないと) ある $\rho\,(<1)$ に対して、(満期以前に) デフォルトが発生しているにも関わらず、債権者はデフォルトが発生しなかった場合よりも、より多くの金額を満期日に得ることが可能になるような状況が発生してしまう。デフォルトが発生しない場合が債権者の取り分が最も大きくなると考えるのが自然であるので、$\{m_s\}$ の成長率は r 以上であると考えるのが適切であると思われる。以上のような理由により、デフォルト境界の成長率を r として (18) 式のように定式化を行っている。

[12]なお、本稿では一定としている安全資産利子率について、Briys and de Varenne (1997)、Longstaff and Schwartz (1995) では、それが確率過程に従うものとしている。一般に安全資産利子率の過程が確率的な方がもっともらしい側面があるものの、その代償として利子率を記述するためのパラメータが増えてしまい、その推定方法が新たな問題となる。また、金利の過程として Vasicek 過程を用いる場合があるが (Briys and de Varenne (1997)、Longstaff and Schwartz (1995))、この過程の下では金利が負の値をとる可能性があるという問題点がある。Vasicek 過程を採用している家田、吉羽 (1999) では、若干恣意的なパラメータ設定を行っ

さて、(18) 式の $P\exp\{-r(T-s)\}$ は満期日において返済すべき負債額の (安全資産の利回りで割引いた) 割引現在価値を表しており、(満期日以前の) デフォルト境界はその一定割合によって定められる。ρ は債務回収率または債務弁済率に相当し、当該企業がデフォルトした際に債権者が負債額のどれだけの割合を回収できるかを示す。$\rho \in (0,1)$ であれば、債権者は満期時点において負債を $\rho \times 100\%$ 分回収出来る場合、$\rho = 1$ であれば、完全に回収出来る場合を表す。[13][14]

4.2 価格公式

前節の議論を踏まえて、時刻 $s\,(\leq T)$ に関して、デフォルトを

$$\begin{cases} A_s \leq \rho P \exp\{-r(T-s)\} & \text{if } s < T \\ A_s \leq P & \text{if } s = T \end{cases} \tag{19}$$

と定義する。また企業価値がデフォルト境界を下回る最初の時刻 (デフォルト時刻)τ を

$$\tau := \inf\{s \in [t,\infty) : A_s \leq \rho P \exp\{-r(T-s)\}\} \tag{20}$$

とし、s 期までのデフォルトを示す定義関数 Λ_s を以下のように定義する。

$$\Lambda_s := \mathbf{1}_{\{s \geq \tau\}} = \begin{cases} 0 & \text{if } s < \tau \\ 1 & \text{if } s \geq \tau. \end{cases} \tag{21}$$

3.1 節では、企業価値が過程 $\{A_s\}_{s\in[0,T]}$ に従うとした。しかしながら、本節では満期 T 以前のデフォルトも考えており、デフォルト発生後直ちに当該企業の清算が行われ、それ以降の企業価値額は 0 になるということを考えると、このような定式化は不適切である。そこで、企業価値を表す価格過程を $\{V_s\}_{s\in[0,T]}$ で表すことにする。同値マルチンゲール・メ

ているように見受けられる。そこで、金利が常に非負の値をとる CIR 過程等を採用することが考えられるのだが、その場合は解析的な形で資本/負債評価式を得ることが難しくなるという新たな難題が発生する。本稿では、以上のような過去の研究成果を踏まえて安全資産利子率を一定と仮定しておく。

[13] $\rho = 1$ であれば、企業がデフォルトしたとしても、債権者は実質的には損害を負わない。なぜなら、仮にデフォルトが発生したとしても、清算により満期日において得られるはずであった金額の (安全資産の利回りで割引いた) 現在価値が戻ってくるからである。それに対し、$\rho = 0$ のケースは 3.1 節で提示した基本モデルのケースに相当する。我々は、企業価値の従う過程を正の値をとる過程として定式化するので、$\rho = 0$ の場合には満期前のデフォルトは発生しない。

[14] 我々は、(18) 式のように、回収率 ρ を負債 (債券) の額面ベースで定義している。これは、RT ルール ($r$ecovery of $t$reasurey rule) と呼ばれ、既にあげた Black and Cox (1976)、Briys and de Varenne (1997) の他に、Jarrow and Turnbull (1995) などが採用している定式化である。一方、回収率を、額面ベースではなく (デフォルト時点の) 負債の時価に対する割合として定義する方法も考えられる。これは RMV ルール ($r$ecovery of $m$arket $v$alue rule) と呼ばれており、これを採用している代表的な文献としては、Duffie and Singleton (1999) をあげることが出来る。

ジャー Q を所与とし、その Q のもとで $\{A_s\}_{s\in[0,T]}$ が以下のような確率過程に従うと仮定する。[15]

$$dA_s = \mu_A A_s ds + \sigma_A A_s dz_s \tag{22}$$

ただし、μ_A、σ_A は定数とし、$\{z_s\}$ は Q の下で標準ブラウン運動であるとする。すると、$\{V_s\}_{s\in[0,T]}$ は、$\{A_s\}_{s\in[0,T]}$ と $\{m_s\}_{s\in[0,T]}$ を用いて、各 s について、

$$V_s := \begin{cases} A_s & \text{if} \quad s < \tau \\ m_s & \text{if} \quad \tau = s \\ 0 & \text{if} \quad s > \tau \end{cases} \tag{23}$$

のように表される。また、同値マルチンゲール・メジャー Q の下では、企業価値の期待成長率 μ_A は、安全資産利子率 r と一致する。[16]

以上の議論を整理しながら、前節と同様に株式と負債についてのペイオフを確認しておこう。企業資本 (株式) のペイオフは、満期日においてのみ発生するから、

$$\begin{cases} [V_T - P]^+ & \text{if } (\forall s \in [t,T]) \quad A_s > m_s \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{24}$$

によって与えられる。すなわち、(企業の) デフォルトが発生せず、満期日において企業価値額が返済負債額を上回っている時にのみ、実現企業価値から返済負債額を引いた、残余企業価値に相当する (正の) ペイオフが発生する。デフォルトが発生した場合や満期日の企業価値が返済負債額を下回る場合には、ペイオフは発生せずゼロである。一方、満期以前に企業のデフォルトが生じなかった場合の負債の満期におけるペイオフは、

$$\min[V_T, P] \quad \text{if} \ \ (\forall s \in [t,T]) \quad A_s > m_s \tag{25}$$

によって与えられる。逆に、満期以前にデフォルトが発生した場合、つまり $A_s \leq m_s$ となるような $s\,(\in [t,T))$ が存在する場合、そのデフォルト時点 τ 期 $(\tau := \min\{s \in [t,T) : A_s \leq m_s\})$ において直ちに m_τ だけのペイオフが発生するものとする。よって、ペイオフの構造からデフォルト時点 τ では、常に $V_\tau = S_\tau + D_\tau$ という関係が成立する。また、満期までにデフォルトが発生しなかった場合、すなわち $T > \tau$ の場合にも、$V_T = S_T + D_T$ という関係式が成立する。以上より、デフォルト以前の $t\,(< \tau)$ 期においては、

$$V_t\,(= A_t) = S_t + D_t \tag{26}$$

[15]無裁定条件の成立を仮定すると、安全資産利子率を基準にして、全ての市場性資産の相対価格をマルチンゲールにするような同値マルチンゲール測度 Q が少なくとも 1 つ存在する (Harrison and Pliska (1981)、Harrison and Pliska (1983))。企業価値が従う過程 $\{V_s\}$ を構成する (22) 式の仮定より市場は完備であり、そのような場合には、同値マルチンゲール測度は一意に定まる。直感的な説明については Duffie (2001) を参照されたい。

[16]Q のもとで、$\mu_A = r$ となることの説明は、補論 A を参照。

という関係式が成立していなければならない。株式及び負債は、ヨーロピアン・タイプのバリア・オプションと見なすことが出来る。ヨーロピアン・タイプのコール/プット・オプション価格とその原資産価格との間には、コール・プット・パリティーという関係式が成立することが知られており、(26) 式はそのコール・プット・パリティーを変型させたもの、として解釈することが可能である。

以上のペイオフ構造、及び Q の下で $\mu_A = r$ になることを用いれば、株式及び負債の評価式は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} S_t &= A_t\Phi(g) - \rho P \exp\{-r(T-t)\}\Phi(h) \\ &\quad - P\exp\{-r(T-t)\}\Phi\left(g - \sigma_A\sqrt{T-t}\right) + \frac{A_t}{\rho}\Phi\left(h - \sigma_A\sqrt{T-t}\right) \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} D_t &= A_t\Phi(-g) + \rho P \exp\{-r(T-t)\}\Phi(h) \\ &\quad + P\exp\{-r(T-t)\}\Phi\left(g - \sigma_A\sqrt{T-t}\right) - \frac{A_t}{\rho}\Phi\left(h - \sigma_A\sqrt{T-t}\right) \end{aligned} \tag{28}$$

ただし、

$$g := \frac{\log(A_t/P) + (r + \frac{1}{2}\sigma_A^2)(T-t)}{\sigma_A\sqrt{T-t}} \tag{29}$$

$$h := \frac{\log(A_t/P) + 2\log(\rho P/A_t) - (r - \frac{1}{2}\sigma_A^2)(T-t)}{\sigma_A\sqrt{T-t}} \tag{30}$$

であるとする。[17]　ここで、当該企業の負債 D_t についてその満期までのイールド (単位時間当たりの対数収益率) を $YTM_{(T-t)}$ とすれば、(28) 式より、

$$\begin{aligned} YTM_{(T-t)} &:= \frac{1}{T-t}\log\frac{P}{D_t} \\ &= \frac{-1}{T-t}\log\frac{A_t}{P}\Phi(-g) + \rho\exp\{-r(T-t)\}\Phi(h) \\ &\quad + \exp\{-r(T-t)\}\Phi\left(g - \sigma_A\sqrt{T-t}\right) - \frac{A_t}{\rho P}\Phi\left(h - \sigma_A\sqrt{T-t}\right) \end{aligned} \tag{31}$$

のように表される。

4.3　比較静学分析

デフォルト確率の推定に入る前に、ここでは我々のモデルを直感的に理解するために比較静学分析を行う。また、この比較静学分析の結果は、我々がわざわざ「デフォルト確率」というものを計算することのメリット、またその値を株式/社債データの両方を用いて推定す

[17] 導出過程の詳細は、Bielecki and Rutkowski (2002) の第 3 章に詳しい。なお、このモデルは Black and Cox (1976) のモデルにおいて、株式配当がないケースに相当する。また、$\rho = 0$ であれば、 3.1 節のモデルと一致するという意味で、より一般化されたモデルと言える。

