



日本銀行ワーキングペーパーシリーズ

学習行動を導入した最近の金融政策ルール分析

- 経済構造に関する知識が不完全な下での
期待形成と政策運営 -

武藤一郎*

ichirou.mutou@boj.or.jp

No.04-J-4
2004年2月

日本銀行
〒103-8660 日本橋郵便局私書箱 30号

* 企画室

日本銀行ワーキングペーパーシリーズは、日本銀行員および外部研究者の研究成果をとりまとめたもので、内外の研究機関、研究者等の有識者から幅広くコメントを頂戴することを意図しています。ただし、論文の中で示された内容や意見は、日本銀行の公式見解を示すものではありません。

なお、ワーキングペーパーシリーズに対するご意見・ご質問や、掲載ファイルに関するお問い合わせは、執筆者までお寄せ下さい。

学習行動を導入した最近の金融政策ルール分析*
経済構造に関する知識が不完全な下での期待形成と政策運営

武藤 一郎†

【要旨】

金融政策ルールに関する従来の分析では、「民間主体も中央銀行も、マクロ経済の構造に関して正確な知識を持っている」という完全知識の仮定が置かれることが多かった。しかし、現実の経済では、両主体が先験的に正確な知識を持ち合せているということは考え難い。人々の知識は少なくとも事前的には不完全であり、過去ないし現在の経済を観察することによって、経験的に知識を習得していると考えるのがむしろ自然であろう。

こうした考え方にに基づき、近年、金融政策ルール分析の分野では、人々の知識が不完全で、学習（learning）により知識を習得する行動を導入した研究が活発に行われている。知識が不完全である場合、人々は先行きの経済に対して合理的期待を形成できないため、学習により得た知識を基に期待を形成する。中央銀行が経済を安定的にするためには、適切な金融政策ルールを選択することにより、学習に基づく期待を合理的期待へと収束させる必要がある。

本稿は、学習を導入した最近の金融政策ルール分析をサーベイし、「人々の知識が不完全であるという現実的な想定の下では、中央銀行はどのような政策運営を心掛ける必要があるか」という観点から、理論的含意を取り纏めたものである。

キーワード：金融政策ルール、合理的期待、不完全知識、適応的学習、E-stability、テイラー・プリンシプル、流動性の罍

JEL 分類番号：D83、D84、E52、E58

* 本稿の作成に際しては、青木浩介助教授（ボンペウ・ファブラ大学）、Seppo Honkapohja 教授（ヘルシンキ大学）および鶴飼博史氏、木村武氏、小田信之氏をはじめとする日本銀行企画室のスタッフから貴重なコメントを頂戴した。記して感謝の意を表したい。ただし、あり得べき誤りは筆者に属する。また、本稿で示される内容や意見は、筆者個人に属するものであり、日本銀行および同企画室の公式見解を示すものではない。

† 日本銀行 企画室（E-mail: ichirou.mutou@boj.or.jp）

目次

1. はじめに：不完全知識下の金融政策	1
2. 学習 (learning) の導入	3
2.1. 経済主体の知識に関する状況設定の整理	3
2.2. 学習方法の分類	6
2.3. 適応的学習を導入する場合の分析フレームワーク	8
2.3.1. 人々の認識する経済変動 (PLM) と実際の経済変動 (ALM): 写像関数の不動点としての合理的期待均衡	9
2.3.2. 適応的学習に基づく期待と合理的期待均衡の安定性: E-stability	12
3. 完全知識下の金融政策 (ベンチマーク・ケース)	17
3.1. 標準的ニューケインジアン・モデル	17
3.2. シンプル・ルールと均衡の一意性	18
3.3. 最適金融政策：裁量解と公約解	20
3.4. 「流動性の罍」の均衡	23
4. 民間主体の知識が不完全な場合の金融政策	25
4.1. シンプル・ルールと E-stability	25
4.2. 民間主体の学習と最適金融政策	28
4.2.1. 完全知識下の最適金融政策は民間知識が不完全でも有用か？	29
4.2.2. 民間主体が不完全知識の下での最適金融政策	30
4.3. 「流動性の罍」の可能性の再検討	31
4.3.1. 「流動性の罍」の均衡と E-stability	31
4.3.2. Escape Dynamics と「流動性の罍」	34
5. 中央銀行の知識が不完全な場合の金融政策	36
5.1. 完全知識下の最適金融政策は中央銀行の知識が不完全でも有用か？	36
5.2. 民間期待をルールに導入することの問題点と対処法	39
6. 民間主体と中央銀行の知識が不完全な場合の金融政策	41
6.1. 両主体の学習方法と情報集合が同じ場合	41
6.2. 両主体の学習方法が異なる場合	41
6.3. 両主体の情報集合が異なる場合	43
7. おわりに：不完全知識下で望ましい金融政策運営とは	45
補論. フォワードルッキング・モデルにおける E-stability の確認方法	47
参考文献	51

1. はじめに：不完全知識下の金融政策

金融政策ルールに関する従来の分析では、「民間主体も中央銀行も、経済構造について正確な知識を持っている」という完全知識（perfect knowledge）の仮定を置くことが一般的であった^{1, 2}。例えば、家計は足許の支出を決める上で、先行きの収入や物価を予測するが、その予測の際には経済構造に関する正確な知識に基づいて、精緻な予想を形成すると想定されている。また、中央銀行も経済構造を完全に把握しており、その知識を前提として政策目標を達成するための効率的な政策ルールを算出し、それを遂行すると想定されている。

しかし、現実には、民間主体と中央銀行いずれについても、経済構造に関して完全に正しい知識を先験的に持っているとは考え難い。まず、家計や企業などの民間主体が現実の経済構造を近似した経済モデルを持っていることは稀であるし、仮にそうしたモデルをインプリシットには持っているとしても、そこで用いられるモデルのパラメータは過去の経済データから得られるものであり、先験的に「正しいパラメータ」である保証はない。また、中央銀行は政策を決める上で何らかの経済モデルを参考にすることが多いが、そうしたモデルは先験的に「正しいモデル」としてはじめから与えられたものではなく、中央銀行のエコノミストが何らかの定式化をした上で、過去のデータを用いてパラメータを推計することで経験的に得られるものである。このような状況では、民間主体と中央銀行が、経済構造に関する「認識の誤り（ミス・パーセプション）」を持つ可能性は少なくないと思われる。

従来の金融政策ルール分析は、両主体が正確な知識を常に持つと仮定していたため、人々が経済構造に関してミス・パーセプションを持つ可能性は分析から除外されていた。このため、従来の分析で導かれた望ましい金融政策ルールは、ミス・パーセプションが経済の不安定性をもたらす可能性を予め捨象した下で導かれたものであった。しかし、上述したように、実際の経済を考えた場合、この状況設定は現実的でないと考えられる。したがって、現実の政策を考える上では、従来用いてきた完全知識の仮定を修正し、ミス・パーセプションが経済を不安定化させる可能性を予め前提とした上で、望ましい政策ルールを考察することが必要と考えられる。

こうした問題意識を背景に、近年、欧米の学界や中央銀行では、経済主体の完全知識の仮定を緩めた下での金融政策運営のあり方について、分析が進められている。これらの分析の特徴は、経済主体が経済構造について当初から完全知識を有しているのではなく、「過去および現在の経済の変動を観察することによって、経済構造を学習（learning）する」と仮定する点にある。すなわち、民間主体も中央銀行も、

¹ 金融政策ルール分析とは、中央銀行が特定のルールを採用すると仮想し、その下での経済変動について考察したものである。勿論、現実の中央銀行が機械的なルールに基づいて政策運営を行うことは稀であるが、標準的な構造モデルの中で、さまざまな政策ルールのパフォーマンスを比較検討することで、望ましい政策の方向性に関する一定の示唆が得られるという面があり、このため、各国中央銀行は近年、この分野の研究を活発に行っている。

² 完全知識下の金融政策分析については、Clarida, Gali and Gertler[1999]や Woodford[2003]を参照。

当初から正確な知識を持っているのではなく、実際の経済変動のあり方を観察し、そこから得た経験的知識を前提に自分の行動を決定すると想定されている。

学習をモデル分析に導入することが特に重要な意味を持つのは、それが従来分析で用いられてきた、合理的期待仮説 (rational expectation hypothesis) を再検討することに繋がるためである。Sargent[1993]によれば、マクロ経済モデルの中での合理的期待仮説は、以下の2つの仮定に基づいている。すなわち、(i)人々が自分の持つ情報集合の下で、予測誤差の期待分散を最小化するような最適予測形成を行うという仮定 (最適予測形成の仮定) と、(ii)その予測に基づいて人々が行動する結果生じる事後的な経済変動が、人々が予測形成に際して用いた経済構造の知識と整合的であるという仮定 (モデル整合性の仮定) である。このうち、(i)は経済学で通常導入される合理的行動の仮定を人々の予測行動に応用したものに過ぎないが、(ii)は、各個人が、経済構造の真の姿に関し、極めて多くの知識量を予め有することを仮定したものであり、個人の合理性を超える、非常に強い仮定であると考えられる³。

学習を導入した分析では、個々人は予めモデル整合的な期待を形成できる訳ではなく、経済データの観察を通じて経験的に習得した知識を用いて期待形成を行なうと捉え直している。その際、合理的期待は、経験的に習得する知識が真の経済構造の知識へと収束した時点で、初めて形成される期待形成であると捉えられる。つまり、学習を導入した分析の中では、合理的期待は「学習プロセスの均衡状態」で形成される期待であり、現実の経済で每期実現するものではないと考え直されている。

勿論、このように捉え直すことにより、経済のダイナミクスは合理的期待モデルのダイナミクスとは異なるものとなる。しかし、標準的な学習方法の場合、一定の条件が満たされる下で、学習に基づくモデルは合理的期待モデルへと時間を通じて収束する。学習に関する研究ではこの条件を「E-stability (expectational stability)」の条件と呼ぶが、最近の金融政策ルール分析では、この E-stability の条件が満たされるか否かは中央銀行の選択する金融政策ルールに依存すると指摘されている⁴。人々の期待が合理的期待へと収束することは経済安定性のための重要な必要条件であると考えられるため、最近の研究は E-stability を満たす金融政策ルールの具体

³ 例えば、構造モデルを用いて予測を行うエコノミストを想定すると、彼らは構造パラメータの真の値を予め知っている訳ではなく、観測データからモデル推計することにより初めてパラメータ推計値を得て、その推計値を基に予測を形成すると考えられる。このとき、モデルが推計誤差を含む可能性がある以上、その予測値が真の経済構造と整合的である保証は先験的には存在しない。勿論、モデルに期待要素が含まれなければ、一貫性 (consistency) を確保した推計手法を用いる限り、データの蓄積に伴って推計誤差は消滅するとの指摘もあろう。しかし、期待項を含むフォワードルッキング・モデルの場合には、(i)パラメータの推計誤差が人々の期待に影響し、(ii)その期待が実際の経済変動に影響を与え、(iii)実際の経済変動が次期のパラメータ推計値に影響を与える、という連鎖が生じるため、一貫性を満たした推計手法を用いても、推計誤差の問題は必ずしも解消しない。合理的期待は、推計誤差に纏わるこの種の問題が予め除去されているという意味で、各経済主体に関し、エコノミストが通常保有する情報量を上回る知識量を持つことを仮定している。本稿では、このような状況を指し、「人々が完全知識を持つ」と呼ぶこととする。

⁴ この点を初めて指摘したのは、Howitt[1992]である。ただし、この分析は本稿で考察対象とする標準的ニューケインジアン・モデルに基づいたものではない。

的な条件を検討し、望ましい金融政策のあり方を検討するものが多くなっている。

こうした状況を踏まえ、本稿では、学習 (learning) を導入した最近の金融政策ルール分析をサーベイし、「人々の知識が不完全で、学習を行って知識を習得するという想定の下では、中央銀行はどのような政策対応を心掛ける必要があるか」という観点から、理論的に導出される政策インプリケーションを取り纏めることとする。

本稿の構成は次の通り。2.では、経済主体の知識に関する状況設定と、学習方法の分類について概観した後、近年、多くの分析で用いられる「適応的学習 (adaptive learning)」を導入する場合の分析フレームワークについて解説を行う。3.では、ベンチマーク・ケースとして、完全知識を仮定した従来の金融政策ルール分析で導出された主要な結論を紹介する。4.では、民間主体の知識が不完全で、学習により得た知識を基に期待形成する場合の金融政策について解説する。5.では、中央銀行の知識が不完全で、学習により経済構造の知識を得ながら政策決定する場合の金融政策について解説する。6.では、民間主体と中央銀行の知識が共に不完全な場合の金融政策について解説する。最後に7.で、本稿で紹介した研究を集約し、不完全知識下で望ましい金融政策のあり方について政策インプリケーションを取り纏める。

2. 学習 (learning) の導入

本節では、不完全知識を導入した政策ルール分析で想定される状況設定の整理と、学習の導入方法についての解説を行う。2.1.では、中央銀行と民間主体の持つ知識と、学習の状況設定についての整理を行なう。2.2.では、学習方法の具体的な種類に関して解説する。2.3.では、適応的学習を導入した分析のフレームワークを紹介した上で、E-stability の概念について重点的に解説する。

2.1. 経済主体の知識に関する状況設定の整理

民間主体ないし中央銀行が学習 (learning) を行なうとしても、(i)どちらの主体が、(ii)何に関して学習を行なうのか、という点については、さまざまな状況が考えられる。以下では、これらの点について、想定される状況設定の整理を行なうこととする。まず、両主体の持つ知識の組み合わせの観点から整理すると、状況設定は以下の4ケースに区分される。

表1 . 民間主体と中央銀行の知識に関する状況設定のパターン

中銀 \ 民間	完全知識	不完全知識
完全知識	ケース1	ケース2
不完全知識	ケース3	ケース4

従来の分析では、民間主体と中央銀行は共に完全な知識を持つと仮定してきたた

め、上記マトリックスの中のケース1に主として焦点を当ててきたと言える。完全知識の仮定は、主として分析の単純化のために用いてきたものであるが、現実の政策との対応を考える上では、同仮定を持つ意味を十分に吟味することが重要である。そのためには、完全知識の仮定を緩め、民間主体ないし中央銀行の知識が不完全であるという状況を明示的に導入して分析を行なうことが有益である。これは、上記マトリックスで言えば、ケース1からケース4へと分析の方向性を移行させる必要があることを意味している。ただし、両主体が共に不完全知識である状況はモデル分析を非常に複雑化させる上、それを行なうと、各主体の持つ知識の不完全性の経済的意味合いがかえって曖昧になってしまうという問題を生じさせやすい。このため、多くの分析は、民間主体ないし中央銀行のどちらか一方のみに知識の不完全性を導入し（ケース2ないしケース3に相当）、ケース1との対比で、金融政策のインプリケーションがどのように異なるかを比較するものが多くなっている。

次に、民間主体ないし中央銀行が、経済構造のどの部分について学習を行なうかという観点から、学習の対象となる要素をリストアップすれば、以下の通りである。

表2．民間主体と中央銀行が学習の対象とする主要な対象

民間主体が学習する対象	中央銀行が学習する対象
<構造パラメータに関するもの> ・ 他の民間主体の選好・技術を表すパラメータ ・ 中央銀行の採る金融政策ルールのパラメータ、損失関数のパラメータ <観測不可能な変数に関するもの> ・ 潜在GDP、恒常所得 ・ (非公表の場合の) 中央銀行の目標インフレ率	<構造パラメータに関するもの> ・ 民間主体の選好・技術を表すパラメータ <観測不可能な変数に関するもの> ・ 潜在GDP、GDPギャップ、自然利子率