ることのメリットを教えてくれる。なお、後述の通り、(28) 式は負債の評価式ではあるが、社債の評価式であると読替え、以下では負債と社債を特に区別せずに議論を行う。そこでまず、確率過程 $\{A_t\}$ のボラティリティ σ_A の値の大きさによって表現される、将来に対する (市場の) 不確実性の程度の変化の影響について考えてみよう。[18]

まず、不確実性については、「不確実性の程度が高まると、株式価格は上昇し、社債価格は下落 (イールドは上昇) する。逆も同様である」ことがわかる。なぜなら、株式価格 S_t を σ_A に関して偏微分すると、

$$\frac{\partial S_t}{\partial \sigma_A} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\left(g-\sigma_A\sqrt{T-t}\right)^2}{2}\right\}\sqrt{T-t}\left\{\exp\left\{-r\left(T-t\right)\right\}P+\frac{A_t}{\rho}\right\} > 0 \quad (32)$$

であり、$D_t = V_t - S_t$ という関係式から、$\partial D_t/\partial\sigma_A = -\partial S_t/\partial\sigma_A < 0$ となるからである。[19] さらに、イールドについては、

$$\frac{\partial YTM_{(T-t)}}{\partial \sigma_A} = \frac{\partial}{\partial \sigma_A}\left\{\frac{1}{T-t}\log\frac{P}{D_t}\right\} = \frac{-1}{T-t}\frac{\partial D_t}{\partial \sigma_A}D_t > 0 \quad (33)$$

となるからである。なお、この関係は、基本モデルに対しても同様に成立する。不確実性の程度の高まりは、企業価値の変動期待が高まることを意味する。企業価値がある一定値以下になった場合には、株式の価値は図表 2 に示されているように、常に一定値 0 になる。一方で、企業価値が上昇すればするほどその価格は上昇することから、株式の価値は企業価値の下降期待よりも上昇期待をより大きく反映して決定されるといえる。一方、社債は、企業価値のある一定以上の上昇に対して、その価値は常に一定値になる。企業価値の上昇期待は社債価値の上昇に対して、「限定的」な効果しか持たないのである。これが、不確実性程度の変化に対する反応が、株式と社債価格とで異なることの理由である。[20]

次に安全資産利子率 (r) が変化した時の影響を考えると、「安全資産利子率が高まると、株式価格は上昇し、社債価格は下落 (イールドは上昇) する。逆も同様である」と言える。

[18] 本稿のフレーム・ワークでは、不確実性の源泉はブラウン運動にある。その不確実性の程度を記述するのが、以下で考察するボラティリティである。

[19] つまり、株式時価総額、社債総額の上昇・下落の幅は等しい。

[20] 我々のフレームワークにおいては、不確実性の程度の上昇は必ず株式価格の上昇をもたらす。これは不確実性の程度をボラティリティーとして定式化したことの論理的帰結である。Knight (1921) は不確実性には、確率で捉えることが出来る種類のものと、確率では捉えることの出来ない種類のものがあると述べ、前者を *risk* と呼んだ。その区分によると、本稿で採用している不確実性は *risk* によって定式化されていることになる。近年、Knight が述べた *risk* とは異なる不確実性の概念を体現する定式化の研究が進んでいる。*risk* とは異なる不確実性は、*Knightian uncertainty* あるいは *ambiguity* と呼ばれ、これらは、確率測度を一般化した capacity と呼ばれる測度、あるいは (単一の確率分布ではない) 確率分布の集合を用いて表現される。これらの定式化のもとでは、不確実性の高まりが株価の上昇をもたらすという図式は必ずしも成り立たない (Dow and Werlang (1992)、Epstein and Wang (1994)、Kanaya and Takahashi(2003)、Nishimura and Ozaki (2002)、Rigotti and Shannon (2002) 等を参照)。本稿も含めてこれまでの分析は、クレジット・リスクに関するものであった。今後は、リスクによって定式化されない不確実性を用いた分析の有用性が期待される。

これも、不確実性の上昇のケースと同様に、安全資産利子率に関する偏微分より明らかである。

$$\frac{\partial S_t}{\partial r} = P\left(T-t\right)\exp\left\{-r\left(T-t\right)\right\}\left\{\rho\Phi\left(h\right)+\Phi\left(g-\sigma_A\sqrt{T-t}\right)\right\} > 0 \tag{34}$$

$$\frac{\partial D_t}{\partial r} < 0 \quad (\because D_t = A_t - S_t) \tag{35}$$

安全資産利子率の上昇によって額面負債額の (割引) 現在価値は低下するので、企業の負債負担は小さくなると考えられ、デフォルトに至る可能性は低下する。これを映じて、株式価格の上昇が起こる。一方、社債の額面の (割引) 現在価値の低下は、債権者にとっては望ましくない状況であるから社債の価格が低下し、イールドは上昇する。

これらの比較静学の結果は、単に株価や社債価格を観察するのではなく、わざわざ「デフォルト確率」というものをそれらから計算することの意義、及び我々が以下行うように、株式と社債両方のデータを用いてデフォルト確率を推定することの意義を示唆してくれるものである。

例えば、企業価値が減少しているにも関わらず、背後で不確実性の程度が上昇しているために株価が一定に保たれているような場合を想起してみよう。企業価値の減少は企業のクレジット状態を悪化させるものであり、これは危険な状況である。しかしながらそうした場合、株価の動きだけに注視していると、その危険な状況に気付くことができない。3.2 節や以下の 5.1 節で示されるように、デフォルト確率の計算には不確実性の程度を測るボラティリティの値を必要とする。企業価値額の減少、及びボラティリティの増加は、各々デフォルト確率の値を減少させる。デフォルト確率という値を計算しそれを観察することで、単に株価のみに注目していた場合には、見過ごしてしまうような状況に目を向けることが出来るのである。

また、不確実性の程度や安全資産利子率の変化に対して、株式価格と社債価格で異なる動きを見せていることにも注目する必要がある。これは、企業価値額の変化に対して、株式/社債価格ともに同じ動きを見せるのとは対照的である。株価の上昇は、不確実性の程度の上昇、企業価値額の上昇のいずれによっても引き起こされる。前者は、(恐らく) 望ましくない状況、後者は望ましい状況であると考えられる。それにも関わらず、単に株価の動きに注目していた場合、それがいずれの効果によるものであるのかを識別することが出来ない。あるいは、デフォルト確率を計算しそれに注目していた場合でも、それが 3.2 節で解説したような株式情報のみによって計算されたものであった場合には、株価の変化がいずれの効果によるものであるのかを見分けることはやはり容易ではない。[21] 我々の方法に

[21]企業価値の不確実性の程度は株式のヒストリカル・ボラティリティに強く規定されるため不確実性の程度の変化を迅速に取り込めず、株価の変化の多くは企業価値額の変化として現れてしまうからである。

よると、株式/債券の両方のデータを使うことで、そうした識別が容易になる。ここに、両データを用いることの意義があるのである。

では最後に、上で提示されたモデルによって描くことの出来るイールド・カーブの形状(金利の期間構造) について検討しよう。(31) 式から明らかなように、それは、負債の額面総額の企業価値に占める割合 (P/A_t) によって特徴付けられる。すなわち、図表 3 に示されるように、P/A_t の値が小さい (＝負債額が相対的に小さい) 時には順イールド、大きい時には逆イールド、その中間ときには一旦上昇したあと低下するといういわゆる humped-shape と呼ばれる形状を示す。このように、パラメータ次第で、イールド・カーブが様々な形状を取り得ることがわかる。イールド・カーブの形状は、イールドが将来どのように推移していくかについての投資家の予測を表していると考えられる (Hirata and Ueda (1998)) ため、本モデルは様々な投資家の予想を機動的に折込むことが出来るといえる。[22]

5　デフォルト確率の推定

以下では、我々が用いるデフォルト確率の推定方法を紹介していく。

5.1　デフォルト確率の計算式

実際の企業の負債は、銀行借入、複数の債券等から構成されていると想定するのが自然であると考えられる。しかしながら、本稿では企業の負債は仮想的にゼロ・クーポン債からなると考え、「企業の負債の全額は、ただ 1 種類の残存期間 $(T_Z - t)$ のゼロ・クーポン債により構成される」との仮定をおく。[23]

従って、現時点を t 期として満期時点 T_Z 期までに、この仮想的なゼロ・クーポン債がデフォルトする確率、換言すれば満期日以前に企業価値がデフォルト境界を下回る確率は、

$$\Pr\left[\{(\exists u \in [t, T_Z)) \quad A_u \leq \rho P_Z \exp\{-r(T_Z - u)\}\} \cup \{A_{T_Z} \leq P_Z\}\right] \tag{36}$$

によって表される。ただし、P_Z はこの仮想的なゼロ・クーポン債の額面総額とする。以下では、同値マルチンゲール・メジャー Q に関するデフォルト確率

$$Q\left[\{(\exists u \in [t, T_Z)) \quad A_u \leq \rho P \exp\{-r(T_Z - u)\}\} \cup \{A_{T_Z} \leq P\}\right] \tag{37}$$

[22]なお、本稿のように、企業価値の従う過程を (22) 式を用いて定式化した場合、満期の短いところでのイールド・カーブの形状に柔軟性が欠けるという指摘がある（Kijima and Suzuki (2001)）。Kijima and Suzuki (2001) はこのような欠点を克服するために、金利が確率的に変動する状況で、企業価値の過程がジャンプ・ディフュージョン・プロセスに従う構造型モデルを構成している。5.2 節で詳述するが、このような指摘に鑑みて、パラメータ推定に用いる債券データについて、その満期が 1 年未満のものは本稿の分析対象から除外している。

[23]実際には、社債ではなく借入による資金調達が太宗を占めるが、ここではモジリアーニ・ミラー定理が成立するような経済を想定しているため、このような仮定の下で以下の議論を進める。

を求める。計算プロセスは補論に譲り、結論を先取りすると

$$(37) = \Phi\left(\frac{-\log A_t/P - (r - \sigma_A^2/2)(T_z - t)}{\sigma_A\sqrt{T_z - t}}\right) + \frac{A_t}{\rho P}\exp\{r(T_Z - t)\}\Phi\left(\frac{\log A_t/P + 2\log(\rho P/A_t) - (r + \sigma_A^2/2)(T_z - t)}{\sigma_A\sqrt{T_z - t}}\right) \qquad (38)$$

を得る。

5.2 パラメタライゼーション、使用するデータ

(38) 式によれば、同値マルチンゲール・メジャー Q にもとづくデフォルト確率を求めるには、6 つのパラメータ (P_Z、A_t、ρ、r、$(T_Z - t)$、σ_A) が必要である。[24] 以下では、各パラメータについて説明していく。[25] まず、満期までの残存期間 $(T_Z - t)$ であるが、仮想的に全て一 (年) とする。換言すれば、当該企業の向こう一年間のデフォルト確率を推定することになる。安全資産利子率 (r) は、満期までの残存期間を一年としたことに対応して、一年物の国内銀行間出し手レート (連続複利に変換) を利用する。つまり、一年物の国内銀行間出し手レートを r_{JP12} とすると、r は $1 + r_{JP12} = \exp(r \cdot 1)$ という関係式より求められる。額面総額 (P_Z) は t 期以前の直近の簿価に、その簿価取得時点から T 期までの r によって計算した利子額を加えたものとする。簿価取得時点を 0 期、その簿価額を B_0 とすると P_Z は $P_Z = \exp(rT)B_0$ によって与えられる。

次に、回収（弁済）率（ρ）であるが、この値をいかなる水準に設定するのが適切であるのかについては、必ずしもコンセンサスは得られていない。実際、既存の研究においても幅広い値が報告されている。[26] そこで、本稿では、$\rho = 10\%$ と 90% との両方の値を用いての計算を試みる。[27]

最後に A_t、σ_A については、株式時価総額についての評価式 (27)、及び債券 (負債) についての利回り式 (31) の 2 式を用いて推定を行う。この 2 式を A_t、σ_A の 2 つを未知パラメータとする (非線形) 連立方程式とみなし、それを (収束計算によって) 解くことによって両パ

[24] 既存研究と本研究におけるデフォルト確率推定方法の簡単な比較については、図表 4 を参照。

[25] データ出所等の詳細については補論参照。

[26] 帝国データバンク (2001a)、帝国データバンク (2001b) によると、負債規模が小さいほど弁済率が高く、建設業は弁済率が高く不動産業は低い、というように負債規模や業種等によってある程度の傾向はある。しかしながら、回収率の水準を事前に設定するのは容易ではない。

[27] 例えば、帝国データバンク (2001a、2001b) は、民事再生法 (会社更生法) 認可企業に限った場合には、平均で 25 % (18 %) 程度の回収率であると報告している。また、負債額が大きくなるにつれて回収率が下がる傾向にあることも報告されている。島 (2003) では大企業の社債がデフォルトした際の回収率に限れば、経験上 10 %程度を想定するのが妥当ではないか、としている。なお、既存研究では例えば家田 (1999) が 10 %を仮定している他は、分析の簡単化のために 0 %を仮定するケースが多く見られる。

ラメータの値を得ることが出来る。[28]

以下では、(27)、(31) 式に代入する (A_t、σ_A 以外の) 他のパラメータの値について説明する。S_t については t 期での株式時価総額を与える。

また、イールド $YTM_{(T-t)}$ については、当該企業が発行している債券に関するデータから算出する (両式にあらわれる企業の清算までの期間 $(T-t)$ については、当該企業が発行している債券で最も残存期間が長い債券の残存期間を与える)。[29] このイールド $YTM_{(T-t)}$ は、前節で仮定された、企業の負債を構成するとするただ1種類のゼロ・クーポン債のイールドである。このゼロ・クーポン債は仮想的なものであるので、それに対応し得る債券が当該企業について市場で取引されているとは限らない。また、ある企業が発行している債券は、一般には一種類ではなく、異なる条項、異なる満期の複数の債券を発行していることが多い。そこで、仮想的なゼロ・クーポン債のイールドを以下のようにして推定する。ある企業が発行している債券が N 種類あるとし、ある債券 $n(n=1,\ldots,N)$ についてのデータをそれぞれ GP_n ＝経過利息を含めた債券価格、RY_n ＝半年複利換算の最終利回り、LF_n ＝満期までの残存期間、そして AOS_n = (額面での) 発行残額とするとすれば、連続複利換算での (仮想的ゼロ・クーポン債の) イールド $YTM_{(T-t)}$ は、

$$\sum_{n=1}^{N} GP_n \cdot AOS_n/100 = \sum_{n=1}^{N} \frac{(1+RY_n/2)^{2LF_n} \cdot GP_n \cdot AOS_n/100}{\exp\left\{YTM_{(T-t)} \cdot LF_n\right\}} \tag{39}$$

を満たすものとする。ただし、債券 N(＝満期までの期間が最も長い債券) に関して $T-t=LF_N$ である。A_t, σ_A を (27) 及び (31) 式に現れる $(T-t)$ についても、$T-t=LF_N$ となる。

このようにして計算された $YTM_{(T-t)}\,(=YTM_{LF_N})$ は、当該企業が発行している (普通) 債券を全て集めてきて、それを残存期間 LF_N の1つの債券と見なした場合の最終利回り、あるいは、ゼロ・クーポン・レートとみなすことが出来、前節で仮定した仮想的なゼロ・クーポン債のイールドの値として、適切なものになっている。$YTM_{(T-t)}\,(=YTM_{LF_N})$ の計算にあたって、当該企業が発行している複数の (普通) 債券を用いることは、それら全ての持つ情報を満遍なく利用しているということを意味する。ここでは実例として、日本鋼管の発行する社債のうち2種類の普通社債を選んで各々の最終利回りと (31) 式に従って計算されたゼロ・クーポン・レートを比較してみる (図表5)。2種類の債券の最終利回りの動きは、似たような傾向を持つものの若干異なる点も見られる。両者から求められたゼロ・クーポン・レートは、両債券の情報を折衷・反映し、日本鋼管に関する債券情報を包括的に描写しているように見受けられる。

[28]計算を実行した全てのケースについて、非常に高い精度 (各パラメータの収束値の1億分の1以下の精度) での収束結果を得ている。

[29]普通社債 (割引債、利付債) のみを考察の対象とし、転換社債、ワラント付社債は考察の対象にしない。また、普通社債でも残存期間が一年未満のものは分析の対象に含めない。

6　実証結果

以下では、一般化されたモデルを用いて幾つかのケーススタディを試み、モデルのパフォーマンスを考察する。[30] なお、本稿で取り上げる企業はデータが比較的容易に取得できるという基準で選んだに過ぎず、各企業の信用力に対する見解等を示すものではないことを予め断っておく。

我々の方法 (以下、KHN 法) による推定値のパフォーマンスを考察するために、ここでは日次データとして株式情報だけを用いる従来の手法 (3.2 節の第一の方法、以下、従来法) を用いた場合の推定値も併せて提示する。3.2 節で既に詳述したとおり、従来法による推定には無視し得ない問題点が内在していると考えられる。したがって、本来は KHN 法による推定結果と従来法による推定結果とを単純に比較すべきではない。しかしながら、KHN 法の実用性を直感的に確認することを目的として、両者の結果を簡単に比較検証することにする。[31][32]

6.1　ケース・スタディ1　ー 鉄鋼業界の場合 ー

まず、証券アナリスト協会によって近年「ディスクロージャーの改善が著しい企業」に選定され、比較的透明性の高いと考えられる企業である鉄鋼業界大手の日本鋼管 (NKK、現在は川崎製鉄と合併して JFE ホールディングス) についてケース・スタディを行う。企業に関する情報が債券や株式等に十分織り込まれているとすると、情報を十分に開示している企業について推定されたデフォルト確率は、その企業のクレジット・リスクを把握するにあたって意味を持ち得るものである。日本鋼管は本稿の分析対象例として適当であると考えられる。

---

[30] 一般化されたモデルではなく、3.1 節で説明した基本モデルの下で、前節で解説した我々の方法を用いて、パラメータを推定することももちろん可能ではある。しかしながら、満期前デフォルトを考慮した一般化されたモデルの方がより「もっともらしい」と考えられる。そのため、ここでは一般化されたモデルに基づく推定結果のみを示す。なお、基本モデル (一般化されたモデルで、$\rho = 0$ と設定した場合) によって推定されたデフォルト確率は、$\rho = 0.1$ と設定した際の結果と、ほぼ同じ傾向、水準を示す。

[31] 従来型の推定結果は、西岡慎一氏 (日本銀行金融市場局) より提供を受けた。記して感謝したい。なお推定にあたっては、直近決算時の負債総額、株価日次収益率の平均 (推定対象日までの 120 営業日) 及び株価ヒストリカル・ボラティリティ(同 120 営業日) を用いている。

[32] なお、データ取得上の制約 (特に債券データ) から、実際にデフォルトした企業についての推計を行うことが困難であった。実際にデフォルトした企業については高い値のデフォルト確率が、デフォルトしていない企業については低い値が推計されていれば、そのような推計には一定の有効性があると考えられる。本稿では、有効性に関するそのような検証を行うことが出来なかった。しかしながら、以下では、近年注目に値するイベントを経験した企業を中心に分析を行っている。そのようなイベントに注目しつつ、推定されたデフォルト確率の動きを観察することで、一定程度推定結果の有効性に関する検証が可能であると我々は考えており、以下の記述はそのような考えに沿うものである。

図表 6、8 は、デフォルト確率の推定値 (日次) の推移をプロットしたものであり、幾つかの興味深い特徴が見られる。まず、川崎製鉄との経営統合化計画発表 (2001 年 4 月) を受けた株価の変化に対する反応である。この発表以降に株価が急激に上昇したのを受け、KHN 法によるデフォルト確率は急激に低下した一方、従来法によるそれは一月程のラグを持って低下している。従来法では、過去 120 営業日分の株価に関する情報（平均の株価日次収益率及び同収益率のヒストリカル・ボラティィリティ）を用いている。このために、現在発生している動きを敏速に反映できていないことが原因となってこのラグが発生していると考えられる。

また、従来法による結果は、株価情報に強く規定されている。実際、その端的な証左として、従来法のデフォルト確率とヒストリカル・ボラティィリティの相関係数は推定期間中、約 0.9 と極めて高いレベルとなっている。このような結果は、冒頭で指摘したように、わざわざ「デフォルト確率」という値を計算することへの疑問を喚起させるものである。[33]