まず、両主体が学習する対象は、構造パラメータに関するものと、観測不可能な変数に関するものに分けられる⁵。構造パラメータとは、構造方程式の傾きを表すパラメータであり、典型的には、IS曲線やフィリップス曲線の傾きを指す。本稿で主として用いる標準的ニューケインジアン・モデルは、各民間主体の最適化行動から導かれており、構造パラメータは、民間主体の選好等を表すパラメータに対応する。各家計・各企業は、自分の持つパラメータは知っているが、他人の持つパラメータ

⁵ この他に、両主体が経済構造の関数形自体について不完全知識である状況も考えられるが、関数形の学習を本格的に扱った分析はこれまでのところ見当たらない。これは、関数形に関する学習過程を明示的にモデル分析の中で扱うことが困難なためである。ただし、分析によっては、人々が当初、経済構造の関数形について定式化の誤り(ミス・スペシフィケーション)を生じさせている状況を想定し、そのことが経済の安定性に与える影響を考察しているものも存在する(例えば、Sargent[1999])。もっとも、当初生じているミス・スペシフィケーションが、どのようなタイミングで、どのような速度で修正されるのか等は、今後検討すべき課題であると考えられる。

については正確な知識を持っていない可能性が高い。このため、各民間主体はマクロの構造パラメータについて先験的には知識を持たず、過去ないし現在のデータを観察することで、その値を学習していると想定される。また、中央銀行も、民間主体の選好等に関して正確な知識を持たないため、マクロの集計データを用い、IS 曲線やフィリップス曲線の傾きを推計することで、知識を習得すると想定される⁶。

その他に重要な構造パラメータとしては、中央銀行の採る金融政策ルールのパラメータが挙げられる。金融政策ルール分析では、中央銀行が GDP ギャップやインフレ率の変動に対して一定のルールに基づいた政策対応を行なうと想定され、政策ルール自体が経済構造の一つの重要な構成要素として扱われる。このとき、政策ルールのパラメータは重要な経済構造パラメータの一つとなるが、仮に中央銀行が政策ルール自体を公表していないのであれば、民間主体はそのパラメータを知るために、実際の中央銀行の行動を観察して学習を行なう必要がある⁷。

構造パラメータ以外の学習としては、観察不可能な変数に関する学習が挙げられる。観察不可能な変数の代表例は、潜在 GDP（ないし恒常所得）、GDP ギャップ、自然利子率などである。例えば、家計は現在の消費を決める上で、恒常所得を念頭に置くと仮定されるが、その値は観察できないため、何らかの形で推計をする必要がある。また、中央銀行は金融政策を決定する上で、GDP ギャップや自然利子率を参照すると仮定されるが、これらの値はいずれも直接観察することは出来ない。このような状況下では、両主体は、現在および過去のデータを用い、何らかの推計方法を用いることにより、これらの値を推計し、学習すると思われる。

なお、経済主体が直面する不確実性（uncertainty）の種類という観点から分類すると、構造パラメータを学習することは経済に乗法的な不確実性（multiplicative uncertainty）が存在することを、観察不可能な変数を推計することは経済に加法的な不確実性（additive uncertainty）が存在することを表している。乗法的な不確実性とは、外生的ショックが生じたとき、それが各内生変数にどの程度の影響を与え、各内生変数がどの程度の速さで元の均衡値へと収束するかについての不確実性（モデルのダイナミクスについての不確実性）がある状況を指す。これに対し、加法的な不確実性は、モデルの中に含まれる各変数自体の計測についての不確実性であり、モデルのダイナミクスについての不確実性ではない。加法的な不確実性（各変数の計測誤差）は、各方程式の攪乱項と本質的に同様の働きを持つ。すなわち、中央銀行ないし民間主体がある変数について正確な計測値を持たない場合、その変数に関する計測誤

⁶ 構造パラメータを知らない場合、中央銀行が実際に政策を動かすことにより、政策乗数の知識を習得する可能性も指摘出来る。このように、知識を得るために政策変数を変動させる学習方法を、「アクティブな学習（active learning）」と呼ぶ（Wieland[2000]）。しかし、中央銀行がアクティブな学習を目的として政策を変更することは国民の理解を得にくい側面があり、現実の中央銀行がそうした行動を採ることは極めて稀と思われる。このため、本稿では、中央銀行がアクティブな学習を行なうケースは考察の対象外とする。

⁷ 中央銀行が政策目標に向けた最適金融政策を実行しているならば、政策ルールのパラメータは中央銀行の政策目標を表す損失関数と結びつくため、民間主体が政策パラメータを学習することは、中央銀行が持つ損失関数のパラメータを学習していると考えられることも可能である。

差は、あたかも各方程式（IS 曲線やフィリップス曲線）に加わる外生的ショックの大きさを増大させるのと同じ効果を持つ。この状況は、従来の完全知識下の金融政策分析で用いてきた合理的期待モデルの中の攪乱項が増大したという状況を表しているため、本質的には、従来分析で用いてきたフレームワークで捉えることが可能である。しかし、人々（特に民間主体）が乗法的不確実性を持つ場合には、人々が想定するモデルのダイナミクスと、真のダイナミクスが乖離する可能性があるため、合理的期待モデルを用いることは出来ない⁸。この場合、従来の合理的期待モデルから離れて、「人々が認識する経済変動の仕方」と「真の経済の変動の仕方」を明示的に分離させたフレームワークを導入する必要がある。

近年の研究が集中的に分析を進めているのは、人々が構造パラメータについて不完全な知識しか持たず、経済のダイナミクスを合理的期待モデルで表すことが出来ないケースである。そのため、本稿の以下の部分では、構造パラメータについての学習を主として解説することとする⁹。

2.2. 学習方法の分類

前節で説明した通り、学習を導入した最近の金融政策分析の主眼は、「構造パラメータの学習」に置かれている。そこで、ここでは構造パラメータを学習する際に用いる学習方法の種類とその区分について解説する。

表 3 . 学習方法の種類

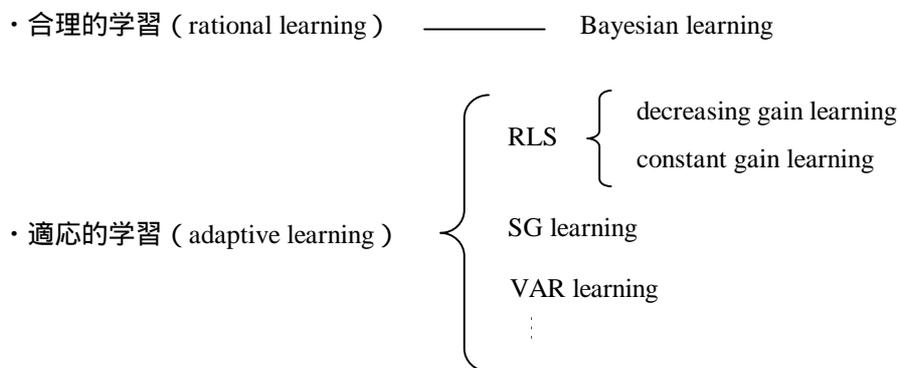


表 3 の通り、学習方法はまず、経済主体の合理性の観点から、「合理的学習

⁸ ニューケインジアン・モデルの中では、IS 曲線やフィリップス曲線の中に含まれる期待は民間主体の予測値であり、民間主体が構造パラメータについて不完全知識を持つ場合には、モデルは合理的期待モデルと乖離する。なお、民間主体は完全知識で、中央銀行のみが学習するケースでは、IS 曲線やフィリップス曲線に含まれる民間主体の期待は合理的期待であるため、中央銀行が自己の予測値 (internal forecast) を政策ルールに導入しない限り、従来の合理的期待モデルを適用することが可能である。しかし、中央銀行が政策ルールの中に、自己の予測値を導入する場合には、その予測値は合理的期待ではないため、合理的期待モデルを用いることは出来ない。

⁹ 観察不可能な変数の学習についての研究としては、例えば Orphanides and Williams[2003] (中央銀行による自然利子率の学習)、Lansing[2000] (中央銀行による潜在成長率の学習)、Bullard and Duffy[2003] (民間主体による潜在成長率の学習) 等が挙げられる。

(rational learning)」と「 適応的学習 (adaptive learning)」の 2 種類に分けられる。合理的学習とは、構造パラメータの推計誤差を每期最小化する学習方法であり、多くの場合、これはカルマン・フィルターなどベイジアンの手法を取るため、Bayesian learning とも呼ばれる。この学習方法が合理的である理由は、人々が、直近のデータをどの程度重視するか (gain) という点について每期最適化を行い、その最適化の結果算出されたウェイト (Kalman gain) を用いてパラメータの改訂を行うためである。したがって、合理的学習は経済主体の最適化行動に最も忠実であり、理論整合的な学習方法であると言える。しかし、その反面、非常に重い計算負荷を各主体に課しており、実際の人々の学習方法の描写としては懐疑的と考える研究者も多い。

このため、合理的学習と区別する形で、最近の研究の多くは「 適応的学習 (adaptive learning)」を導入している。適応的学習は、合理的学習とは異なり、人々が直近のデータをどの程度重視するのかという点について每期最適化を行なうのではなく、予め設定したシンプルなルールに従う、限定合理的 (bounded rational) な学習方法である。適応的学習の典型例は、RLS (Recursive Least Squares) と呼ばれる学習方法である。RLS とは、過去及び現在のデータを用いて、每期最小二乗法を行なって、パラメータをアップデートする手法である。最小二乗法はシンプルな手法であるものの、誤差項に関する一定の前提の下では一致性 (consistency) が満たされることや、パラメータ推定量の分散が小さいことなど、統計学的に望ましい性質を持つことが知られており、適応的学習を導入する際には、RLS を選択することが多い¹⁰。

ただし、最小二乗法といっても、直近のデータをどの程度重視するかという点については幾つかバリエーションが考えられる。最もオーソドックスなのは、利用可能な全てのデータについて均等にウェイト付けして最小二乗法推計するものである。この学習方法は、データ数が増えるにしたがって、直近のデータに対するウェイトを減少させるため、decreasing gain learning と呼ばれている。一方、直近のデータにより重い加重ウェイトを課した上で、最小二乗法推計を行なう方法も考えられる。この方法は、時間が経っても、直近のデータに関するウェイトを減衰させないため、constant gain learning と呼ばれている¹¹。一般論としては、望ましいウェイト付けに関して事前的情報を特に持たないのであれば、全期間のサンプル・データを一様に扱って学習する decreasing gain learning を用いることが通例である。しかし、真の経済構造パラメータが時間を通じて変化している可能性 (構造変化の可能性) を人々が念頭に置いているならば、より直近のデータに重きを置く方がリーズナブルであるため、constant gain learning を用いることが適切と考えられる。

¹⁰ RLS はカルマン・フィルターの特殊ケースとしても捉えることが可能であり、誤差項が正規分布に従い、系列相関がないという仮定の下では両者は一致する (Sargent[1999]参照)。その意味では、RLS は常に合理的学習と反する訳ではない。

¹¹ 例えば、データ・サンプルを 100 個持っていた場合、decreasing gain であれば、直近のデータに対するウェイトは 100 分の 1 であり、データ・サンプルが 150 個に増えれば、直近のデータへのウェイトは 150 分の 1 に低下する。一方、constant gain では、データ・サンプルが増えても直近のデータへのウェイトを変化させず、その結果、過去の情報を割り引いて考えることになる。

適応的学習の種類は、RLS の他にも存在する。例えば、SG learning (stochastic gradient learning) は、RLS よりもさらにシンプルな学習方法である。SG learning は、毎期のパラメータ推計に際して、パラメータの推計残差の分散に関する情報を活用せず、1 次のモーメントの情報のみを用いてパラメータ推計する方法である。つまり、RLS のように推計残差の分散を每期最小化するのではなく、前期のパラメータ推計に基づく今期の変数の予想値と、その変数の実現値との乖離幅を、一定のルールに基づいてパラメータのアップデートに充当するものである。仮に、人々がパラメータ推計に際して、最小二乗法よりも更にシンプルな学習方法を取っていると考えるならば、SG learning を用いることも一つの選択であると考えられる。

以上がパラメータの推計手法に関する学習のバリエーションである。なお、ここまでの議論では、人々がモデルの関数形を知っている下で学習を行なうと想定してきたが、実際には、人々がモデルの関数形を知らず、誘導形の方程式のパラメータを推計している可能性も考えられる。つまり、学習に用いる定式化の観点からすれば、学習方法は構造形の学習 (structural form learning) と誘導形の学習 (reduced form learning) の二つが考えられる。誘導形の学習としては、VAR モデルによる学習 (VAR learning) がその典型例として挙げられ、これを用いた研究も最近は増加している¹²。

以上、学習の種類について概観してきたが、最近の研究では、人々の学習方法は合理的学習が想定するよりもシンプルであると想定しており、適応的学習を導入したものが多くなっている。このため、次節では、適応的学習を用いた場合の人々の期待形成と、その場合の合理的期待均衡の安定性について解説することとする。

2.3. 適応的学習を導入する場合の分析フレームワーク

既に述べたように、人々が構造パラメータを学習する場合、「人々が認識する経済変動の仕方」と、「実際の経済変動の仕方」は必ずしも一致せず、人々の期待は合理的期待から乖離する可能性がある。このため、期待が合理的期待と一致するためには、学習を通じることにより、人々の知識が実際の経済変動と整合的となる必要がある。本節の目的は、人々の経済構造に関する認識が真の経済構造から乖離している場合の分析枠組を提示することと、適応的学習により経済が合理的期待均衡へと収束するための条件である、E-stability の概念を解説することにある。

以下では、2.3.1.において、分析のフレームワークを提示する。その際、人々の認識する経済変動の仕方と、実際の経済変動の仕方を、写像関数 (mapping function) によって関連付けたとき、合理的期待は、この写像関数の不動点 (fixed point) において初めて形成される期待であると捉えられることを説明する。2.3.2.では、適応的学習のアルゴリズムを紹介した上で、E-stability の概念と、E-stability が満たされるための具体的な条件を導出する方法について解説を行う。

¹² ただし、学習に用いる誘導形の方程式が、モデルの真の構造形の reduced form である場合は、構造形の学習と誘導形の学習に本質的な違いはない。しかし、誘導形が定式化の誤りを含む場合は、誘導形による学習が RLS により行われていても、合理的期待均衡へ収束する可能性は低い。

2.3.1. 人々の認識する経済変動 (PLM) と実際の経済変動 (ALM): 写像関数の不動点としての合理的期待均衡

本節では、人々の認識する経済変動が、真の経済構造に基づく経済変動と乖離する場合の分析枠組を提示する。なお、本節では説明の簡素化のため、経済構造の中でもインフレ率決定に焦点を当て、それ以外の経済構造は捨象して説明を進める(複数の内生変数を同時決定する一般均衡モデルの場合の解説は、補論参照)。

はじめに、現実の経済における真のインフレ率決定モデル(真の経済構造)が、以下の2式で表されるとしよう。

【真の経済構造】

$$p_t = a \cdot E_t p_{t+1} + b \cdot u_t \quad (1)$$

$$u_t = g \cdot u_{t-1} + e_t^u \quad (2)$$

[記号] p_t :インフレ率、 u_t :インフレ・ショック、 e_t^u :インフレ・ショックの確率的イノベーション、 a, b, g (真の) 経済構造パラメータ。

このモデルでは、今期のインフレ率 (p_t) が、1期先のインフレ率に関する人々の期待 ($E_t p_{t+1}$) と今期のインフレ・ショック (u_t) で決定され(1式)、インフレ・ショックがAR(1)過程に従う(2式)、インフレ・ショックのイノベーション (e_t^u) はリアルタイムで観察できず、その期待値はゼロ ($E_t e_{t+1}^u = 0$) である。

(1)、(2)式のパラメータ (a, b, g) は、全て真の構造パラメータを表す。完全知識を仮定した従来分析では、人々はこれらのパラメータを正しく知っているとして仮定していた。この状況における人々のインフレ期待 ($E_t p_{t+1}$) は合理的期待に他ならない。

ここで、(1)、(2)式で構成される経済の合理的期待均衡解の形状を考えよう。合理的期待均衡解とは、人々が合理的期待を形成している下での経済変動を、先決内生変数と外生ショックにより表したものである。ただし、ある構造モデルにおける合理的期待均衡解の形状は必ずしも一つとは限らず、複数存在する可能性もある。McCallum[1981]は、このような状況下では、複数の形状の中でも特に、説明変数の最も少ない形状を持つ解 (Minimum State Variables solution、MSV 解) に焦点を当てるべきであるとしており、多くの研究はこれに従い、MSV 解に焦点を当てている¹³。そこで、本稿でも合理的期待均衡解の形状のうち、MSV 解に絞って分析を進める。

(1)、(2)式の構造モデルのMSV 解は、具体的には以下の形状を取る。

【合理的期待均衡解 (MSV 解)】

$$p_t = \frac{a}{g} \cdot u_t = a \cdot u_{t-1} + \frac{a}{g} \cdot e_t^u \quad (3)$$

この合理的期待均衡解は、1期前のインフレ・ショックおよびインフレ・ショッ

¹³ MSV 解に的を絞ることにより、いわゆる「バブル解 (bubble solution)」は排除される。

クの当期のイノベーションにより表され、均衡解としては最もシンプルな形状である。ただし、パラメータ a は、モデルの構造パラメータ (a, b, g) に依存している。この値を求めるには、まず(3)式を 1 期進めて両辺の期待値を以下のように取る。

$$E_t p_{t+1} = a \cdot u_t \quad (4)$$

(3)、(4)式を(1)式に代入すると、 $g=1$ の場合、 a は以下の値を取る¹⁴。

$$a = b \cdot \underline{g} / (1 - a \cdot \underline{g}) \quad (5)$$

人々が完全知識の場合、彼らはモデルの関数形と構造パラメータ (a, b, g) を知っていたため、MSV 解の形状やパラメータ a についても完全な知識を持っていた。しかし、人々が構造パラメータを知らない場合、彼らは MSV 解の形状が(3)式で表されることは知っていても、パラメータ a がどのような値を取るかは知らない。このため、学習 (learning) を行なうことにより、このパラメータについての知識を習得することになる¹⁵。以下では、適応的学習のプロセスを解説する。

まず、人々が MSV 解のパラメータ a について先験的には正確な知識を持たず、 t 時点において、その推計値 \tilde{a}_{t-1} を持つとしよう。なお、添字が $t-1$ 期なのは、 $t-1$ 期までの情報を基にパラメータ推計を行なっているためである。このとき、人々が t 期の時点で認識する経済変動の仕方は、以下のように表される。

【人々が認識する経済変動の仕方 (PLM)】

$$p_t = \frac{\tilde{a}_{t-1}}{g} \cdot u_t = \tilde{a}_{t-1} \cdot u_{t-1} + \frac{\tilde{a}_{t-1}}{g} \cdot e^u_t \quad (6)$$

(6)式の経済変動の仕方は、真の経済変動を体現したものではなく、あくまでも人々が認識している経済変動を表したものである。適応的学習に関する研究では、このような、人々が認識している経済変動の仕方を「Perceived Law of Motion (PLM)」と呼んでいる。(6)式の PLM に基づけば、 t 期における $t+1$ 期のインフレ率に関する期待は、以下の式で表される。

$$E_t p_{t+1} = \tilde{a}_{t-1} \cdot u_t \quad (7)$$

この PLM に基づく期待は、人々が推計しているパラメータ \tilde{a}_{t-1} に依拠しており、それらのパラメータは必ずしも真のパラメータ a と一致していないため、人々の期

¹⁴ $g=1$ の場合、合理的期待均衡解は無数に存在する。

¹⁵ 人々は、構造パラメータ (a, b, g) の値そのものではなく、MSV 解を形成するパラメータ (a) を学習する。これは、前者の値を(1)、(2)式から推計するには、人々の期待 ($E_t p_{t+1}$) のデータを用いる必要があるが、その期待は構造パラメータの推計値に依存しており、利用出来ないことによる。本節のように MSV 解のパラメータを推計する場合を「MSV learning」と呼ぶが、本稿では特に断りがない限り、経済主体は MSV learning を行なうと仮定する。

待は合理的期待から乖離する可能性がある¹⁶。人々の期待が(7)式により決まるとすると、実際の経済変動は、真の経済構造である(1)、(2)式に、(7)式の期待を織り込んだ上で決定される。そこで、(2)、(7)式を(1)式に代入した上で、当期のインフレ率についての式に整理すると、実際の経済変動の仕方は以下のように導出される。

【実際の経済変動の仕方 (ALM)】

$$p_t = (\mathbf{a} \cdot \tilde{\mathbf{a}}_{t-1} + \mathbf{b}) \cdot u_t = (\mathbf{a} \cdot \tilde{\mathbf{a}}_{t-1} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{g} \cdot u_{t-1} + (\mathbf{a} \cdot \tilde{\mathbf{a}}_{t-1} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{e}^u_t \quad (8)$$

(8)式は、人々の実際の期待 (PLM に基づく期待) を織り込んだ上で規定される、実際の経済変動の仕方を表しており、適応的学習に関する研究ではこれを「Actual Law of Motion (ALM)」と呼ぶ。このように、人々が認識する構造パラメータが真の値と必ずしも一致していない場合、PLM と ALM という二つの経済変動の仕方が生じる。このとき問題なのは、PLM と ALM の間に、どのような相互関係があるかということである。(6)式の PLM と(8)式の ALM を見比べると、関数形は同じであるが、パラメータが異なる。この関係を、PLM から ALM への写像関数 (mapping function) として捉えると、その写像関数 ($T(\tilde{\mathbf{a}}_{t-1})$) は以下のように表せる。

【写像関数 (mapping function)】

$$T(\tilde{\mathbf{a}}_{t-1}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{g} \cdot \tilde{\mathbf{a}}_{t-1} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{g} \quad (9)$$

写像関数は、人々が t 期に認識する構造パラメータを、 t 期における実際の経済変動を規定する構造パラメータへ変換する役割を果たす。注意すべきは、写像関数により写像し尽くされた点、すなわち写像関数の不動点 (fixed point) が、合理的期待均衡でのパラメータに対応することである。これは、推計パラメータ $\tilde{\mathbf{a}}_{t-1}$ が時間に拘らず一定値を取るとすると、 $\mathbf{g} = 1$ の場合、(9)式の不動点 ($\tilde{\mathbf{a}}$) が以下の(10)式となり、これが(5)式のパラメータ \mathbf{a} と一致していることから確認出来る。

$$\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{g} / (1 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{g}) \quad (10)$$

ここから分かるように、合理的期待均衡とは、PLM と ALM が完全に一致した状態を表している。従来分析では、PLM と ALM という二つの経済変動の仕方を区別してこなかったが、その理由は、人々が完全知識である状況では、PLM と ALM のパラメータに相違が生じなかったためである。つまり、PLM と ALM という観点

¹⁶ (7)式と(4)式を比較して分かるように、適応的学習に基づく期待と合理的期待との相違は、予測形成に際して用いる構造パラメータが推計誤差を含む可能性があるか否かという点にあり、構造パラメータを所与とした下での予想形成アルゴリズムには本質的な相違はない。したがって、適応的学習に基づく期待は、学習方法に関しては限定合理的であるものの、パラメータを所与とした下での予測形成方法については合理性が確保されていると言え、この点、期待形成のアルゴ

から捉え直せば、合理的期待モデルとは結局のところ、「人々が認識する経済変動の仕方 (PLM)」と、「実際の経済変動の仕方 (ALM)」が常に一致していることを仮定した経済構造モデルであったとすることが出来る¹⁷。

2.3.2. 適応的学習に基づく期待と合理的期待均衡の安定性：E-stability

ここまでの議論では、PLM が写像関数を通じて ALM へと変換されることを説明した。しかし、これはあくまで PLM から ALM への一方向の因果関係を説明したに過ぎない。本稿が取り上げている学習 (learning) とは、実際の経済を観察することにより、経済変動の仕方に関する認識を形成するプロセスであるから、それは ALM から PLM へという、写像関数 $T(\tilde{a}_{t-1})$ とは逆方向の因果関係を表したものである。以下では、適応的学習による PLM (推計パラメータ \tilde{a}_{t-1}) の形成過程を説明する。

まず、適応的学習の中でも最も代表的な、RLS (逐次最小二乗法) のアルゴリズムを紹介する。いま、人々は経済変動が(6)式の PLM に基づいていると認識しているため、RLS の下では、過去のインフレ率の系列 ($p_i, i = 1, 2, \dots, t$) を、一つラグを置いたインフレ・ショックの系列 ($u_i, i = 1, 2, \dots, t$) で最小二乗回帰し、推計パラメータ \tilde{a}_t を得る。この推計過程は、SRA (Stochastic Recursive Algorithm) と呼ばれる、以下の明示的なパラメータ・アップデート・プロセスとして表現出来る。

【RLS のパラメータ・アップデート (SRA 表現)】

$$\tilde{a}_t = \tilde{a}_{t-1} + k_t \cdot R_t^{-1} \cdot u_{t-1} \cdot (p_t - \tilde{a}_{t-1} \cdot u_{t-1}) \quad (11)$$

$$R_t = R_{t-1} + k_t \cdot (u_{t-1}^2 - R_{t-1}) \quad (12)$$

なお、 R_t は、説明変数 u_t の 2 乗和に基づき、以下のように定義される変数である。

$$R_t = k_t \cdot \sum_{i=1}^t u_i^2 \quad (13)$$

(11)式は推計パラメータ \tilde{a}_t の変遷を表している。この式は、前期の推計パラメータ \tilde{a}_{t-1} を基点とし、インフレ率の予測誤差 ($p_t - E_{t-1} p_t = p_t - \tilde{a}_{t-1} \cdot u_{t-1}$) に応じて、直近のパラメータ推計値 \tilde{a}_t を改訂することを示している。なお、(11)式の右辺第 2 項の冒頭に表れるパラメータ k_t は直近のデータに対する重視度を表し、これを一般に gain と呼んでいる。gain は、インフレ率の予測誤差のうち、どの程度の割合をパラメータのアップデートに充当するかを規定するものであり、学習過程を特徴付けるパラメータである。適応的学習は、この gain を最適化問題 (optimal filtering problem) の結果として導くのではなく、予め設定したシンプルなルールに従うと仮定する。具体的には、以下のように gain を設定することが一般的である。

リズム自体が必ずしも合理的でない適応的期待 (adaptive expectation) と本質的に異なっている。
¹⁷ 合理的期待が「モデル整合的 (model consistent) な期待」と呼ばれるのはこのためである。

【decreasing gain learning における gain の設定】

$$k_t = t^{-1} \quad (14)$$

【constant gain learning における gain の設定】

$$k_t = k \quad (15)$$

(14)式の設定は、時間を通じて (t が大きくなるにつれて) gain の値が減衰するため、decreasing gain learning と呼ばれる。これに対し、(15)式の設定は、直近のデータに対するウェイトを一定に保つため、constant gain learning と呼ばれる。2.2.で説明した通り、両者は、直近のデータの持つ情報を、過去のデータと同程度に見積もるのか、それともより重く見積もるのか、という点で相違する。

RLS 以外の適応的学習として、しばしば用いられる SG learning (stochastic gradient learning) は、説明変数の 2 次のモーメントの情報 (R_t) を用いない、RLS よりもシンプルな学習方法である。SG learning のアルゴリズムは、具体的には以下の通り。

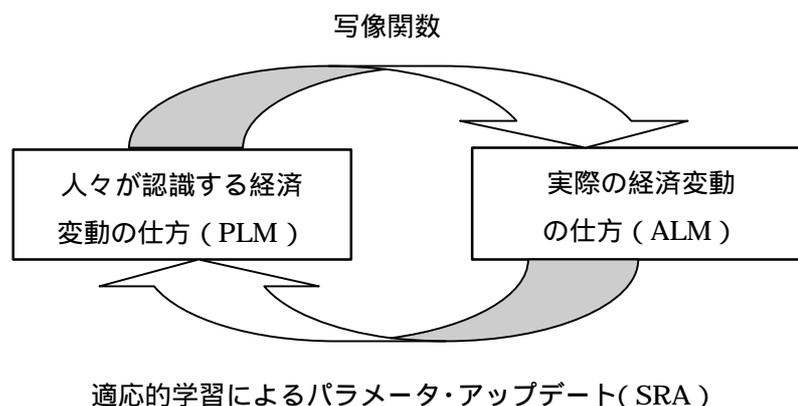
【SG learning のパラメータ・アップデート】

$$\tilde{a}_t = \tilde{a}_{t-1} + k_t \cdot u_{t-1} \cdot (p_t - \tilde{a}_{t-1} \cdot u_{t-1}) \quad (16)$$

以上のように、適応的学習には、幾つかバリエーションが存在する。しかし、多くの研究において、decreasing gain の RLS が主流であるため、本稿では、特に断りがない限り、decreasing gain の RLS ((11)、(12)、(14)式) に的を絞ることとする。

以上が適応的学習によるパラメータ・アップデート・プロセスの説明であるが、これまでに見た通り、適応的学習を通じることで、ALM により決定された各変数 (p, u_t) から、PLM を構成するパラメータの推計値 (\tilde{a}_t) を算出することが出来る。つまり、適応的学習によるパラメータ・アップデートは、ALM から PLM へという、写像関数とは反対方向の因果関係を規定する。したがって、写像関数 (PLM → ALM) と適応的学習によるアップデート (ALM → PLM) を組み合わせると、下図 1 のような、双方向のフィードバック関係が構築されることになる。

図 1 . PLM と ALM のフィードバック関係



PLM と ALM にこのようなフィードバック関係があることを前提とした場合、議論の焦点は、そのフィードバック関係を通じることにより、PLM と ALM の乖離が埋め合わされ、時間を通じて両者が収束していくのかという点である。PLM と ALM を繋ぐ写像関数の不動点が合理的期待均衡であるから、この問題は、適応的学習を通じて経済が合理的期待均衡へと収束するのかという問題と同一である。ただし、一般に、適応的学習を通じて経済が合理的期待均衡に収束するかどうかは、パラメータの初期値に依存する可能性がある。このため、まずは合理的期待均衡の近傍において、適応的学習を通じた安定化メカニズムが機能するかどうかをチェックするのが常套手段となっている。一般に、合理的期待均衡からわずかに期待が乖離したときに、それが元の合理的期待均衡に戻ることを、「E-stability (expectational stability)」と呼んでいる。以下では、この E-stability の確認方法を説明する。