それでは、KHN 法によるデフォルト確率はどのような情報を反映した動きを見せているのだろうか。直観的な理解のために、株価・社債 (イールドおよびイールド・スプレッド) とデフォルト確率との間の相関係数を計算してみる (図表 9)。すると、KHN 法による推定値は両者の情報を満遍なく反映していることが伺える。推定されたデフォルト確率とイールド (あるいはイールド・スプレッド) との相関の高さ（0.9 程度）を考慮すると、わざわざ「デフォルト確率」を計算する必要はないかも知れない。イールドに注目するだけで、デフォルト確率を計算した場合とほぼ同様の情報を得られるかもしれないからである。しかしながら、我々の分析はそのような単純な分析に頼ることへの問題点を明らかにしてくれる。例えば、イールドだけに注目していた場合、前述の 2001 年 4 月の株価における急激な変化を捉えることは出来ない。図表 5、及び 8 に現れているように、KHN 法による推定値は株価トレンドの転換を的確に捕捉しているばかりでなく、2001 年秋口以降 2002 年春頃までの社債イールドの上昇をも映じていることが観察される。これは、KHN 法が株式/債券の両方に関するペイオフ構造を踏まえて、両データを同時に用いているために可能であったと思われる。このように、どちらかの指標のみを用いた判断に比べて、我々の方法に基づくデフォルト確率は、株価/社債の両情報に基づく総合的判断を可能にするものである。このような結果は一定の実用性を示唆するものである。[34]

[33] 相関係数は変数間の線形関係を把握するための指標であるが、ここで問題となっている (あるいは以下で問題とする) 株価に関する情報 (もしくは債券に関する情報) と推定されたデフォルト確率とは、本来、非線形の関係にある。そのため、これら相関係数の値を解釈するにあたっては注意が必要である。

[34] なお、推定の過程において得られるデータから得られる、他の興味深い点を指摘しておこう。まず、σ_A の推定値から、先行き 1 年の間に約 70% の確率 (= 1 標準偏差の区間の確率) で、企業価値額が現在の水準から 10%〜22% ほど変化するだろうと市場が見込んでいることが推察される。次に、負債/企業価値額の比率 (レバレッジ) $= D_t/A_t$ から「(市場がインプライする)時価評価ベースでの負債／企業価値額の比率」は 0.70-0.85 となっていることが見て取れる (図表 7 参照)。

6.2　ケース・スタディ2　ー 航空業界の場合 ー

同じように、次に航空業界、ここでは全日空に関する推定結果をこの時期に発生したイベントと照らしあわせて見ていこう (図表 10)。まず、2000 年初め頃から 2001 年半ば頃までの間、デフォルト確率は総じて減少傾向にある。これは、この時期に見られる株価上昇やイールド低下に対応していると考えられる。しかしながら、2001 年 9 月半ば以降、米国同時多発テロの影響を受けて、デフォルト確率は急激な上昇を見せている。その影響は、2002 年初頃を境に徐々に縮小していく方向にあったようである。2002 年夏頃になると、若干ではあるが再び上昇の兆しがある。これは、当時の株価の低下とイールドの上昇の結果であり、当時の米国航空業界における情勢の悪化を反映したものではないかと思われる。この時期の主なイベントとしては、米国業界 4 位のＵＳエアーの破産法適用申請 (2002 年 8 月 11 日)、アメリカン航空の従業員 7000 人削減発表 (2002 年 8 月 13 日)、全日空と同じくスター・アライアンス・グループに属するユナイテッド航空の破産法適用申請 (2002 年 12 月 9 日) が挙げられる。

次に、推定の過程で得られる時価評価での負債／企業価値比率の系列とデフォルト確率の関係に着目してみると、2000 年初頃から 2001 年半ば頃まで低下傾向を示している。参考までに、バランス・シート上の負債項目の系列 (図表 14) と比較すると、同じく低下傾向にあると見ることが出来る。時価評価での負債額とバランス・シート上の負債項目とは、異なる概念であって留意が必要ではあるが、デフォルト確率は、(推定された) 時価評価での負債／企業価値比率の系列を通じて、間接的にバランス・シート情報の時系列的変化を反映しているといえよう。

なお、日本航空についても同様にデフォルト確率推定を行う (図表 16) と、全日空のケースと同じく、2001 年 9 月半ば以降デフォルト確率が急上昇し、その後低下したという、基本的な部分では両者とも同じような結果であったと評価できる一方で、興味深い相違点もあることが見えてくる (図表 14)。[35]　例えば、日本航空に関する結果の方が比較的滑らかな点である。むろん、これは、株価及び社債イールドの系列がより滑らかなことに起因していると言ってしまえばそれまでではある。しかし、一般的に航空業界に関しては規模が小さければ小さいほど、その企業を取り巻く状況やイベントの影響を受け易くなると考えられ、売上高、資本金、従業員数等に関して相対的に規模の大きい日本航空のデフォルト確率の方がイベント等に対して比較的敏感には反応しない、と解釈することも可能であろう。[36]

[35]日本航空は、2002 年 10 月より日本エアシステムと経営統合し JAL システムとして再編されている。そのため、同 9 月までについての分析を行った。

[36]実際に 2001 年 9 月 11 日のテロ後 1 週間の株価の変化に注目してみると、図表 15 にあらわれているように全日空の株価の方がやや敏感に反応している。また、デフォルト確率計算の過程で推定される企業価値 (図表 11、17) について、そのボラティリティの平均値を計算してみると、全日空の方が数%ポイントボラティ

更に、前節と同様に株価や社債の情報とデフォルト確率の相関係数を求めてみると (図表 13、19)、係数のレベルには差があるものの、日本鋼管のケース・スタディ同様に KHN 法による推定結果が市場から観察される情報を満遍なく活かしていることが改めて伺われる (図表 12、18)。

6.3 ケース・スタディーからみた KHN 法のパフォーマンス評価

以上のケース・スタディから得られたメッセージとして最も重要な点は、KHN 法によって推定されたデフォルト確率が、各々の重要な局面において、株式市場及び社債市場の情報を適切かつバランスよく取り込んでいる点である。これは、単一の市場データにだけ依存したモデルへの警笛となっており、両市場の動向や情報の活かし方に関して、事前的な予測と事後的な説明とはしっかり峻別されるべきであることを示していると評価できよう。むろん、社債／株式両市場の情報は企業のクレジット・リスクの状態を把握するにあたって有用であり、常に両市場の動向に着目する必要があろう。しかし、これまでの研究では両者の使分けのバランス、または両者の相対的重要性のウエイト、についてまで踏み込んだ議論はなされていなかったと思われる。このバランスは事前には既知ではないと考えられる。社債または株式情報のいずれかのみを用いた研究はこの問題への直接的な答えを与えてくれない。過去の局面の評価で何れの指標が重要であったかの説明を行うのは、暗にこのバランスを分析者の匙加減で調整していることであると見ることも出来る。むろん、このような匙加減はマーケット参加者等の腕の見せ所であり、臨機応変な視点を持つことには一理あると考えられる。[37] ただし、我々の研究はそのバランスの重要性にスポットライトを当て、ある程度システマティックにそのバランスを判断する方法を提示し、今後の研究への一つの道標を与えたと位置づけられる。今後も、株式市場及び社債市場の情報を理論に忠実な形で同時に織り込み、局面に応じて両者の情報をバランスよく反映するデフォルト確率推定モデルを発展させていく必要性があるだろう。

7 結論および今後の研究課題

本稿では、市場で観察される個別企業に関する情報を**包括的**に用いて、**従前の研究に比べて理論モデルに忠実**なかたちでのデフォルト確率の推定を行い、その一定の有効性を見いだした。我々はまず、既存の実証研究の立脚する前提条件や利用データの簡便化には、論理的な矛盾が含まれていることを述べた。さらに、シンプルな構造型モデルのもとでそれ

リティが高いとの結果を得る。この結果も、企業価値に関して全日空の方が多少ながら変動しやすいという市場の見込みを示唆していると言え、ひいては両者の規模の違いを端的に表していると考えられよう。

[37] また、社債や株式の価格は様々な要因が複雑に入組んで形成されるため、ある時期においては、クレジット・リスクを適切に反映していないような場合もあると考えられる。このようなケースにおいては、システマティックな手法よりも分析者の匙加減で臨機応変な対応をした方が適切な場合もあると考えられる。

らの矛盾を生じさせているややきつめの仮定をリラックスさせ、株式と社債双方の情報を総合的に用いてデフォルト確率を推定する方法を提案した。複数の情報から、1つの指標を構成できる、という点にこのような方法を用いることの意義の一つがある。ケース・スタディは、先行研究における簡便な方法による推定の結果と、我々の方法による結果にはそれ相応の差異があることを、またデータの包括的な利用を可能にする我々の新たな方法がある程度の有効性を持ち得る、ということを示唆している。

価格過程が (5)、(22) 式のような幾何ブラウン運動に従う資産を原資産とするデリバティブは（あるクラスのものについては)、安全資産と原資産によって複製することが可能であることが知られている。[38] ある証券が複製可能であるとき、その証券の評価は、投資家がリスク愛好的でない限りにおいてはその選好とは無関係に決定される。ある証券と同一のペイオフをもたらすポートフォリオを構成する各証券の価値の和によって、そのある証券の評価が決定されるためである。また、ある証券が他の証券によって複製可能であるとき、その証券の価格評価式には、そのある証券の期待成長率が明示的に現れないことが知られている。実際、本稿で導かれた株式及び社債（負債の）評価式である、(6)、(7)、(43)、(44) 式においても企業価値に関する期待成長率を表すパラメータ（μ_A）は現れていない。これらの価格評価式では、企業価値の期待成長率を表すパラメータは安全資産の期待成長率を表すパラメータに置き換えられ、あたかもリスク中立な投資家が評価した場合の評価式であるかのように見える。

そのような評価式を前提としてパラメータを推定する場合、企業価値の期待成長率をモデル内で推定することは出来ない。本稿でデフォルト確率と呼んできたものは、このようなパラメータ推定に基づいて計算されたものであり、その計算式の中にも企業価値の期待成長率や投資家の選好に関するパラメータはやはり現れてこない。ルーレットやさいころなどに関する確率 (客観確率) とは異なり、企業のデフォルト確率は主観確率であると考えられる。企業に関する現実のデフォルト確率は、そのような主観確率であるはずであり、それは本来投資家の選好と独立に決定されるものではない。本稿でデフォルト確率と呼んできたところのものを投資家が抱く信念として解釈するような場合には、投資家がリスク中立的である (線形の効用関数を持っている) という想定を行っていることになり、注意が必要である。標準的な経済学やファイナンス理論は、投資家がリスク回避的であることを想定してきた。本稿におけるデフォルト確率は、標準的な投資家が抱く信念としての確率しての意味を持たないのである。

そうした確率を求めるためには、企業価値の期待成長率や投資家の選好が (株式や債券の) 価格評価式に明示的に現れるようなモデルを構成する必要がある。本稿で提示したよ

[38]ある証券が将来もたらすペイオフと全く同一のペイオフをもたらすポートフォリオを、他の証券を組み合わせることで構成可能なときに、そのある証券は「複製可能」であると呼ばれる。