Marcet and Sargent [1989]は、decreasing gain の RLS の場合、合理的期待均衡の E-stability を以下のようにして確認出来ることを明らかにしている¹⁸。初めに、合理的期待均衡 (a) の近傍における、PLM と ALM におけるパラメータ \tilde{a}_t の乖離幅の漸近値 (asymptotic mean) を関数 $h(\tilde{a})$ として定義する。

$$h(\tilde{a}) = \lim_{t \rightarrow \infty} E[T(\tilde{a}_t) - \tilde{a}_t] = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{g} - 1) \cdot \tilde{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{g} \quad (17)$$

(17)式は、合理的期待均衡の近傍におけるパラメータ \tilde{a} のダイナミクスを表している。合理的期待均衡が E-stability を持つことを確認するには、(17)式に対応して定義される(18)式の常微分方程式 (ordinary differential equation、ODE) が、パラメータの均衡値 (a) の近傍で局所的に安定であることを確認する必要がある。

$$\frac{da}{dt} = h(a) = E[T(a) - a] = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{g} - 1) \cdot a + \mathbf{b} \cdot \mathbf{g} \quad (18)$$

なお、(18)式の t は時間を表すが、これは t で表された時間の区切りよりも短い、微少な時間の長さを指している。 t を導入することにより、パラメータ a のダイナミクスを(18)式の ODE の形で連続的に表すことが出来る。Marcet and Sargent は、ODE がパラメータ a において局所的に安定である条件、すなわち合理的期待均衡解が E-stability を満たす条件が、以下により導かれることを明らかにしている。

$$\frac{dh(a)}{da} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{g} - 1 < 0 \quad (19)$$

(19)式が E-stability の条件となることは、以下の図 2 により視覚的に確認出来る。

¹⁸ ここで説明する E-stability の確認方法は、decreasing gain の RLS のケースである。constant gain や、SG learning の場合については、Evans and Honkapohja[2001]の Chapter3,6,7 等を参照。

図2 . 合理的期待均衡の E-stability

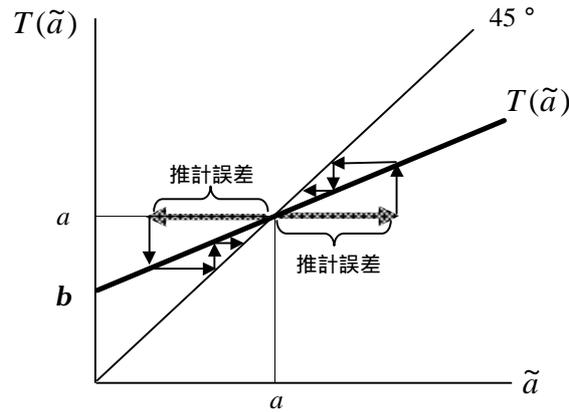


図2の太線は、(9)式の写像関数を表している。写像関数と45度線の交点は写像関数の不動点であり、これは合理的期待均衡でのパラメータ a に対応している。合理的期待均衡が E-stability を満たすことは、パラメータの推計値 \tilde{a} が、推計誤差により真の値 a から上方ないし下方に少し乖離したときに、写像関数を通じて \tilde{a} が a へと収束することを意味する。図2においては、写像関数の傾きが45度より小さいために、推計パラメータ \tilde{a} は a へと収束する。一方、写像関数の傾きが45度より大きければ、図3のように、パラメータの推計値が真の値から僅かに逸れただけで、推計値 \tilde{a} は真の値 a から乖離し続ける。

図3 . E-stability が満たされないケース

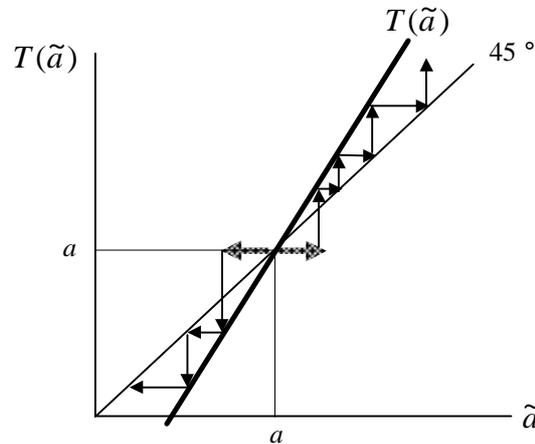


図2、3から明らかなように、このモデルでは、写像関数の傾きが45度より小さい場合に、推計パラメータ \tilde{a} は a へと収束する。(9)式より、写像関数の傾きは $a \cdot g$ だから、このモデルの E-stability の条件が(19)式に一致することは理解されよう。

以上のように、E-stability の条件は、人々が適応的学習を行なう下での合理的期待均衡の安定性を表している。したがって、仮にある合理的期待均衡が E-stability を満たさないならば、その均衡は微細なパラメータの推計誤差の存在に対して頑健でなく、現実の経済においてその均衡が存立する可能性は極めて乏しいと考えられ

る。このように、E-stability は、合理的期待均衡解の中で、どの均衡が現実の経済にとって relevant な均衡なのかを判別する基準としての役割を備えている。

もっとも、これまでの説明の通り、E-stability は、合理的期待均衡の近傍における、狭い範囲の中での安定性であるから、仮にそれが満たされているとしても、パラメータの初期値が真の値から大きく乖離している場合には、経済が適応的学習を通じて合理的期待均衡へと必ず収束するとは限らない。その意味で、E-stability は、適応的学習下での均衡の安定性 (learnability または stability under adaptive learning) の必要条件であると見る事が出来る。しかし、Evans and Honkapohja[2001]は、(i) 人々が decreasing gain、もしくは十分に小さい constant gain の RLS を用いた学習を行っており、(ii)パラメータの推計に用いる情報変数の数が有限である場合には、E-stability と learnability は一致すると述べており、この対応関係を「E-stability principle」と呼んでいる¹⁹、²⁰。本稿で紹介する事例のほとんどでは、(i)、(ii)の条件は共に満たされていると想定されるため、E-stability principle は満たされていると考えられる。このため、本稿で紹介する事例では、E-stability が満たされていれば、パラメータ推計の初期値に関わらず、経済は合理的期待均衡へと最終的に収束すると考える事が出来る。

以上、単純なインフレ率決定式を用いて、適応的学習のプロセスと E-stability の概念について解説した。このモデルでは、E-stability の条件が a と g という構造パラメータに依存することが分かったが、一般に、インフレ率決定式のパラメータ (a) は民間主体の行動パターンに依存し、外生ショックのパラメータ (g) はショックの性質に依存するから、これらのパラメータが E-stability を上手く満たしているという保証は、先験的には存在しない。しかし、インフレ率決定式だけではなく、より一般均衡的なフレームワークで捉えた場合には、中央銀行の金融政策が、E-stability を政策的に保証出来る可能性がある。つまり、中央銀行が金融政策ルールを適切に選択すれば、民間主体のパラメータや外生ショックの性質を所与とした上で、E-stability の条件を政策的に満たす事が出来る可能性がある。この点を考えると、標準的なマクロ構造モデルの中で、中央銀行が具体的にはどのような政策ルールを採用すれば、経済の E-stability を満たす事が出来るのかという点は興味深い論点であり、現実の政策のあり方を考える上でも、有益な政策インプリケーションをもたらす可能性があると考えられる。この点については、本稿の 4 節以降で重点的に解説を行なうこととする。

¹⁹ なお、RLS 以外の適応的学習方法を取る場合には、E-stability principle は必ずしも満たされない。この点、例えば Giannitsarou[2003]は、人々が SG learning を行なう場合には、E-stability は必ずしも learnability とは一致しないことを示している。

²⁰ なお、E-stability を満たす合理的期待均衡解が複数存在する場合に、どの均衡が実現するかは、推計パラメータの初期値に依存する (詳細は Evans and Honkapohja[2001]の Chapter 6 参照)。

3. 完全知識下の金融政策（ベンチマーク・ケース）

本節では、分析のベンチマーク・ケースとして、民間主体と中央銀行が経済構造に関して完全な知識を持つ場合の金融政策ルール分析について解説する。なお、予め明確にしておく、本節で言う「完全知識（perfect knowledge）」とは、経済主体が経済構造のパラメータについて、先験的に正確な知識を持っている状況を指す。この状況では、民間主体は常にモデル整合的な期待（合理的期待）を形成できる。また、中央銀行は、正確な構造パラメータの知識に基づいて、最適な政策ルールを算出することが可能である。つまり、この状況下では、両主体は構造パラメータの値を推計する必要がないため、パラメータの推計誤差に伴う諸問題が予め除去されている。本節での議論は、全てこの前提に立って行われるものである。

以下、3.1.では、本稿で考察対象とする標準的ニューケインジアン・モデルを紹介する。3.2.では、中央銀行がシンプルな政策ルールを採用する場合に、最低限満たさなければならない基準である均衡の一意性（uniqueness）について解説する。3.3.では、中央銀行が政策目標を効率的に実現するための最適金融政策ルールについて解説する。3.4.では、中央銀行が名目金利のゼロ制約に服す場合に、経済が「流動性の罠（liquidity trap）」の均衡に陥る可能性があることについて解説する。

3.1. 標準的ニューケインジアン・モデル

本稿では、以下の標準的ニューケインジアン・モデルを主たる分析対象とする²¹。

【標準的ニューケインジアン・モデル】

$$x_t = E_t x_{t+1} - s \cdot (\hat{i}_t - E_t \hat{p}_{t+1}) + g_t \quad (20)$$

$$\hat{p}_t = b \cdot E_t \hat{p}_{t+1} + k \cdot x_t + u_t \quad (21)$$

$$g_t = r^g \cdot g_{t-1} + e_t^g \quad (22)$$

$$u_t = r^u \cdot u_{t-1} + e_t^u \quad (23)$$

[記号] x_t :GDP ギャップ、 \hat{i}_t :名目金利（定常値 i^* からの乖離）、 \hat{p}_t :インフレ率（定常値 p^* からの乖離）、 g_t :需要ショック、 u_t :インフレ・ショック、 e_t^g :需要ショックのイノベーション、 e_t^u :インフレ・ショックのイノベーション、 s, b, k, r^g, r^u :（真の）経済構造パラメータ。

(20)式は民間主体の最適化行動（オイラー方程式）から導かれた IS 曲線であり、当期の GDP ギャップ（ x_t ）が、当期の実質金利（ $\hat{i}_t - E_t \hat{p}_{t+1}$ ）と来期の GDP ギャップの予測値（ $E_t x_{t+1}$ ）、需要ショック（ g_t ）により決定されることを表す。需要ショックとは、人々の選好の変化や政府支出（対自然産出量）の変化を表している。パラメータ s は、民間主体の異時点間代替の弾力性に対応しており、実質金利の変化

²¹ 標準的ニューケインジアン・モデルの詳細な解説は、Woodford[2003]や Clarida, Galí, and Gertler[1999]を参照。

に対して、今期の消費を来期の消費にどれだけ代替させるかを表している。

(21)式は価格粘着的な下での独占的競争企業の最適化行動から導かれたニューケインジアン・フィリップス曲線であり、当期のインフレ率(\hat{p}_t)が来期のインフレ率の予測値($E_t \hat{p}_{t+1}$)、当期のGDPギャップ(x_t)、当期のインフレ・ショック(u_t)により決定されることを表す。パラメータ b は企業の主観的割引率を表し、通常は1に近い値を取る。また、パラメータ k は、企業の価格粘着性の度合を表すパラメータであり、自由に価格改訂することが出来る企業の割合を規定している²²。

(22)、(23)式は需要ショック、インフレ・ショックの変動プロセスであり、どちらのショックもAR(1)プロセスに従うと仮定する。t期において、民間主体と中央銀行は需要ショック(g_t)、インフレ・ショック(u_t)を観察出来るが、ショックのイノベーション(e_p, e_u)は観察出来ないと仮定する。なお、このモデルは経済の均衡近傍でのダイナミクスを表したものであるため、インフレ率(\hat{p}_t)と名目金利(\hat{i}_t)は、インフレ率と名目金利の絶対水準(p_t, i_t)の、定常状態(p^*, i^*)からの乖離幅として定義され、均衡ではこれらは全てゼロの値を取る²³。

経済構造は、(20)~(23)式に、金融政策ルール(名目金利 \hat{i}_t の決定式)を加えることにより完成する。本節の議論では、人々は構造パラメータ(s, b, k, r^e, r^u)について完全な知識を持っているため、(20)、(21)式の中に含まれる期待項($E_t x_{t+1}$ 、 $E_t \hat{p}_{t+1}$)は、民間主体の合理的期待を表している。

3.2. シンプル・ルールと均衡の一意性

金融政策ルール分析では、中央銀行の採る金融政策のパターン自体も、経済構造の一部を構成する。中央銀行の政策パターンを、GDPギャップとインフレ率に対する簡単なフィードバック・ルールで表したものがシンプル・ルールであり、そのうち最も代表的な例は、以下の式で表されるテイラー・ルールである。

【テイラー・ルール】

$$\hat{i}_t = \hat{r}_t^n + f_p \cdot \hat{p}_t + f_x \cdot x_t, \quad \hat{r}_t^n \equiv s^{-1} \cdot g_t \quad (24)$$

[記号] \hat{r}_t^n :自然利子率(定常値 r^* からの乖離)、 f_p, f_x :政策ルールの反応度。

上式の第一項は、需要ショックの線形関数として表される自然利子率(\hat{r}_t^n)の変動を表している。(20)~(23)式のモデルでは、需要ショックが生じた場合、GDP

²² (20)、(21)式のIS曲線とフィリップス曲線はミクロの最適化条件から導いたものであり、構造パラメータ(s, b, k)は民間主体のディープ・パラメータに対応する。したがって、中央銀行が政策ルールを変更しても、これらのパラメータは変化しない(いわゆる「ルーカス批判(Lucas critique)」を回避しうる)と考えることが出来る。

²³ インフレ率の均衡値(p^*)は、中央銀行の目標インフレ率である。また、名目金利の均衡値(i^*)は、中央銀行の目標インフレ率に、均衡実質金利(r^*)を加えた値である。なお、GDPギャップの定常値はゼロであり、定常値からの乖離幅はその絶対水準に等しい。

ギャップの安定とインフレ率の安定の間にトレード・オフが生じないため、中央銀行は需要ショックをオフセットすることにより、経済変動を完全に安定化出来る。自然利子率とは、「価格粘着性が存在しなければ実現しているであろう実質利子率の水準」として一般に定義されるが、(20)～(23)式のような均衡近傍のニューケインジアン・モデルにおいては特に、需要ショックの変動を除去するために必要な実質利子率の変動として捉えることが可能である²⁴。したがって、中央銀行がシンプル・ルールを設定する場合、特に理由がない限り、自然利子率の分だけ自動的に名目金利を変動させることがリーズナブルと考えられる。

テイラー・ルールを導入する場合、経済構造は(20)～(24)式のモデルで構成される。民間主体は完全知識なので、(20)、(21)式の民間主体の期待 ($E_t x_{t+1}$ 、 $E_t \hat{p}_{t+1}$) は合理的期待であるが、このとき問題なのは、このモデルの合理的期待均衡が一意性 (uniqueness) を持つかどうかという点である。合理的期待均衡が一意である場合、経済が最終的に到着する定常状態は唯一に定まっているため、到達経路の如何に関わらず、経済は最終的には安定化する。しかし、均衡が一意でない場合、経済のファンダメンタルズとは無関係に、人々の期待次第で、どの均衡が実現するかが決定される。この場合には、複数の均衡間で自己実現的な変動が生じる可能性があり、その場合、経済は極めて不安定な状態となる。上記ニューケインジアン・モデルでは、均衡の一意性が保たれる場合には、定常状態のインフレ率は中央銀行の目標インフレ率に等しいと想定されるが、均衡が一意でない場合、民間主体の自己実現的な期待により、他のインフレ率が均衡で実現してしまう可能性がある。したがって、中央銀行はまず、このような状況を回避しなければならないと考えられる。

これまでの研究により、(20)～(24)式のモデルにおいて、合理的期待均衡が一意性を持つ条件は、以下の式で表されることが確認されている²⁵。

$$f_p + \frac{1-b}{k} f_x > 1 \quad (25)$$

(25)式は、一般に「テイラー・プリンシプル」と呼ばれており、インフレ率の恒常的な1%の上昇に対して、中央銀行が名目金利を1%以上引き上げることを意味している²⁶。この条件が満たされれば、以下(26)、(27)式の合理的期待均衡 (MSV 解) が一意に存在し、経済は最終的には安定的な定常状態へと収束する²⁷。

$$\hat{p}_t = a \cdot u_t \quad (26)$$

$$x_t = b \cdot u_t \quad (27)$$

²⁴ 自然利子率の絶対水準 r_t^n は、自然産出量の成長率に規定される均衡実質金利 (r^*) と、需要ショック成分 \hat{p}_t^n の和として決定される。自然利子率の概念は、小田・村永[2003]を参照。

²⁵ Woodford[2001]参照。

²⁶ Taylor[1999]参照。

²⁷ $a = (1-r^u + s \cdot f_x) / ((1-b \cdot r^u) \cdot (1-r^u + s \cdot f_x) - (r^u - f_p) \cdot s \cdot k)$ 、 $b = s \cdot (r^u - f_p) / ((1-b \cdot r^u) \cdot (1-r^u + s \cdot f_x) - (r^u - f_p) \cdot s \cdot k)$ 。

テイラー・プリンシプルが均衡の一意性をもたらす直観的理由は、民間主体のインフレ期待が経済のファンダメンタルズとは無関係に、自己実現的な形で上昇した場合、名目金利がそれを元の均衡へと押し戻すように機能するからである。(20)～(24)式のモデルはフォワードルッキング・モデルだから、人々は名目金利に安定化機能があることを事前に知っているため、この機能が存在すること自体により期待が安定し、経済が安定する。したがって、(24)式のようなテイラー・ルールを採用する場合、中央銀行はテイラー・プリンシプルを満たす必要があると考えられる。

ただし、テイラー・プリンシプルが均衡の一意性の必要十分条件となるのは、シンプル・ルールが(24)式のテイラー・ルールの形状の場合であり、その他のルールでは、テイラー・プリンシプル以外の追加的条件が求められる可能性がある点には留意が必要である。特に、政策ルールが以下の(28)式のように、人々の期待に基づくものであったとしよう。

$$\hat{i}_t = \hat{r}_t^n + \mathbf{f}_p \cdot E_t \hat{p}_{t+1} + \mathbf{f}_x \cdot E_t x_{t+1} \quad (28)$$

Bullard and Mitra [2002]により、この政策ルールの場合、均衡の一意性の条件は(25)式に、(29)、(30)式を加えたものとなることが明らかにされている。

$$\mathbf{f}_p + \frac{1-b}{k} \mathbf{f}_x > 1 \quad \text{再掲(25)}$$

$$\mathbf{f}_x < \mathbf{s}^{-1} \cdot (1 + \mathbf{b}^{-1}) \quad (29)$$

$$\mathbf{k} \cdot (\mathbf{f}_p - 1) + (1 + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{f}_x < 2\mathbf{s}^{-1} \cdot (1 + \mathbf{b}) \quad (30)$$

(29)、(30)式は、中央銀行がGDPギャップとインフレ率の反応度をある上限以下に抑制することを求めている。したがって、この場合、中央銀行はテイラー・プリンシプルを満たす程度に大き目の政策反応をしつつも、一定の上限以下にそれらを抑える必要があり、窮屈な政策運営を行なう必要が生じる²⁸。

このように、テイラー・プリンシプルが均衡の一意性の必要十分条件となるか否かは、検討する政策ルールの形状に依存する。しかし、ほとんどのシンプル・ルールにおいて、テイラー・プリンシプルは少なくとも均衡の一意性の必要条件であることが明らかにされており、このため、中央銀行がシンプル・ルールを採用するならば、最低限、テイラー・プリンシプルを満たすことが必要と考えられる。

3.3. 最適金融政策：裁量解と公約解

政策ルールがテイラー・プリンシプルを満たすとしても、それは均衡の一意性を保証するだけであり、均衡へと至るまでの移行経路 (transition path) の望ましさを

²⁸ この点を初めに指摘したのは、Bernanke and Woodford[1997]である。ただし、仮に条件がタイトとなっても、中央銀行の知識が完全ならば、(25),(29),(30)の条件式を正確に知っているから、それらを上手く満たすように、パラメータを設定すれば良いとも考えられる。より深刻なのは、中央銀行が構造パラメータを正確に知らないケースであるが、この点は5.2節で後述する。

保証したものではない。テイラー・プリンシプルを満たすルールは無数に考えられるが、中央銀行が短期的にも経済の安定化を図ろうとすれば、それらのルールの中でも経済の安定性を最も効率的に達成する政策ルールを検討しなければならない。

経済の安定性を最大限に確保するということは、インフレ率と GDP ギャップの分散の加重平均の割引現在価値の総和で表される下記の損失関数 (loss function) を最小化するように政策運営するということでモデル化出来る²⁹。

【中央銀行の損失関数 (loss function)】

$$W_t = E_t \sum_{j=0}^{\infty} b^j [\hat{p}_{t+j}^2 + a \cdot x_{t+j}^2] \quad (31)$$

3.2.では中央銀行がシンプル・ルールを採用すると想定したが、シンプル・ルールは損失関数を必ずしも最小化するものではない。(31)式の損失関数を前提にした場合、中央銀行は(20)~(23)式の経済構造を前提として、(31)式を出来る限り小さくするような、最適金融政策を実行する必要がある。

最適金融政策には、2種類の考え方が存在する。一つは、「裁量型」の最適金融政策である。裁量型の金融政策とは、民間主体の持つ期待を所与とした上で、損失関数を最小化する政策である。具体的には、中央銀行が(20)式、(21)式の中の民間期待 ($E_t x_{t+1}$ 、 $E_t \hat{p}_{t+1}$) をあたかも外生変数のように見なした上で、(31)式の損失関数を最小化するように、動学的最適化問題を解くことによって求められる。このときの最適性条件 (optimality condition) を一般に「裁量解 (discretionary condition)」と呼び、具体的には以下の(32)式のように導かれる。

【裁量解 (discretionary solution)】

$$k \cdot \hat{p}_t + a \cdot x_t = 0 \quad (32)$$

上式が示しているように、裁量解は、中央銀行が、インフレ率の安定と GDP ギャップの安定の間に存在するトレード・オフ関係に対して、どのような政策対応を採るべきかを規定している。つまり、インフレ率が定常値から 1% 上昇した場合に、中央銀行が GDP ギャップを $-(ka)\%$ 低下させることにより、損失関数を最小化出来ることを示している。ただし、この裁量解は当期のインフレ率と GDP ギャップの関係のみを表しており、当期以外の変数に依存していない。これが、裁量解の特徴である。なお、(32)式の最適化条件の下で、合理的期待均衡解 (MSV 解) は以下の形状を取る³⁰。

$$\hat{p}_t = c \cdot u_t \quad (33)$$

²⁹ パラメータ a は中央銀行の GDP ギャップ相対的重視度。ただし、(31)式の損失関数は、民間主体の効用の近似としても導くことが出来、その場合には、 a は経済構造のパラメータに依存する。

³⁰ $c = 1/(1 - b \cdot r^u + k^2/a)$ 、 $d = (-ka)/(1 - b \cdot r^u + k^2/a)$ 。

$$x_t = d \cdot u_t \quad (34)$$

裁量解とは別の考え方として、中央銀行が将来の政策について何らかのコミットメントを事前に行なうという考え方が存在する。この考え方に基づく最適金融政策は、「公約型」の最適金融政策と呼ばれている。公約型の最適金融政策では、中央銀行は経済構造(20)~(23)式を前提とし、(31)式の損失関数を直接に最小化するように、ラグランジュ乗数法を解くことによって導出出来る。このための最適性条件は以下の(35)式で表され、これを一般に「公約解(commitment solution)」と呼ぶ。

【公約解(commitment solution)】

$$\mathbf{k} \cdot \hat{p}_t + \mathbf{a} \cdot (x_t - x_{t-1}) = 0 \quad (35)$$

公約解は、裁量解とは異なり、当期の変数のみではなく、前期のGDPギャップにも依存する。このように、公約解は過去の経済変数に依存するため、「歴史依存的(history dependent)」な政策と呼ばれる。政策のコミットメントが可能な場合に、最適な政策が歴史依存的となるのは、それが人々の期待を適切にコントロールすることを可能とするためである。つまり、中央銀行が現在の政策を過去の経済と結びつける状況では、民間主体は将来変数への期待を現在の経済にリンクさせて形成する。このとき、中央銀行が適切に現在の変数(GDPギャップとインフレ率)を操作することにより、民間の期待を誘導することが可能であり、その誘導の結果、民間期待を所与としていた裁量解のケースよりも、政策パフォーマンスが向上する。

公約解(35)式の下では、経済は以下の合理的期待均衡解(MSV解)をとる³¹。

$$\hat{p}_t = e^x \cdot x_{t-1} + e^u \cdot u_t \quad (36)$$

$$x_t = f^x \cdot x_{t-1} + f^u \cdot u_t \quad (37)$$

以上が最適金融政策の二つの解の説明であるが、ここで注意すべきは、(32)、(35)式が示しているのは、金融政策ルールが満たすべき条件式であり、具体的な政策ルールの形状ではないということである。中央銀行が実際にコントロールするのは名目金利であるから、中央銀行が採るべき金融政策を考える上では、(32)、(35)式を満たす具体的な政策ルールの形状を検討する必要がある。

一般に、裁量解、公約解を満たす政策ルールは複数存在する。まず、裁量解については、以下の二つの政策ルールはともに(32)式の条件を満たしている。

【外生ショックに基づく最適裁量ルール】³²

$$\hat{i}_t = \hat{r}_t + \mathbf{j}_u \cdot u_t \quad (38)$$

³¹ パラメータ e^x, e^u, f^x, f^u は、以下の4式を満たす値を取る。

$e^x = (\mathbf{b} e^x + \mathbf{k}) \cdot f^x, (1 - \mathbf{b} \mathbf{r}^u) \cdot e^u - 1 = (\mathbf{b} e^u + \mathbf{k}) \cdot f^u, \mathbf{k} e^x + \mathbf{a} \cdot (f^x - 1) = 0, \mathbf{k} e^u + \mathbf{a} \cdot f^u = 0.$

³² $\mathbf{j}_u = ((1 - \mathbf{r}^u) \cdot \mathbf{k} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}^u \cdot \mathbf{s}) / (\mathbf{s} \cdot (\mathbf{a} \cdot (1 - \mathbf{b} \mathbf{r}^u) + \mathbf{k})).$

【民間期待に基づく最適裁量ルール】³³

$$\hat{i}_t = \hat{r}^n_t + \mathbf{d}_p \cdot E_t \hat{p}_{t+1} + \mathbf{d}_x \cdot E_t x_{t+1} + \mathbf{d}_u \cdot u_t \quad (39)$$

公約解についても、以下の二つの政策ルールはともに(35)式の条件を満たす。

【外生ショックに基づく最適公約ルール】³⁴

$$\hat{i}_t = \hat{r}^n_t + \mathbf{c}_L \cdot x_{t-1} + \mathbf{c}_u \cdot u_t \quad (40)$$

【民間期待に基づく最適公約ルール】³⁵

$$\hat{i}_t = \hat{r}^n_t + \mathbf{q}_L \cdot x_{t-1} + \mathbf{q}_p \cdot E_t \hat{p}_{t+1} + \mathbf{q}_x \cdot E_t x_{t+1} + \mathbf{q}_u \cdot u_t \quad (41)$$

このように、裁量解・公約解のどちらについても、最適性条件を満たす政策ルールは複数存在している。これらの政策ルールが、民間主体が学習する下でどのようなパフォーマンスを示すかという点については、後述の 4.2. で解説を行なう。

3.4. 「流動性の罠」の均衡

3.2.節では、中央銀行は均衡の一意性を満たすため、最低限、テイラー・プリンシプルを満たす必要があることを述べた。ただし、3.2.節で前提としたモデルは均衡近傍の局所的経済変動 (local dynamics) を表したものであり、そこでは名目金利の設定に特に制約がないことが仮定されていた。しかし、近年の日本経済で見られるように、名目金利がゼロ%まで低下した後では、中央銀行は名目金利をそれ以下に誘導できない。現実の経済を考える上では、中央銀行がゼロ金利制約に直面し、経済が「流動性の罠 (liquidity trap)」に陥る可能性も念頭に置く必要がある。

Benhabib et al.[2001]は、均衡近傍だけでなく、より広域にわたる経済変動 (global dynamics) を考慮すると、流動性の罠が経済の均衡状態として実現する可能性があることを指摘している。彼らの主張の興味深い点は、中央銀行が、目標とするインフレ率の近傍で仮にテイラー・プリンシプルを満たした政策運営を行っていても、経済が流動性の罠に陥る可能性があることを指摘していることである。

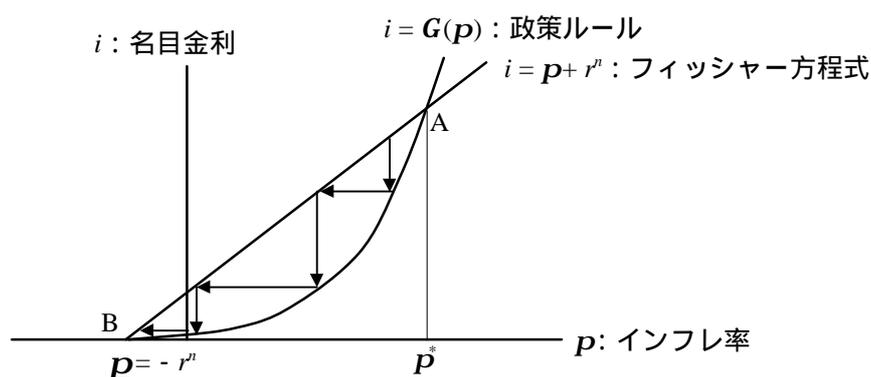
彼らの議論の要点は以下の通り。まず、中央銀行が、インフレ率に関するフィードバック型ルール ($i_t = G(p)$) を取っているとす。経済の均衡ではフィッシャー方程式 ($i_t = p + r^u_t$) が成立するため、政策ルールとフィッシャー方程式は、中央銀行の目標インフレ率の値 (p^*) で交差する。なお、政策ルールは、目標インフレ率の近傍で、テイラー・プリンシプルを満たしている。これは、以下の図4でA点近傍での関数Gの傾きがフィッシャー方程式の傾きより急であることに対応している。