うなモデルは完備市場を仮定したモデルであるといわれる。[39] 企業価値の期待成長率や投資家の選好に関するパラメータを明示的に考慮するためには、不完備市場に基づくモデルを構成する必要がある。そのためには、価格過程として (5)、(22) 式のような幾何ブラウン運動を仮定するのではなく、例えば、複合ポアソン・プロセスとブラウン運動で特徴付けられるジャンプ・ディフュージョン・プロセスと呼ばれる過程を想定するといった方向性が考えられる。しかし、そのようなプロセスを採用した場合には、価格評価式はより複雑化してしまう。本稿で可能であったような比較的容易な推定を行うことが難しくなる。また、投資家の選好を明示的に考える場合には、それをどのように定式化するかも問題である。マクロ経済学で標準的とされる効用関数を仮定して現実の株式/債券/国債データなどからその選好パラメータを推定した場合、しばしばアンリーズナブルな推定値が得られることが知られている。これはエクイティ・プレミアム・パズルや、リスク・フリー・レート・パズルと呼ばれており、Mehra and Prescott (1985) 以来の深刻なパズル (問題) として、今もその解決が図られていない。[40] 標準的な投資家が抱く信念としての確率、あるいは現実の確率としてのデフォルト確率を求めるにあたっては、評価式の複雑化に加え、このような難題を考察する必要性も生じてしまう。繰り返しになるが本稿で推定された「デフォルト確率」はリスク中立確率であり、それ自体はクレジット・リスク把握の上で必ずしも積極的な意味を持たないかもしれない。しかしながら、リスク中立確率は、投資家がリスク回避的である限りにおいては現実の確率は少なくともその値以上であるという、参照点としての意義を持つ。想定する投資家の選好がリスク回避的であればあるほど、現実を記述する確率測度に基づくデフォルト確率の値は上昇する。そのようなデフォルト確率の推定は、今後の研究課題である。[41]

A 補論: 価格公式の導出

ここでは、同値マルチンゲール・メジャー Q のもとで、$\{A_s\}$ の期待成長率 μ_A と安全資産利子率 r が等しくなること、株式/負債 (社債) 価格公式の導出について説明する。

本稿のように、企業価値の従う過程を (22) 式として定式化した場合、$\mu_A = r$ となることは、よく知られた事実である。Black and Cox (1976)、Black and Scholes (1973) では、

[39] 完備な市場では、(あるクラスの) 任意の証券は市場に存在する他の証券によって複製可能である。市場が完備であることと、任意の証券が市場に存在する他の証券によって複製可能であることは、(テクニカルな点を除いてほぼ) 同値である。

[40] これらの「パズル」に関する最近の展開については、Mehra (2003) を参照されたい。

[41] また、企業のデフォルト確率を求めるにあたって本稿のように株式/社債の価格評価モデルによる手法を用いるのではなく、財務データを用いた統計的手法を用いるという方法もあることは前述の通りである。そのような方法で推定されたデフォルト確率には投資家の信念や選好が織り込まれていると考えることが出来る。本稿で推定された「デフォルト確率」の欠点の一つは、そのような統計的に推定された確率と比較可能でない点にある。両手法では、推定される「確率」のフィロソフィーに乖離があることから、本来は両者による結果を直接比較することは出来ないということに注意する必要がある。

この事実を、ヘッジ・ポートフォリオに関する議論から導いている。以下では、そのような議論とは若干異なる方法での説明を行う。

全ての資産の収益率は安全資産利子率に一致するから、$\{A_s\}$ の期待成長率 μ_A と安全資産利子率 r の間には、

$$
\begin{aligned}
V_t &= E_t^Q \left[\exp\left\{-r\left(\tau - t\right) V_\tau\right\}\right] \\
&= E_t^Q \left[\exp\left\{-r\left(T-t\right)\right\} A_T \left(1-\Lambda_T\right) + \int_t^T \rho P \exp\left\{-r\left(T-t\right)\right\} d\Lambda_s\right]
\end{aligned} \tag{40}
$$

という関係式が成り立つ。仮に現時点 t 期でデフォルトに至っていないのであれば $t > \tau$ であるから、$V_t = A_t$ が成立していることがわかる。ここで停止時刻 $\tau \wedge T := \min\left[\tau, T\right]$ を用いれば、(40) 式の右辺は

$$
E_t^Q \left[\exp\left\{-r\left(\tau \wedge T - t\right)\right\} A_{\tau\wedge T}\right] \tag{41}
$$

と表される。よって、

$$
A_t = E_t^Q \left[\exp\left\{-r\left(\tau \wedge T - t\right)\right\} A_{\tau\wedge T}\right] \tag{42}
$$

となるはずである。ここで、Q の下で $\{A_s\}_{s\in[0,T]}$ の期待成長率は μ_A としており、$\mu_A = r$ とすると確率過程 $\{\exp\left(-rs\right) A_s\}$ はマルチンゲールとなるので、任意抽出定理により (42) 式が成立することがわかる。また (42) 式が成立するのは、μ_A が r となる場合に限られる。以上より、同値マルチンゲールメジャーの下では、$\mu_A = r$ となる。

4.2 節で説明された株式/負債に関するペイオフを踏まえての、Q の下での各々の期待値は、

$$
\begin{aligned}
S_t &= E_t^Q \left[\left(1-\Lambda_T\right) \exp\left\{-r\left(T-t\right)\right\} \max\left[V_T - P, 0\right]\right] \\
&= E_t^Q \left[\left(1-\Lambda_T\right) \exp\left\{-r\left(T-t\right)\right\} \max\left[A_T - P, 0\right]\right]
\end{aligned} \tag{43}
$$

$$
\begin{aligned}
D_t &= E_t^Q \left[\left(1-\Lambda_T\right) \exp\left\{-r\left(T-t\right)\right\} \min\left[V_T, P\right] + \int_t^T \exp\left\{-r\left(s-t\right)\right\} m_s d\Lambda_s\right] \\
&= E_t^Q \left[\left(1-\Lambda_T\right) \exp\left\{-r\left(T-t\right)\right\} \min\left[A_T, P\right] + \rho P \int_t^T \exp\left\{-r\left(T-t\right)\right\} d\Lambda_s\right]
\end{aligned} \tag{44}
$$

のように表される。これに、$\mu_A = r$ となることを用いれば、(27)、(28) 式を得ることが出来る。

B　補論: デフォルト確率計算式の導出過程

ここでは、5.1 節で割愛したデフォルト確率の計算式の導出過程を取扱う。満期日以前に企業価値がデフォルト境界を下回るというイベントについて、

$$\{(\exists u \in [t,s)) \quad A_u \leq \rho P \exp\{-r(s-u)\}\} = \left\{\min_{u\in[t,s)} \frac{A_u}{\exp\{ru\}} \leq \rho P \exp\{-rs\}\right\} \tag{45}$$
$$= \left\{\min_{u\in[t,s)} X_u \leq \log \rho P/A_t - r(s-t)\right\}$$

のように書き換えることが出来る。ただし、$X_s := \log A_s/A_t - rs + rt$ である。同値マルチンゲール・メジャー Q の下で $\{X_s\}$ は、$X_t = 0$、ドリフト $\tilde{\mu}\,(:= -\sigma_A^2/2)$、ボラティリティ σ_A のブラウン運動になる（補論 A での議論より、Q の下では $\mu_A = r$ となる）。

A_{T_Z} を X_{T_Z} で表しておくと、

$$A_{T_Z} = A_t \exp\{r(T-t) + X_{T_Z}\} \tag{46}$$

のようになるので、この式と (45) 式より、(37) 式は、$\{X_s\}$ を用いて、

$$(37) = Q\left[\left\{\min_{u\in[t,T_Z)} X_u \leq \log \rho P/A_t - r(T_Z - t)\right\} \cup \{X_{T_Z} \leq \log P/A_t - r(T_Z - t)\}\right] \tag{47}$$

となる。$M_{[t,T_Z)} := \min\limits_{u\in[t,T_Z)} X_u$ と定めておくと、$M_{[t,T_Z)}, X_{T_Z}$ が各々m, x 以上である確率は、

$$\begin{aligned}&Q\left[\left\{M_{[t,T_Z)} > m\right\} \cap \{X_{T_Z} > x\}\right]\\ &= \Phi\left(\frac{-x + \tilde{\mu}(T_z - t)}{\sigma_A\sqrt{(T_z - t)}}\right) - \exp\left\{\frac{2\tilde{\mu}m}{\sigma_A^2}\right\}\Phi\left(\frac{-x + 2m + \tilde{\mu}(T_z - t)}{\sigma_B\sqrt{(T_z - t)}}\right)\end{aligned}$$

のように与えられる。[42]　(47)= $1 - Q\left[\left\{M_{[t,T_Z)} > m\right\} \cap \{X_{T_Z} > x\}\right]$、$m = \log \rho P/A_t - r(T_Z - t)$、$x = \log P/A_t - r(T_Z - t)$ を用いれば、

$$\begin{aligned}(47) &= \Phi\left(\frac{-\log A_t/P - (r - \sigma_A^2/2)(T_z - t)}{\sigma_A\sqrt{T_z - t}}\right)\\ &\quad + \frac{A_t}{\rho P}\exp\{r(T_Z - t)\}\,\Phi\left(\frac{\log A_t/P + 2\log(\rho P/A_t) - (r + \sigma_A^2/2)(T_z - t)}{\sigma_A\sqrt{T_z - t}}\right)\end{aligned}$$

を得る。

C　補論: データについて

本稿で用いたデータの出所、データ・コード等は以下の通りである。Datastream 利用については Datastream International (1995) を参考にした。

[42] Harrison (1990) の第 1 章第 8 節、あるいは Bielecki and Rutkowski (2002) の第 3 章第 1 節第 2 項を参照。

- 安全資産利子率 (r_{JP12})　…　12ヶ月物日本国内銀行間出し手レート (英国銀行協会集計)。Datastream より取得 (Int. − BBJPY12、IO)。利用に際しては連続複利換算を施した。
- 簿価負債額 (B_0)　…　各社の財務諸表 (個別決済) の負債項目。分析対象日からみて直近 (中間期＜９月末＞または年度末) の発表データを利用。
- 償還額 100 円あたりの経過利息を含めた債券価格 (GP_n)　…　Datastream より取得 (Bond 系列の各社社債、GP)。コード番号はそれぞれ、日本鋼管− 839169(2003 年 9 月満期) 及び 814041(2005 年１月満期)、全日空− 841433(2005 年 3 月満期)、日本航空− 843188(2006 年 11 月満期)。
- (半年複利換算の) 最終利回り (RY_n)　…　Datastream より取得 (Bond 系列の各社社債、RY)。
- 満期までの残存期間 (LF_n)　…　Datastream より取得 (Bond 系列の各社社債、LF)。
- (額面での) 発行残額 (AOS_n)　…　Datastream より取得 (Bond 系列の各社社債、AOS)。
- 株式時価総額 (S)　…　Datastream より取得 (Stock 系列の各社データ、MV、日本鋼管は J:JK@N、全日空は 932288、日本航空は 922309)。
- 株価　…　株価終値。Datastream より取得 (Stock 系列の各社データ、P)。
- スプレッド　…　連続複利換算した、各社の最終利回り−r_{JP12} より算出。

References

[1] 安藤啓、丸茂幸平、「ノックアウト・オプション・アプローチを用いたデフォルト率の推定方法」、日本銀行金融研究所、Discussion Paper 2001-J-4、2001 年 1 月。

[2] 家田明、「社債価格にインプライされている期待デフォルト確率の信用リスク・プライシング・モデルによる推定−改良型ジャロウ・ランド・ターンブル・モデルを用いて」、『金融研究』、1999 年 9 月、18-別 1 号、107-134。

[3] 家田明、吉羽要直、「社債価格にインプライされている期待デフォルト確率の信用リスク・プライシング・モデルによる推定 (2) −ロングスタッフとシュワルツのモデルを用いて−」、『金融研究』、1999 年 9 月、18-別 1 号、135-151。

[4] 木島正明、小守林克哉、『信用リスク評価の数理モデル』、朝倉書店、1999 年 10 月。

[5] 伊藤隆敏、原田喜美枝、「銀行危機のニュースと株価の反応－イベントスタディー」、『証券経済学会報』、2001 年 5 月、35 号、252-257。

[6] 中小企業の会計に関する研究会、『中小企業の会計に関する研究会　報告書』、2002 年 6 月、経済産業省中小企業庁。

[7] 北原一功、「急増する中堅・中小企業貸付債権の証券化」、格付投資情報センター『月刊レーティング情報』、2003 年 3 月、2003 年 3 月号、59-63。

[8] 楠岡成雄、中川秀敏、青沼君明、『クレジット・リスク・モデル—評価モデルの実用化とクレジット・デリバティブへの応用』、金融財政事情研究会、2001 年 6 月。

[9] 黒子貴史、神山直樹、「倒産確率推定モデルの精度比較検証」、『証券アナリストジャーナル』、2000 年 4 月、38-4 号、76-90。

[10] 斎藤啓幸、森平爽一郎、「銀行の債務超過確率:オプション・アプローチによる推定」、森平爽一郎編著『ファイナンシャル・リスクマネージメント』、朝倉書店、2000 年 7 月。

[11] 島義夫、「中小企業金融、日本振興銀行の実験」、東京フィナンシャルジャーナル『Stories』、2003 年 8 月 29 日、20 号。

[12] 帝国データバンク、「民事再生法認可企業の実態調査」、『帝国データバンク調査資料』、2001 年 4 月 (a)。

[13] 帝国データバンク、「第 2 回:民事再生法認可企業の実態調査」、『帝国データバンク調査資料』、2001 年 11 月 (b)。

[14] 東京三菱銀行、「期待デフォルト確率からみた現在の社債市場について～構造モデルと誘導モデルを用いた比較分析～」、*Focus on the Market*、2003 年 5 月、56 号。

[15] 濱條元保、平田紀之、中村徹、「エンロン破綻を予見した EDF なら日本企業の「デフォルト確率」がすべて鮮明になる」、『エコノミスト』、2002 年 3 月 12 日、80-11 号、17-19。

[16] 三好眞、「債券格付けと理論上の信用リスク・プレミアムに関する研究」、『金融研究』、1998 年 11 月、17-5 号、167-190。

[17] ＵＦＪつばさ証券、「社債需給逼迫とポートフォリオのパフォーマンス」、『マーケット千里眼』、2001 年 9 月 7 日、3 号、15-18。

[18] 森平爽一郎、「倒産確率推定のオプション・アプローチ」、『証券アナリストジャーナル』、1997 年 10 月、35-10 号、2-9.

[19] 森平爽一郎、「信用リスクの測定と管理　第 3 回:オプションモデルによる倒産確率推定:基礎」、『証券アナリストジャーナル』、2000 年 1 月、38-1 号、85-100。

[20] Bielecki, Tomasz R. and Rutkowski, Marek, *Credit Risk: Modeling, Valuation and Hedging*, Springer-Verlag, 2002.

[21] Basel Committee on Banking Supervision, "Credit Risk Modelling: Current Practices and Applications," *Basel Committee Publications*, April 1999, 49.

[22] Black, Fischer and Cox, John C., "Valuing Corporate Securities: Some Effects of Bond Indenture Provisions," *Journal of Finance*, May 1976, 31-2, 351-367.

[23] _ _ _ _ _ and Scholes, Myron S., "The Pricing of Option and Corporative Liabilities," *Journal of Political Economy*, May-June 1973, 81-3, 637-654.

[24] Briys, Eric and de Varenne, Francois, "Valuing Risky Fixed Rate Debt: An Extension," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, June 1997, 32-2, 239-248.

[25] Caouette, John B.; Altman, Edward I. and Narayanan, Paul, *Managing Credit Risk : The Next Great Financial Challenge*, John Wiley & Sons, 1998.

[26] Cossin, Didier and Pirotte, Hugues, *Advanced Credit Risk Analysis*, John Wiley & Sons, 2000.

[27] Crosbie, Peter J. and Bohn, Jeffrey R., "Modeling Default Risk," *White Papers*, January 2002, KMV LLC.

[28] Datastream International, *Datastream Definitions Manual, A Primark Company*, 1995.

[29] Dietsch, Michel and Petey, Joel, "The credit risk in SME loans portfolios: Modeling issues, pricing, and capital requirements," *Journal of Banking and Finance*, March 2002, 26-2&3, 303-322.

[30] Dow, James and Werlang, Sergio Ribeiro da Costa, "Uncertainty Aversion, Risk Aversion, and the Optimal Choice of Portfolio", *Econometrica*, January 1992, 60-1, 197-204.

[31] Duffie, Darrell, *Dynamic Asset Pricing Theory*, Third edition, Princeton University Press, 2001.

[32] _ _ _ _ _ and Singleton, Kenneth J., "Modeling term structures of defaultable bonds", *Review of Financial Studies*, 1999, 12, 687-720.

[33] _ _ _ _ _ and _ _ _ _ _, *Credit Risk: Pricing, Management, and Measurement*, Princeton University Press, 2003.

[34] Epstein, Larry G. and Wang, Tan, "Intertemporal Asset Pricing Under Knightian Uncertainty", *Econometrica*, March 1994, 62-2, 283-322.

[35] Giesecke, Kay, "Credit Risk Modeling and Valuation: An Introduction", mimeo, Cornell University, August 2002.

[36] Harrison, J. Michael and Pliska, Stanley R., "Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading", *Stochastic Processes and their Applications*, August 1981, 11-3, 215-260.

[37] _ _ _ _ _ and _ _ _ _ _, "A Stochastic Calculus Model of Continuous Trading: Complete Markets", *Stochastic Processes and their Applications*, August 1983, 15-3, 313-316.

[38] _ _ _ _ _, *Brownian Motion and Stochastic Flow Systems*, Krieger Publishing Company, 1990.

[39] Hirata, Hideaki and Ueda, Kazuo, "The Yield Spread as a Predictor of Japanese Recessions", January 1998, Bank of Japan Research and Statistics Department Working Paper, 98-3.

[40] Jackson, Patricia; Nickell, Pamela, and Perraudin, William, "Credit Risk Modelling", *Financial Stability Review*, June 1999, 6, 94-121.

[41] Jackson, Patricia and Perraudin, William, "Regulatory Implications of Credit Risk Modelling", *Journal of Banking and Finance*, January 2000, 24-1&2, 1-14.

[42] Jarrow, R., and Turnbull, Stuart M., "Pricing Derivatives on Financial Securities subject to Credit Risk", *Journal of Finance*, March 1995, 50-1, 53-85.

[43] Kanaya, Shin and Takahashi, Satoru, "Bid-Ask Spreads of Ambiguity-Free Assets", 2003, mimeo.

[44] Kijima, Masaki and Suzuki, Teruyoshi, "A Jump-Diffusion Model for Pricing Corporate Debt Securities in a Complex Capital Structure", *Quantitative Finance*, November 2001, 1 (6), 611-620.

[45] Knight, Frank, *Risk, Uncertainty and Profit*, Houghton Mifflin Company, 1921.

[46] Longstaff, Francis A. and Schwartz, Eduardo S., "A Simple Approach to Valuing Risky Fixed and Floating Rate Debt", *Journal of Finance*, July 1995, 50-3, 789-819.

[47] Madan, Dilip B. and Unal, Haluk, "Pricing the Risks of Default", *Review of Derivatives Research*, December 1998, 2-2&3, 121-60.

[48] Mehra, Rajnish, "The Equity Premium: Why Is It a Puzzle?", *Financial Analyst Journal*, January/February 2003, 59-1, 52-69.

[49] _ _ _ _ _, and Prescott, E. C., "The Equity Premium: A Puzzle", *Journal of Monetary Economics*, March 1985, 15-2, 145-161.

[50] Merton, Robert C., "Option Pricing When Underlying Stock Returns are Discontinuous", *Journal of Financial Economics*, January-March 1976, 3-1&2, 125-144.

[51] Nishimura, Kiyohiko G. and Ozaki Hiroyuki, "Irreversible Investment and Knightian Uncertainty", September 2002, University of Tokyo CIRJE Discussion Paper, 2002-CF-176.

[52] Packer, Frank, "Credit Risk in Japan's Corporate Bond Market", *Current Issues in Economics and Finance*, November 1999, 5-15.

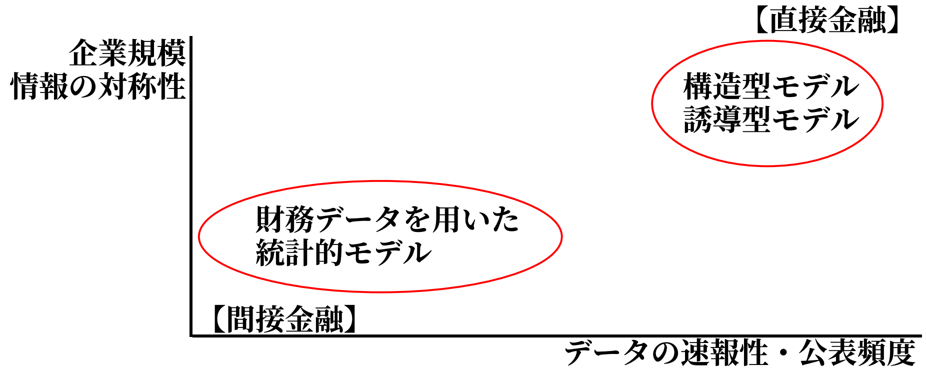
[53] Rigotti, Luca and Shannon, Chris, "Uncertainty and Risk in Financial Markets," April 2002, mimeo.