³³ $\mathbf{d}_p = 1 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{b}(\mathbf{s} \cdot (\mathbf{k} + \mathbf{a}))$, $\mathbf{d}_x = \mathbf{s}^{-1}$, $\mathbf{d}_u = \mathbf{k}(\mathbf{s} \cdot (\mathbf{k} + \mathbf{a}))$ 。

³⁴ $\mathbf{c}_L = ((f^x - 1)/\sigma + e^x) \cdot f^x$, $\mathbf{c}_u = ((f^x + \mathbf{r}^u - 1)/\sigma + e^x) \cdot f^u + e^u \cdot \mathbf{r}^u$ 。

³⁵ $\mathbf{q}_L = -\mathbf{a}(\mathbf{s} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{k}))$, $\mathbf{q}_p = 1 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{b}(\mathbf{s} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{k}))$, $\mathbf{q}_x = \mathbf{s}^{-1}$, $\mathbf{q}_u = \mathbf{k}(\mathbf{s} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{k}))$ 。

図4 .「流動性の罨」の均衡の存在



しかし、ゼロ金利制約が存在するため、名目金利が低水準の場合、政策ルールはテイラー・プリンシプルを満たせない。特に、名目金利が既にゼロ%の場合、名目金利のインフレ率反応度はゼロとなる。このとき、政策ルールとフィッシャー方程式の交点は、A点だけではなくB点も存在する。このB点が、Benhabib et al.の指摘する「流動性の罨」の均衡である³⁶。Benhabib et al.は更に、この流動性の罨が、global dynamics の中での安定性を満たしていることを示している。これは、図4の中の矢印が、点B周辺で安定的な動学経路を持っていることから確認出来る。

このように、名目金利のゼロ制約がある下では、中央銀行が目標インフレ率近傍でテイラー・プリンシプルを満たすと、もう一つ別の均衡（流動性の罨の均衡）が生じ、そしてその均衡は、global dynamics の中で安定的なダイナミクスを持つ。3.2.では、テイラー・プリンシプルが均衡の一意性にとって重要であることを述べたが、同プリンシプルは、global dynamics の中では流動性の罨の均衡を生み、しかも安定性の点からすれば、その均衡が実現する可能性が高いという問題を生じさせる。

以上のように、Benhabib et al.の指摘は、テイラー・プリンシプルを満たすことの是非に関し、local dynamics に焦点を当てた他の政策ルール分析の主張と相反している。もっとも、実際の経済において、Benhabib et al.の意味での流動性の罨の均衡が実現する可能性については、見解が分かれるものと思われる。その理由の一つは、Benhabib et al.の議論は人々の完全知識を仮定した、合理的期待モデルに基づいている点にある。つまり、中央銀行の政策ルール ($i_t = G(p)$) は、図4のような非線形ルールだが、人々はその非線形な傾きを正確に知っていることが前提とされている。もし、人々が政策ルールの形状も含めて、構造パラメータの値を不完全にしか知らないとすると、実際の経済がこの流動性の罨の均衡に陥る可能性が高いかどうかは必ずしも自明でない。この点は、学習を導入した分析の中で再検討する必要があるが、それについては4.3.で後述する。なお、本稿のそれ以外の節では、global dynamics の議論はひとまず棚上げし、均衡近傍のダイナミクスのみを焦点を当てて議論を進めることとする。

³⁶ B点では、自然利子率と同じだけのデフレ ($p = -r^n$) が生じる。

4. 民間主体の知識が不完全な場合の金融政策

本節では、民間主体が構造パラメータについて不完全知識を持ち、学習を行う場合（2.1.の表1のケース2）の金融政策について解説する。2.3.1.で詳しく説明したように、民間主体が構造パラメータを学習する下では、民間主体が認識する経済変動の仕方（PLM）と、実際の経済変動の仕方（ALM）が乖離する可能性がある。この場合、民間主体の持つ期待は合理的期待ではないため、分析に際し合理的期待モデルを用いることは出来ない。したがって、PLMとALMを明示的に分離したフレームワークの中で、学習に基づく期待を合理的期待に置き換える形で分析を行う必要がある。

本節では、標準的ニューケインジアン・モデルの中で、IS曲線やフィリップス曲線の中に含まれる民間主体の期待が、学習を通じて得た構造パラメータの推計値に基づいて形成される状況を想定する。中央銀行は、そのことを踏まえ、まず民間主体の期待を合理的期待へと収束させるようにすなわち E-stability を確保するように、金融政策ルールを選択する必要がある。そのため、4.1.では、E-stability を確保するための、シンプル・ルールの具体的な条件について解説する。ただし、E-stability を確保したとしても、それに加えて中央銀行は損失関数を出来るだけ小さくするように努める必要がある。このため、4.2.では、民間主体が学習を行う下での最適金融政策について検討する。また、3.3.では流動性の罍の均衡に陥る可能性を説明したが、その分析は人々が完全知識で、合理的期待を形成するという前提で導かれたものであった。4.3.では、この点、人々が学習により期待形成すると想定し直した上で、経済が流動性の罍に陥る可能性について再度検討する。

4.1. シンプル・ルールと E-stability

3.2.では、中央銀行がシンプル・ルールを採用する場合には、合理的期待均衡の一意性を満たすために、最低限、テイラー・プリンシプルを満たす必要があることを説明した。しかし、民間主体の持つ構造パラメータの知識が不完全な場合には、金融政策は均衡の一意性を満たすだけでなく、学習による期待を合理的期待へと収束させる条件、すなわち E-stability を満たす必要がある。

Bullard and Mitra[2002]は、標準的ニューケインジアン・モデルを用い、この点を検討している。具体的には、以下の(42)、(43)式および(22)～(24)式の経済構造を前提とした場合に、テイラー・ルールのパラメータ(f_x, f_p)がどのような条件を満たせば、合理的期待均衡の E-stability が確保されるかを検討している³⁷。

³⁷ Preston [2003a]は、適応的学習の下では、今期の消費は(42)式のように一期先の消費への期待（one-period ahead forecast）のみに依存するのではなく、将来にわたる消費の流列への期待（long-horizon forecast）に依存することを示している。また、Preston[2003b]は、IS式を後者の定式化に修正すると、政策ルールの形状次第で、前者の定式化とは異なる E-stability 条件が導かれることを示している。Preston の議論に対し、Evans et al.[2002]は、二つの定式化は必ずしも背反したのではなく、幾つかの plausible な仮定の下では、one-period ahead forecast に基づく IS 曲

$$x_t = E_t^P x_{t+1} - \mathbf{s} \cdot (\hat{i}_t - E_t^P \hat{\mathbf{p}}_{t+1}) + g_t \quad (42)$$

$$\hat{\mathbf{p}}_t = \mathbf{b} \cdot E_t^P \hat{\mathbf{p}}_{t+1} + \mathbf{k} \cdot x_t + u_t \quad (43)$$

$$g_t = \mathbf{r}^g \cdot g_{t-1} + \mathbf{e}_t^g \quad \text{再掲(22)}$$

$$u_t = \mathbf{r}^u \cdot u_{t-1} + \mathbf{e}_t^u \quad \text{再掲(23)}$$

$$\hat{i}_t = \hat{r}_t^n + \mathbf{f}_p \cdot \hat{\mathbf{p}}_t + \mathbf{f}_x \cdot x_t, \quad \hat{r}_t^n \equiv \mathbf{s}^{-1} \cdot g_t \quad \text{再掲(24)}$$

なお、(42)、(43)式中の民間主体の期待は合理的期待ではなく、民間主体が学習に基づいて得た知識を基に形成した実際の期待であり、これを E_t^P として表記する。

テイラー・ルールを導入した場合、合理的期待均衡は以下の2式で表される。

$$\hat{\mathbf{p}}_t = a \cdot u_t \quad \text{再掲(26)}$$

$$x_t = b \cdot u_t \quad \text{再掲(27)}$$

パラメータ a 、 b は IS 曲線のパラメータ (s)、フィリップス曲線のパラメータ (k) およびテイラー・ルールの政策反応度 (f_x, f_p) に依存している。民間主体は、これらの構造パラメータを正確に知らないため、 a 、 b の真の値を知らない。このとき、民間主体の認識する経済変動の仕方 (PLM) は、以下の2式で表される³⁸。

$$\hat{\mathbf{p}}_t = \tilde{a}_{t-1}^1 + \tilde{a}_{t-1}^2 \cdot u_t \quad (44)$$

$$x_t = \tilde{b}_{t-1}^1 + \tilde{b}_{t-1}^2 \cdot u_t \quad (45)$$

人々は(44)、(45)式の PLM を基に期待を形成しており、それらは以下で表される。

$$E_t^P \hat{\mathbf{p}}_{t+1} = \tilde{a}_{t-1}^1 + \tilde{a}_{t-1}^2 \cdot \mathbf{r}^u \cdot u_t \quad (46)$$

$$E_t^P x_{t+1} = \tilde{b}_{t-1}^1 + \tilde{b}_{t-1}^2 \cdot \mathbf{r}^u \cdot u_t \quad (47)$$

この期待値を(42)、(43)式および(22)～(24)式で構成される経済構造の中に導入した上で、インフレ率と GDP ギャップを外生ショック u_t の式として整理すると、実際の経済変動の仕方 (ALM) は以下の2式として導出される。

$$\hat{\mathbf{p}}_t = \frac{(b + bsf_x + ks) \cdot \tilde{a}_{t-1}^1 + k \tilde{b}_{t-1}^1}{1 + sf_x + ksf_p} + \frac{(b + bsf_x + ks) \cdot \tilde{a}_{t-1}^2 \cdot \mathbf{r}^u + k \tilde{b}_{t-1}^2 \cdot \mathbf{r}^u + (1 + sf_x)}{1 + sf_x + ksf_p} \cdot u_t \quad (48)$$

$$x_t = \frac{(s - bsf_p) \cdot \tilde{a}_{t-1}^1 + \tilde{b}_{t-1}^1}{1 + sf_x + ksf_p} + \frac{(s - bsf_p) \cdot \tilde{a}_{t-1}^2 \cdot \mathbf{r}^u + \tilde{b}_{t-1}^2 \cdot \mathbf{r}^u - sf_p}{1 + sf_x + ksf_p} \cdot u_t \quad (49)$$

Bullard and Mitra は、(44)、(45)式の PLM が、decreasing gain の RLS によって(48)、(49)式の ALM へと収束する条件、すなわち、E-stability の必要十分条件が、以下の

線を用いることが、引き続き妥当であると主張している。本節で紹介する結論は、one-period ahead forecast タイプの IS 曲線に基づいている。

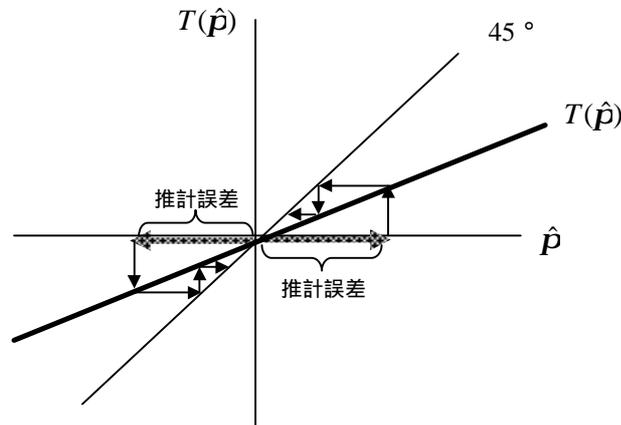
³⁸ (44)、(45)式に定数項が含まれるのは、民間主体がインフレ率や GDP の定常値を知らず、定常値に関する推計誤差も想定して学習を行うためである。

テイラー・プリンシプルに一致することを示している（証明は補論参照）。

$$f_p + \frac{1-b}{k} f_x > 1 \quad \text{再掲(25)}$$

テイラー・プリンシプルが E-stability の必要十分条件となるということは、(25)式が満たされれば、PLMとALMを繋ぐ写像関数が、合理的期待均衡近傍での安定性を確保していることを意味する。インフレ率の均衡近傍での安定性を考えると、テイラー・プリンシプルは、PLMにおけるインフレ率((44)式)からALMにおけるインフレ率((48)式)への写像関数($T(\hat{p})$)の傾きを45度より緩やかにし、民間の推計パラメータ($\tilde{a}_{t-1}^1, \tilde{a}_{t-1}^2, \tilde{b}_{t-1}^1, \tilde{b}_{t-1}^2$)が誤差を含んでも、インフレ率が時間を通じて中央銀行の目標インフレ率へ回帰するメカニズムを確保する役割を果たす(下図5参照)。

図5 . テイラー・プリンシプルと E-stability



テイラー・プリンシプルが E-stability をもたらす直観的理由は、民間主体のインフレ期待が、構造パラメータの推計誤差が原因で合理的期待よりも上昇(低下)した場合、名目金利がその乖離を埋め合わせるように上昇(低下)するためである。すなわち、合理的期待均衡でのインフレ期待($E_t p_{t+1}$)は以下の(50)式で表されるが、人々の実際の期待($E_t^p p_{t+1}$)は(46)式で表される。

$$E_t \hat{p}_{t+1} = a \cdot r^u \cdot u_t \quad (50)$$

$$E_t^p \hat{p}_{t+1} = \tilde{a}_{t-1}^1 + \tilde{a}_{t-1}^2 \cdot r^u \cdot u_t \quad \text{再掲(46)}$$

いま、正のインフレ・ショックが生じたとしよう。仮に、推計パラメータ($\tilde{a}_{t-1}^1, \tilde{a}_{t-1}^2$)が誤差を含むために、(46)式のインフレ期待が(50)式の合理的期待よりも上振れたとすると、(43)式のフィリップス曲線より、実際のインフレ率(p)も、合理的期待モデルでのインフレ率よりも上振れる。このとき、テイラー・プリンシプルが満たされていれば、名目金利がインフレ率の上振れ幅を上回って引き上げられ、GDPギャップがその分大きく低下する。これにより、実際のインフレ率はフィリップス曲線を通じて低下する。次期になると民間主体は、低下したインフレ率の

データを用いて再度パラメータを推計し直すが、中央銀行がインフレ率を低下させたことにより、構造パラメータの推計値 ($\tilde{\alpha}_t^1, \tilde{\alpha}_t^2$) は、インフレ期待の上振れ幅が前期よりも小さくなる方向に修正される。そして、このようなプロセスが続く結果、人々の持つパラメータの推計値は、最終的には真の値へと近づき、その結果、人々は合理的期待を形成できるようになる。