[54] Saunders, Anthony and Allen, Linda, *Credit Risk Measurement: New Approaches to Value at Risk and Other Paradigms*, 2nd Edition, John Wiley & Sons, 2002.

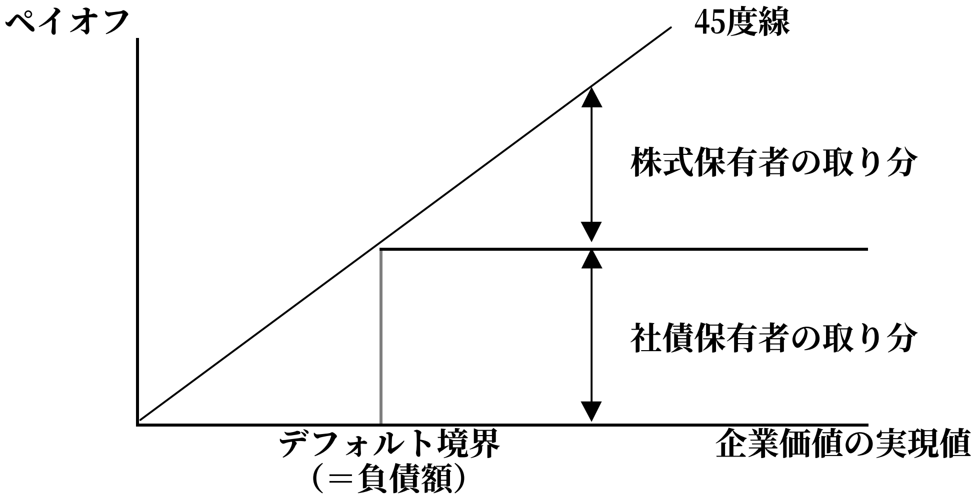
[55] Trussel, John, "Default Probability on Corporate Bonds: A Contingent Claims Model," *Review of Financial Economics*, 1997, 6-2, 199-209.

[56] Vasicek, Oldrich A., "Credit Valuation", *White Papers*, March 1984, KMV LLC.

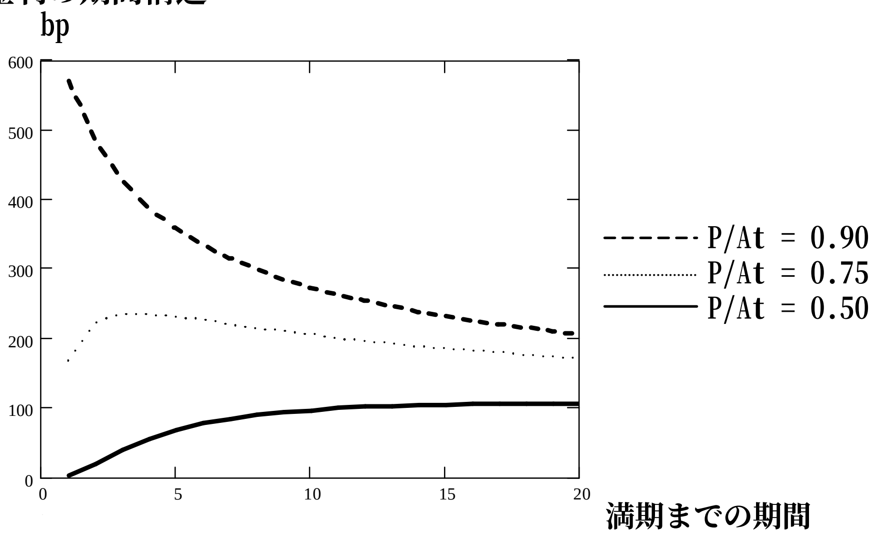
図表１　　　デフォルト確率モデルの類型と適用範囲の概念



図表２　　　満期時点における企業価値の配分



図表３　　　金利の期間構造

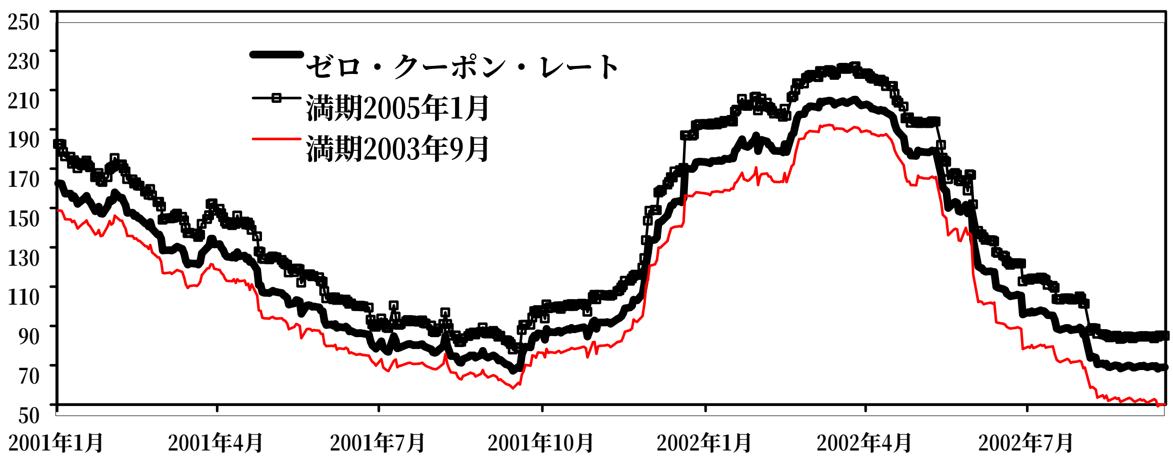


注：r ＝ 0.01、ρ ＝ 0.9、σ_a ＝ 0.25として算出。

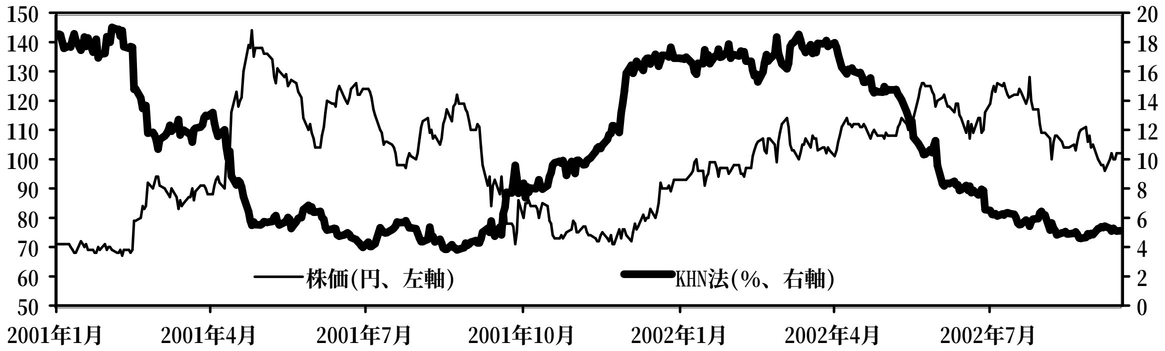
図表４　　　　　デフォルト確率の推定方法の比較

項目＼方法	本稿の方法	先行研究の方法(3.2節)	
		方法１	方法２
株式のボラティリティについての仮定	仮定は不要	定数と仮定 (モデルと整合的でない)	定数と仮定 (モデルと整合的でない)
企業価値のボラティリティの推定（σ_A）	現時点の株式＋社債データから推定	ヒストリカルな株式データから推定	ヒストリカルな株式データから推定
企業価値額の推定（A_t）	現時点の株式＋社債データから推定	負債の時価評価額を、時間によらず一定と仮定して計算	現時点の株式データから推定

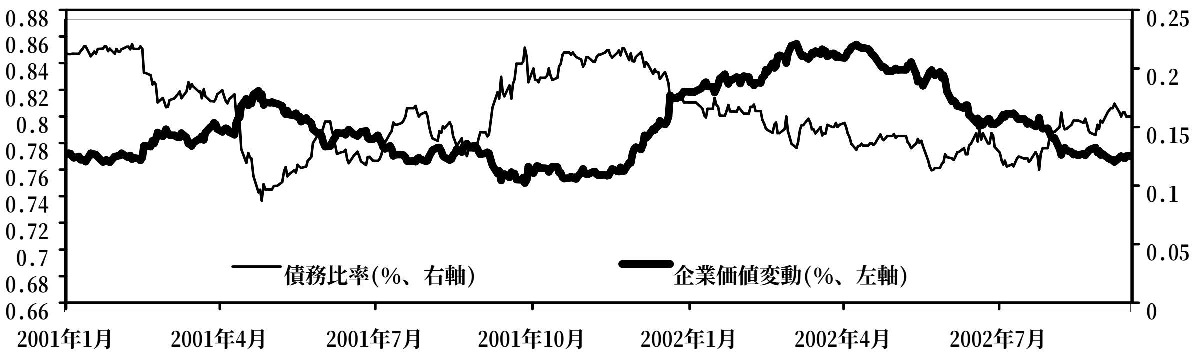
図表５　　　　　日本鋼管のイールド



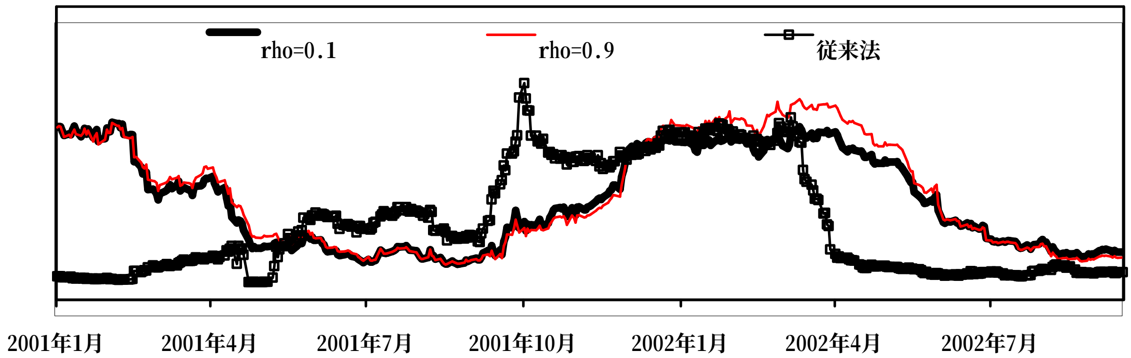
図表６　　　　　　　　デフォルト確率と株価（日本鋼管）



図表７　　　債務比率と企業価値変動 ＜ボラティリティ＞　（日本鋼管）



図表８　　　　　各種モデルによるデフォルト確率（日本鋼管）



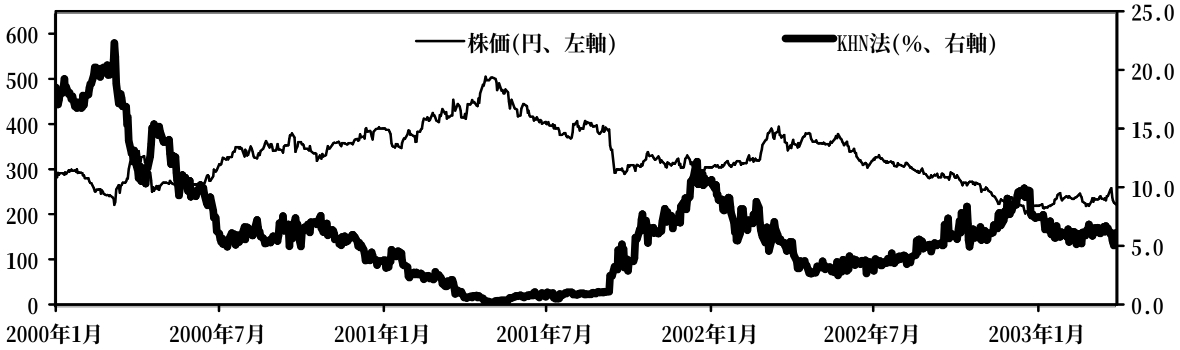
注：KHN法と従来法による推定値のレベル差を勘案して縦軸調整を施した。

図表９　　　　　デフォルト確率と各指標の相関係数（日本鋼管）

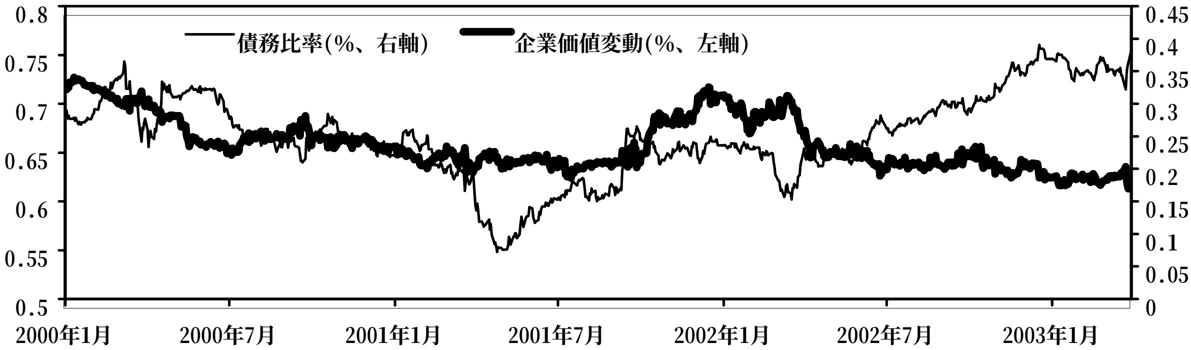
	株価	イールド	スプレッド
KHN法(ρ=0.1)	-0.51	0.91	0.84
KHN法(ρ=0.9)	-0.39	0.96	0.91
従来法	-0.34	0.20	0.29

注：スプレッドはイールドと安全資産利子率の格差。

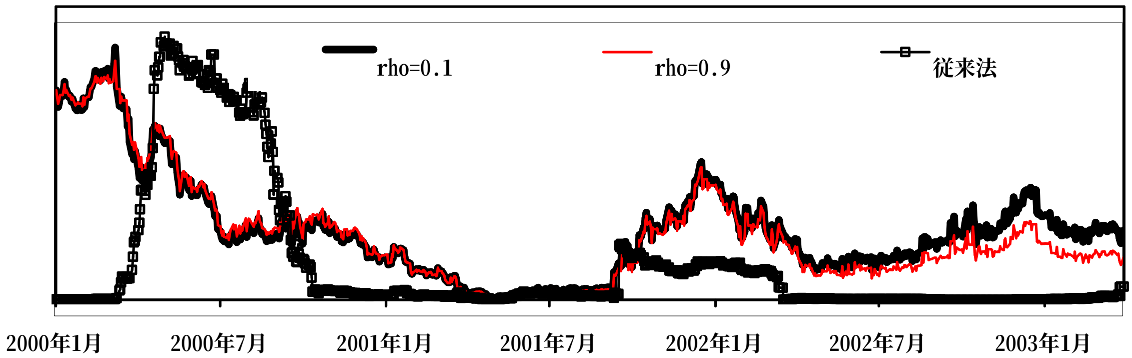
図表１０　　　　デフォルト確率と株価（全日空）



図表１１　　債務比率と企業価値変動 ＜ボラティリティ＞　（全日空）



図表１２　　　各種モデルによるデフォルト確率（全日空）



注：KHN法と従来法による推定値のレベル差を勘案して縦軸調整を施した。

図表１３　　　デフォルト確率と各指標の相関係数（全日空）

	株価	イールド	スプレッド
KHN法(ρ=0.1)	-0.64	0.88	0.92
KHN法(ρ=0.9)	-0.51	0.92	0.94
従来法	-0.17	0.35	0.29

注：スプレッドはイールドと安全資産利子率の格差。

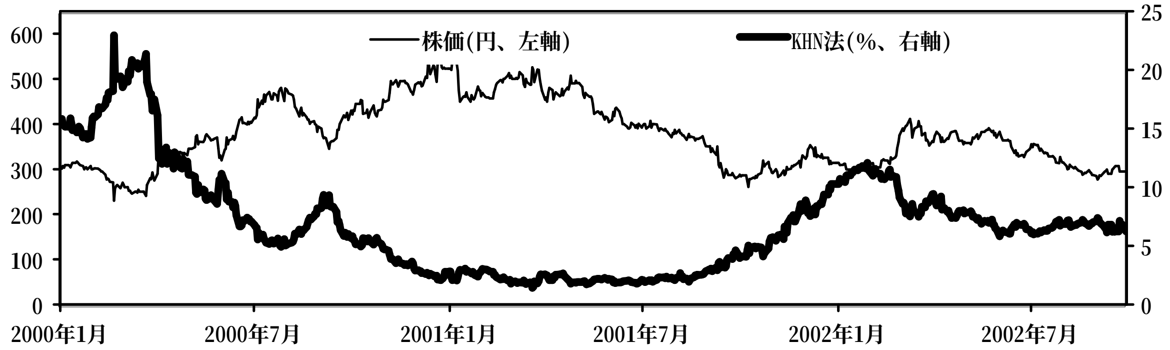
図表１４　バランス・シートから見た全日空の負債項目

決算日付	負債額（10億円）
1999年度 ９月末	1036
３月末	1032
2000年度 ９月末	1084
３月末	958
2001年度 ９月末	960
３月末	1046
2002年度 ９月末	1011
３月末	1053

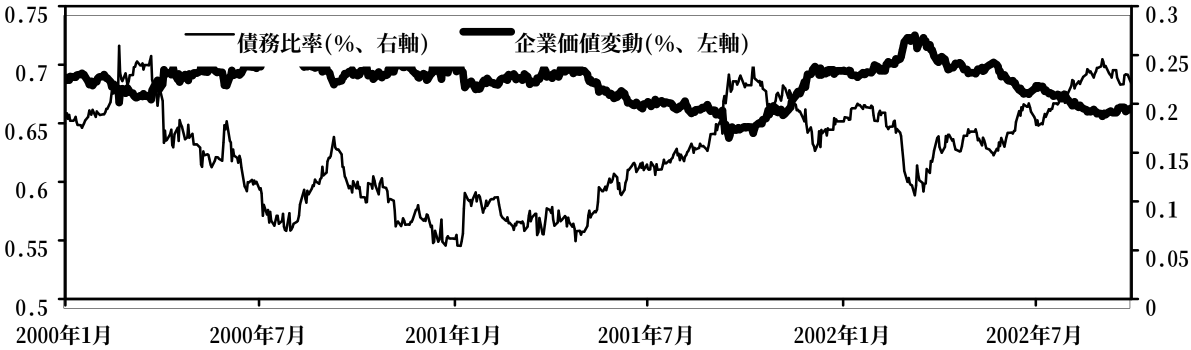
図表１５　米国同時多発テロ後の株価

	全日空	日本航空
2001年9月11日	\388	\350
2001年9月18日	\292	\290

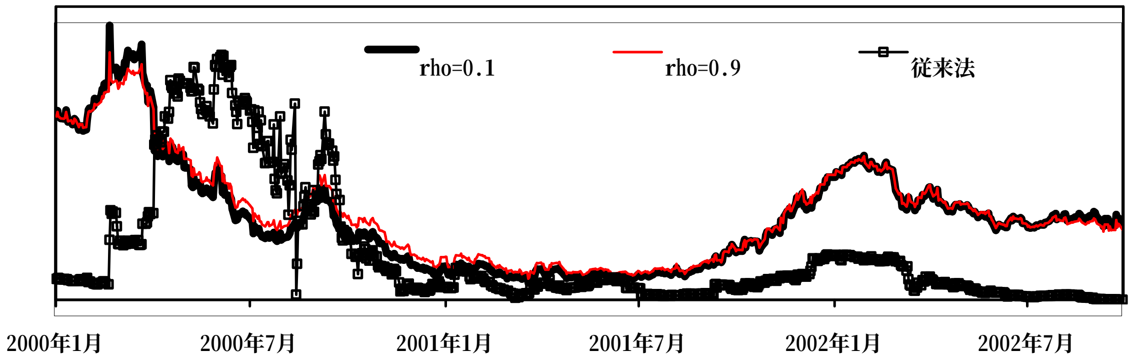
図表１６　　デフォルト確率と株価（日本航空）



図表１７　　債務比率と企業価値変動 ＜ボラティリティ＞　（日本航空）



図表１８　　各種モデルによるデフォルト確率（日本航空）



注：KHN法と従来法による推定値のレベル差を勘案して縦軸調整を施した。

図表１９　　デフォルト確率と各指標の相関係数（日本航空）

	株価	イールド	スプレッド
KHN法(ρ=0.1)	-0.68	0.79	0.88
KHN法(ρ=0.9)	-0.64	0.84	0.91
従来法	-0.03	0.53	0.44

注：スプレッドはイールドと安全資産利子率の格差。