このように、E-stability を満たすためには、テイラー・プリンシプルを満たすことが重要であることが確認された。テイラー・プリンシプルは合理的期待均衡の一意性の基準であるから、それを満たしさえすれば E-stability も満たせるということは、中央銀行にとって一石二鳥とも言うべき結果である。しかし、均衡の一意性と E-stability の必要十分条件が共にテイラー・プリンシプルと一致するという結論は必ずしも常に成立する訳ではない。すなわち、この結論は、(i)政策ルール of 形状、(ii)経済構造、(iii)人々の学習方法、に依存しており、これらの状況設定が異なれば、テイラー・プリンシプルが均衡の一意性ないし E-stability の必要十分条件と一致しないケースが存在する³⁹。このため、中央銀行が経済を一意的合理的期待均衡へと収束させるためには、均衡の一意性と E-stability の必要十分条件が実際の経済で満たされているかという点を念頭に置く必要がある。もっとも、そうであってもなお、ほとんどのシンプル・ルールの場合において、テイラー・プリンシプルは依然として E-stability の必要条件であることが、Bullard and Mitra 他によって示されており、その意味で、中央銀行の政策ルールが最低限、テイラー・プリンシプルを満たす必要があるという主張は、かなりの程度頑健なものと言える。

4.2. 民間主体の学習と最適金融政策

前節では、E-stability の条件について検討したが、E-stability を満たす政策ルールは一般に多数存在するため、中央銀行は、その中でも損失関数を最小化するような政策ルールを選択する必要があると考えられる。したがって、本節では、民間主体が構造パラメータを学習する場合の最適金融政策を検討する。まず、4.2.1.では、中央銀行と民間主体が完全知識であるという従来の仮定に基づいて導出された最適政策ルール (3.3.で導出した政策ルール) が、民間主体が学習する下でも引き続き有用であるのか、すなわち E-stability を満たすのかという点を検討する。しかし、仮にそのルールが E-stability を満たしたとしても、民間主体が学習している下での経済のダイナミクスは、合理的期待モデルとは異なる可能性があるため、最適政策ルールの形状も異なる可能性がある。このため、4.2.2.では、民間主体が学習することを予め前提とした上での最適政策ルールを、合理的期待モデルでの最適金融政策ルールと比較検討することとする。

³⁹ 例えば、Preston[2003b]は、IS 曲線、フィリップス曲線が long-horizon forecast に依存する下で、中央銀行が民間期待に基づく政策ルール (前掲(28)式) を採用する場合、テイラー・プリンシプ

4.2.1. 完全知識下の最適金融政策は民間知識が不完全でも有用か？

3.3.では、人々が完全知識を持つと仮定した上で、中央銀行の損失関数を最小化する最適金融政策の条件式（最適性条件）を導出し、その条件式を満たす最適政策ルールが複数存在することを説明した。本節では、完全知識の仮定の下で導かれた最適金融政策ルールが、民間主体の知識が不完全な下でも依然として有用であるのか否かという点を、Evans and Honkapohja[2002]、[2003a]の分析に則して説明する。

Evans and Honkapohja は、最適政策ルールを(20)～(23)式のニューケインジアン・モデルに導入した場合に、E-stability を満たすか否かを検討している。具体的には、裁量解と公約解について、外生ショックに基づく完全知識下の最適ルール（(38)、(40)式）と、民間期待に基づく完全知識下の最適ルール（以下(51)、(52)式）がE-stability を満たすか否かを検討している⁴⁰。

$$\hat{i}_t = \hat{r}_t^n + \mathbf{j}_u \cdot u_t \quad \text{再掲(38)}$$

$$\hat{i}_t = \hat{r}_t^n + \mathbf{c}_x \cdot x_{t-1} + \mathbf{c}_u \cdot u_t \quad \text{再掲(40)}$$

$$\hat{i}_t = \hat{r}_t^n + \mathbf{d}_p \cdot E_t^P \hat{p}_{t+1} + \mathbf{d}_x \cdot E_t^P x_{t+1} + \mathbf{d}_u \cdot u_t \quad (51)$$

$$\hat{i}_t = \hat{r}_t^n + \mathbf{q}_p \cdot x_{t-1} + \mathbf{q}_p \cdot E_t^P \hat{p}_{t+1} + \mathbf{q}_x \cdot E_t^P x_{t+1} + \mathbf{q}_u \cdot u_t \quad (52)$$

その結果、Evans and Honkapohja は、(38)、(40)式のような、外生ショックに基づく最適ルールはE-stability を満たさないが、(51)、(52)式のような、民間期待に基づく最適ルールはE-stability を満たすことを確認している。

2種類の最適ルールの間には相違が生じる理由は、構造パラメータの推計誤差に基づく自己実現的なインフレ期待の変動を抑制するメカニズムが組み込まれているか否かという点にある。4.1.では、中央銀行がシンプル・ルールを採用する際に、テイラー・プリンシプルを満たせば、E-stability を確保できることを説明したが、その議論はこの場合にも同様に当てはまる。すなわち、(38)、(40)式の政策ルールは、外生的なインフレ・ショックには反応する形となっているものの、実際のインフレ率ないし民間のインフレ期待に反応する形になっていない。このため、構造パラメータの推計誤差による自己実現的なインフレ期待の上昇によって、実際のインフレ率が上昇した場合、(38)、(40)式の政策ルールを用いている限り、インフレの上昇が抑制されない。一方、(51)、(52)式の政策ルールでは、自己実現的なインフレ期待の上昇に対し、それを上回るだけの名目金利の上昇がもたらされるから、当初に生じた構造パラメータの推計誤差は時間を通じて縮小し、その結果、インフレ率は中央銀行の目標インフレ率に向けて回帰する。

ルはE-stabilityの必要条件であっても、十分条件にはならない可能性がある」と指摘している。
⁴⁰ (51)、(52)式と(39)、(41)式は期待項が異なっているが、これは民間主体が不完全知識のため、中央銀行が政策ルールに導入する民間期待が合理的期待（ $E_t \hat{p}_{t+1}$ 、 $E_t x_{t+1}$ ）ではなく、学習に基づく民間主体の実際の期待（ $E_t^P \hat{p}_{t+1}$ 、 $E_t^P x_{t+1}$ ）となるためである。

このように、完全知識下では複数の最適ルールが導かれるが、その中には E-stability を満たすルールと、満たさないルールが存在する。したがって、不完全知識下では、最適ルールの中でも特に、E-stability を満たすルールを選択する必要がある。また、E-stability の条件は通常、テイラー・プリンシプルと密接に結びつくため、中央銀行は最適ルールの中でも、テイラー・プリンシプルを満たすルールを選択することが考えられる。しかし、前節で説明したように、テイラー・プリンシプルが E-stability の必要十分条件となるか否かは、モデル構造やルールの形状に依存するため、中央銀行は、想定するモデル構造とルールの形状の下での E-stability を満たすよう、政策ルールのパラメータを設定することが必要と考えられる⁴¹。

4.2.2. 民間主体が不完全知識の下での最適金融政策

4.2.1.では、完全知識下で導かれた最適金融政策が E-stability を満たすのかという観点から考察を行なった。しかし、完全知識下の最適政策ルールが仮に E-stability を満たすとしても、適応的学習下と完全知識下では経済のダイナミクスが異なるから、そのルールは不完全知識下ではもはや最適政策ではなく、中央銀行の損失関数を最小化しない可能性がある。したがって、民間主体が構造パラメータを学習して期待を形成しているならば、中央銀行は、そのことを予め前提とした下で、損失関数を最小化するような最適政策ルールを導出する必要があると考えられる。

Orphanides and Williams[2002]は、民間主体が不完全知識の下での最適金融政策ルールを検討している。彼らはまず、完全知識下の最適政策ルールは、民間主体が不完全知識の下では、損失関数を最小化しないことをシミュレーションにより確認している。その上で、中央銀行がインフレ率に対する反応度を高めると、損失関数は改善し、経済が安定的となることを示している。つまり、この結果によれば、不完全知識下の最適インフレ反応度 (d_p^{IPK} 、 q_p^{IPK}) は、(51)、(52)式における完全知識下の最適インフレ反応度 (d_p 、 q_p) よりも大きくなる。

$$d_p^{IPK} > d_p \quad (53)$$

$$q_p^{IPK} > q_p \quad (54)$$

民間主体の知識が不完全な場合に、最適なインフレ反応度が大きくなる理由は、以下の通りである。まず、民間主体がインフレ率の決定式について不完全な知識しか持たない状況下では、一度上昇したインフレ率がどの程度の速度で均衡値へと回帰するかについて、民間主体は学習を通じて知るほかない。したがって、民間主体は過去のデータを用いて構造パラメータを推計するが、推計パラメータが真のパラ

⁴¹ 3.2.節では、民間期待を政策ルールに導入した場合、均衡の一意性の条件がタイトとなると説明したが、Evans and Honkapohja は、(51)、(52)式のルールが一意性の条件をクリアーすることを確認している。本節では、中央銀行が構造パラメータについて完全知識を持つと想定しているため、一意性の条件を満たすよう、適切なパラメータ設定を行なうことが可能である。

メータに収束するまでに時間を要する分、インフレ率の均衡値への収束速度は、完全知識の下での収束速度よりも遅くなり、結果としてインフレ期待は慣性（persistence）を持ち、ひいては実際のインフレ率も慣性を持つことになる。

インフレ率が慣性を持つことは、外生ショックに対する名目変数の調整速度が遅いことを意味するため、それは中央銀行にとって、GDPギャップの安定性とインフレ率の安定性の間のトレード・オフ関係を悪化させる。このため、完全知識下の最適政策ルール（(51)、(52)式）を用いていると、インフレの慣性の上昇は損失関数を悪化させるように作用する。このとき、中央銀行が、(51)、(52)式よりもインフレ率の変動に対してよりアグレッシブに反応すると、民間主体は、一度上昇したインフレ率は速やかに均衡値へと回帰することを学習するため、インフレ期待の慣性は低下し、実際のインフレ率の慣性も低下し、トレード・オフ関係が改善される結果、損失関数は改善する。このように、民間主体が学習する下では、中央銀行がインフレの慣性を主体的に低下させることにメリットがあり、そのために(53)、(54)式の関係が成立するのである。

なお、民間主体が学習する下での最適な政策反応度は、一般に人々の学習方法（gainの設定）に依存している。したがって、中央銀行がこの状況下で最適な政策ルールを採用するためには、民間主体の設定するgainの値を知らなければならない。これまでの研究では、民間主体の設定するgainと最適な政策ルールのパラメータの関係を明示的に導出したものはなく、この点は今後の検討課題である。しかし、少なくとも完全知識下の最適政策との対比で、中央銀行がインフレ変動に対してよりアグレッシブな政策スタンスを取り、ノミナル・アンカーとしての機能を強める必要があるという結論は、かなりの程度頑健であると考えられる⁴²。

4.3. 「流動性の罅」の可能性の再検討

3.4.では、政策ルールが目標インフレ率近傍でテイラー・プリンシプルを満たしても、名目金利のゼロ制約を考慮すると、「流動性の罅」の均衡が発生し、global dynamicsの中で、その均衡が安定的となる可能性があると説明した。ただし、ここでは、民間主体の知識が完全であると仮定していた。本節では、民間主体の知識が不完全な場合に、この「流動性の罅」に陥る可能性があるかという点を再検討する。

4.3.1. 「流動性の罅」の均衡と E-stability

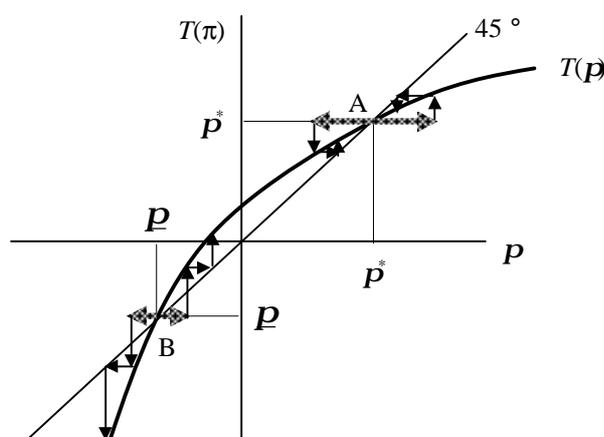
民間主体が構造パラメータに関し不完全知識の下で、Benhabib et al.の指摘する「流動性の罅」に陥る可能性はどの程度存在するだろうか。Evans and Honkapohja[2003b]は、民間主体が適応的学習を行なう状況下での経済のダイナミクスを想定した場合に、流動性の罅の均衡が安定的となるのか、すなわち E-stability

⁴² Gaspar et al.[2003]は、この結論が、バックワード・ルッキングな期待項の存在や、民間主体のgainの設定如何に依存しない、頑健なものであることを確認している。

を満たすのかという点をチェックしている。先に説明した通り、E-stability は合理的期待均衡の選別基準としての役割を備えており、仮にある合理的期待均衡が E-stability が満たさない場合、その均衡は微細な推計誤差に対して頑健ではなく、そのような均衡が実際の経済で成立する可能性は極めて乏しいと見なされる。

Evans and Honkapohja は、Benhabib et al.の「流動性の罅」の均衡が E-stability を満たさないことを明らかにしている。流動性の罅の均衡が E-stability を満たさないのは、この均衡の近傍で、テイラー・プリンシプルが満たされないためである。これは、前掲図4のB点で、政策ルールの傾きが45度よりも小さいことにより確認出来る。このとき、インフレ率の写像関数は、以下の図6の形状となる。

図6 . 「流動性の罅」の均衡と E-stability

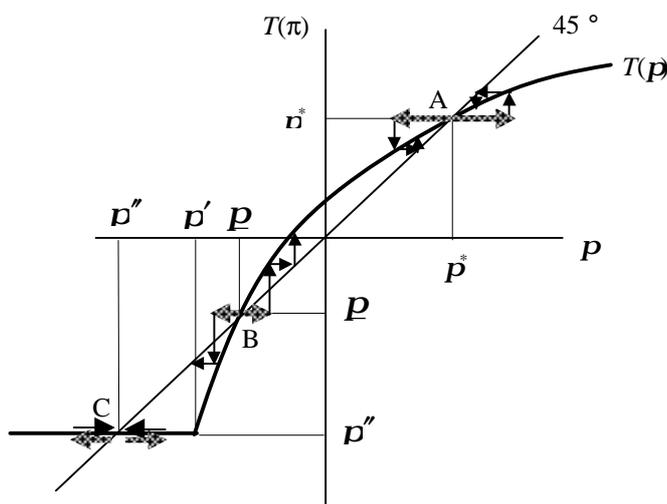


4.1.節で説明したように、テイラー・プリンシプルは、インフレ率の写像関数の傾きを45度よりも小さくすることにより、合理的期待均衡を安定的にする役割を持つ。このことは、図6の中では、中央銀行の目標インフレ率(A点)近傍ではテイラー・プリンシプルが満たされるため、写像関数の傾きが45度よりも緩やかになるが、流動性の罅の均衡(B点)近傍ではゼロ金利制約のためにテイラー・プリンシプルが満たされず、傾きが45度よりも急になることに対応している。図6が示すように、パラメータの推計誤差が生じた場合に、A点近傍ではインフレ率が元の均衡値(p^*)へと回帰するメカニズムが働くが、B点近傍ではそれが働かず、インフレ率は目標インフレ率へ上昇するか、際限なく低下を続けるかのどちらかとなる。つまり、Benhabib et al.が示した流動性の罅の均衡は、民間主体が学習により期待形成する下では、経済がそこから少しでも乖離した場合に、その均衡へと押し戻すような力が働かないという意味で、非常に不安定な均衡である。

このように、3.4.節で紹介した流動性の罅の均衡は E-stability を満たしていない。先述の通り、学習に関する研究では、ある均衡が E-stability を満たさない場合、現実の経済でその均衡が実現する可能性は極めて乏しいと見なされる。では、流動性の罅が均衡として実現する可能性は無いのだろうか。Evans and Honkapohja は、中央銀行がある水準以下のインフレ率に対し、マネタリー・ターゲティングを行うことを民間主体に示していると、Benhabib et al.とは別の、もう一つの流動性の罅の均

衡が生じる可能性があり、しかも、その均衡は E-stability を満たすということを示している。具体的には、B 点におけるインフレ率よりも低い、あるインフレ率水準 (p') を基点とし、それよりも実際のインフレ率が低下した場合に中央銀行がマネタリー・ターゲティングを行うとしよう。このとき、インフレ率の写像関数は以下の図7のように修正される。

図7 . ゼロ金利下でのマネタリー・ターゲティングと流動性の罍



このように、中央銀行が一定以下のインフレ水準でマネタリー・ターゲティングを行なうことを示すと、貨幣市場の需給均衡式を通じて、新しいデフレ水準 (p'') が流動性の罍の均衡 (C 点) として成立し、その均衡は E-stability を満たす。つまり、ゼロ金利下でもマネーサプライを供給すれば、経済がデフレスパイラルに陥ることは免れる一方で、E-stability を満たす安定的な流動性の罍の均衡が生じ、デフレが均衡状態として実現することになる⁴³。

Evans and Honkapohja は、経済が C 点の流動性の罍に陥らないようにするためには、十分に高いインフレ率水準の下で、マネタリー・ターゲティングへのスイッチを行うことを示すべきであると主張している。つまり、中央銀行が B 点におけるインフレ率水準 (p) よりも高いインフレ率水準の下で、マネーへのスイッチを行うことを示せば、写像関数と 45 度線の交点は A 点のみとなり、しかも A 点は E-stability を満たすから、中央銀行の目標インフレ率が定常状態で実現することになる。

このように、人々の知識が不完全である下での global dynamics は、合理的期待モデルの global dynamics とは異なっており、そのため、流動性の罍が生じるメカニズムは非常に異なったものとなる。したがって、現実の経済における流動性の罍の発

⁴³ 標準的ニューケインジアン・モデルでは、中央銀行が名目金利をコントロールするため、マネーサプライは、インプリシットな貨幣需要関数から受動的に決定されていた。しかし、(i)中央銀行が貨幣需要関数の形状を正確に知っており、(ii)ゼロ金利下で貨幣需要が無限大とならない場合、中央銀行は貨幣需要関数の中で、あるインフレ率下限値と整合的なマネーサプライの供給量を算出することが出来、そのために新しい均衡が発生する可能性が生じる。もっとも、(i)、(ii)の条件が満たされるか否かという点については、なお議論の余地があると考えられる。

生メカニズムを考える上では、どのモデルが現実の経済のダイナミクスをより適切に表現しているかという点を十分に考察することが重要であると言えるだろう。

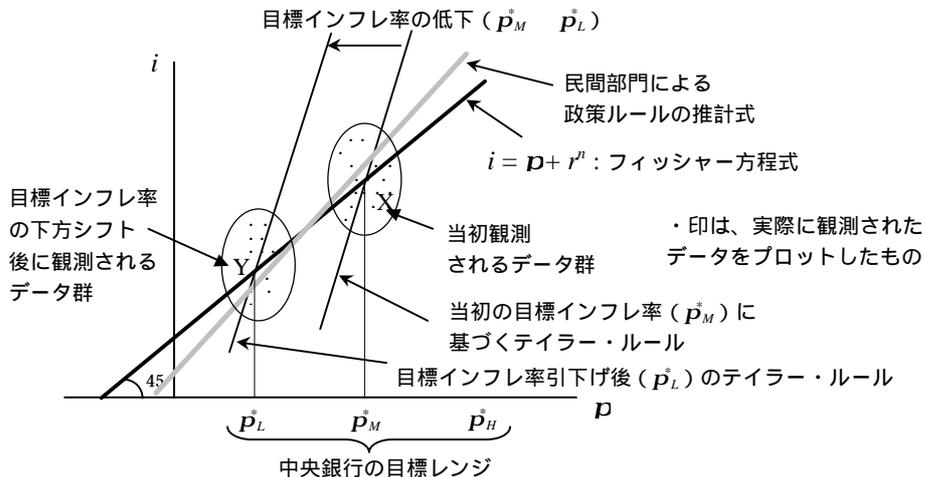
4.3.2. Escape Dynamics と「流動性の罠」

Bullard and Cho[2002]は、前節のメカニズムとは独立に、民間主体の不完全知識が原因で、経済が一時的に「流動性の罠」に陥る可能性を指摘している。すなわち、彼らは、たとえ流動性の罠が合理的期待均衡としては実現しなくとも、少なくとも一時的には経済が流動性の罠に陥るメカニズムが存在するとしている。

彼らの指摘する「流動性の罠」は、escape dynamics と呼ばれる動学経路により実現される。escape dynamics とは、経済が均衡近傍で変動している過程で、周期的にその過程から逸脱 (escape) してしまうダイナミクスであり、人々の学習方法を含む、幾つかの条件を満たした場合にのみ発生することが明らかにされている⁴⁴。

Bullard and Cho は、global dynamics を含むニューケインジアン・モデルにおいて、経済が escape dynamics を通じて「流動性の罠」に陥る可能性を指摘している。彼らの指摘する流動性の罠が発生する条件は、(i)中央銀行が目標インフレ率を公表していない上、その値 (p^*) を一定水準としてではなく、幅のあるレンジとして持つこと ($p^* [p_L^* p_H^*]$)、(ii)大きな外生ショックが生じること、(iii)民間主体が経済構造の変化 (中央銀行による政策反応度の変更) の可能性を念頭に置いて、直近のデータを重視した constant gain learning による学習を行っていること、の3つである。

図8 . Escape Dynamics による流動性の罠の発生メカニズム



流動性の罠の発生メカニズムは、図8により説明出来る。中央銀行が当初、目標インフレ率を目標レンジの中心値 (p_M^*) に設定し、その値に基づいてテイラー・ルールを採用しているとしよう。このとき、経済の均衡は p_M^* に基づくテイラー・ルールとフィッシャー方程式の交点で決るため、インフレ率と名目金利のデータは

⁴⁴ escape dynamics についての解説は、Sargent[1999]の Chapter8 や Williams [2003]を参照。

図のデータ群 X で観測される。

ここで、経済にマイナスの大きな外生ショックが生じ、インフレ率が低下したとしよう。中央銀行が目標インフレ率を公表していないため、民間主体は、このインフレ率の大幅な低下の原因の少なくとも一部が、中央銀行の目標インフレ率の下方シフトによるものと考えられる可能性があり、その場合、民間主体の目標インフレ率の推計値は下方にシフトし、期待インフレ率は低下する。このとき、中央銀行が真の目標値を据え置き、名目金利を据え置くと、実質金利が上昇し、GDP ギャップが低下してしまう。テイラー・ルールに基づく政策を続けるとすれば、こうした事態を回避するために、中央銀行は、真の目標インフレ率を低下させる必要が生じる。中央銀行は、一定レンジ ($p^* [p_L^*, p_H^*]$) の中では、目標インフレ率の水準に関して無差別であるため、真の目標インフレ率を低下させる ($p_M^* p_L^*$)。

このようなメカニズムが続くことにより、実際のインフレ率と中央銀行の目標インフレ率は徐々に低下していく。このため、観測されるインフレ率と名目金利は、フィッシャー方程式に沿ってデータ群 X からデータ群 Y へと移行する。このとき、民間が推計する政策ルールの傾きは緩やかになり、民間主体は、中央銀行がインフレ率の変動に対してアグレッシブな政策対応を行わないと考えるようになる。このため、インフレ期待の不安定化により実際のインフレ率が不安定化する。このような状況で、民間の目標インフレ率の推計値が更に下がるような事態が発生すれば、デフレ期待が長引き、それに対して中央銀行は名目金利を引き下げていくが、最終的にはゼロ金利制約に直面することになってしまう。ゼロ金利制約に直面すると、インフレ率の低下に対して、中央銀行は名目金利を低下させることが出来ず、テイラー・プリンシプルを満たせない。この場合、E-stability が満たされないため、期待が合理的期待から乖離すると、それを元に戻すメカニズムが働かなくなってしまう。これが、Bullard and Cho の指摘する流動性の罍のメカニズムである⁴⁵。

このメカニズムによって、経済が流動性の罍に陥る可能性があるとするならば、中央銀行がそれを防ぐためには、理論的には3つの政策対応が考えられる。第1の対応は、中央銀行が目標インフレ率を明示的な水準として持つことを示し、実際にインフレ率が変動しても、後追的な目標値の変更を行わないことを明らかにすることである。第2の対応は、民間主体に対し、政策ルールの形状・パラメータに関する情報提供（政策の透明性向上）を行ない、政策ルールの反応度に関する民間主体のミス・パーセプションを削減することである。第3に、名目金利の低下余地が十分に残されている段階で、中央銀行が政策ルールのインフレ反応度を大きく設定し、民間主体のインフレ期待の低下に対して大幅に名目金利を低下させることである。そのような政策対応により、中央銀行は、物価安定の達成に対して強い意志を持っていることを民間主体に示すことが出来、それを民間主体が学習することで、このメカニズムによる流動性の罍を防ぐことが出来ると考えられる。

⁴⁵ Bullard and Cho のメカニズムによって経済が一時的に流動性の罍に陥った場合、経済がそこから抜け出すタイミングは、外生ショックの性質に依存して決定される。

5. 中央銀行の知識が不完全な場合の金融政策

本節では、中央銀行が経済構造について不完全知識を持つ場合（2.1.の表1のケース3）の金融政策について解説する。なお、このケースでは、民間主体は完全知識であり、IS 曲線とフィリップス曲線に含まれる民間期待は常に合理的期待に一致するため、E-stability は政策ルールの選別基準とはならない。しかし、この場合、中央銀行が自己の持つ経済構造の知識を前提にして最適政策ルールを導出すると、中央銀行の持つパラメータが推計誤差を含むため、そのルールが真の意味での最適金融政策から乖離する可能性がある。この状況では、中央銀行は自己の持つパラメータ推計誤差の影響を出来るだけ縮小するよう、政策ルールの工夫を行うことが必要となる。本節では、この点を中心に解説を進める。

5.1.では、完全知識下で導かれた複数の最適金融政策ルールの中でも、具体的にはどのようなルールが、中央銀行の持つ構造パラメータの推計誤差の悪影響を小さく出来るのかを検討する。5.2.では、中央銀行が構造パラメータの推計誤差を持つ場合、政策ルールに民間期待を導入することは均衡の一意性に抵触する可能性があることを指摘し、この問題を具体的にどのようにクリアー出来るかを説明する。

5.1. 完全知識下の最適金融政策は中央銀行の知識が不完全でも有用か？

3.3.では、知識が完全な場合、中央銀行は経済構造に関する正しい知識を基に、損失関数を最小化するための最適性条件（(32)、(35)式）を導くことが出来るため、この条件を満たす最適政策ルールを選択する必要があると論じた。しかし、中央銀行が真の構造パラメータ（ \mathbf{a} 、 \mathbf{k} ）を知らない場合、中央銀行は最適性条件を正しく知ることは出来ない。このとき、中央銀行は、構造パラメータの推計値を用いた最適性条件の近似式を参照して政策ルールを設定することが考えられる。

Aoki and Nikolov[2003]は、中央銀行が構造パラメータを推計しながら、公約型の最適政策を行なう場合の政策パフォーマンスを検討している。具体的には、 s 期の時点で、中央銀行が IS 曲線とフィリップス曲線の傾きの推計値（ $\tilde{\mathbf{s}}_s, \tilde{\mathbf{k}}_s$ ）を持つとし、 s 期以降の期間（ $t \geq s$ ）について、以下の推計モデルを前提に政策ルールを選択する場合を考える。

$$x_t = E_t x_{t+1} - \tilde{\mathbf{s}}_s \cdot (\hat{i}_t - E_t \hat{\mathbf{p}}_{t+1}) + g_t + \mathbf{x}^x_t \quad (55)$$

$$\hat{\mathbf{p}}_t = \mathbf{b} \cdot E_t \hat{\mathbf{p}}_{t+1} + \tilde{\mathbf{k}}_s \cdot x_t + u_t + \mathbf{x}^p_t \quad (56)$$

$$g_t = \mathbf{r}^g \cdot g_{t-1} + \mathbf{e}_t^g \quad (57)$$

$$u_t = \mathbf{r}^u \cdot u_{t-1} + \mathbf{e}_t^u \quad (58)$$

なお、 \mathbf{x}^x_t 、 \mathbf{x}^p_t は、中央銀行にとって観察不可能な攪乱項である。この項の存在により、中央銀行はパラメータ \mathbf{s} 、 \mathbf{k} を正確に識別できない。中央銀行は、(55)、(56)

式の知識を前提として、前掲(31)式の損失関数を最小化するように行動する⁴⁶。

$$W_t = E_t \sum_{j=0}^{\infty} b^j [\hat{p}_{t+j}^2 + a \cdot x_{t+j}^2] \quad \text{再掲(31)}$$

このとき、最適性条件は以下の(59)式のように導かれる。

$$\mathbf{k}_s \cdot \hat{\mathbf{p}}_t + \mathbf{a} \cdot (x_t - x_{t-1}) = 0 \quad (59)$$

中央銀行は每期、パラメータ $(\tilde{s}_s, \mathbf{k}_s)$ を推計し直し、そして、それ以降の各期 (t s の期間) について、(59)式が成立するように努める。なお、(59)式は、構造パラメータの推計値に基づく点で、完全知識下の公約解 (35)式) と異なる。また、完全知識下の最適公約ルールと同様に、(59)式を満たす政策ルールは複数存在する。例えば、以下の(60)式の政策ルールは(59)式の条件を満たしている⁴⁷。

$$\hat{i}_t = \tilde{r}^n_t + \tilde{\mathbf{q}}_{L,s} \cdot x_{t-1} + \tilde{\mathbf{q}}_{p,s} \cdot E_t \hat{\mathbf{p}}_{t+1} + \tilde{\mathbf{q}}_{x,s} \cdot E_t x_{t+1} + \tilde{\mathbf{q}}_{u,s} \cdot u_t, \quad \tilde{r}^n_t \equiv \tilde{\mathbf{s}}_s^{-1} \cdot g_t \quad (60)$$

Aoki and Nikolov は、(59)式の条件を満たす政策のパフォーマンスを検討している。その結果、中央銀行が不完全知識の下では、(59)式の条件を満たす政策の、損失関数上のパフォーマンスが、完全知識下の最適公約ルール (前掲(41)式) よりも著しく悪化することを確認している。この主たる原因は、中央銀行が構造パラメータの正確な知識を知らなければ、需要ショックをオフセットするために必要な利子率変動、すなわち自然利子率の値を正確に知ることが出来ないことにある。この点は、(60)式の右辺第一項の自然利子率 (\tilde{r}^n_t) が、IS 曲線のパラメータの推計値 (\tilde{s}_s) に基づいた推計値であることから、理解されよう。つまり、中央銀行が完全知識の下では、需要ショックが生じても、正確なパラメータの知識 (s) に基づいて、自然利子率の値を正確に計算できたが、中央銀行が構造パラメータについて不完全知識の場合、需要ショックを完全にオフセット出来ないため、自然利子率の推計誤差が経済に影響を与えてしまうことになる^{48, 49}。

Aoki and Nikolov は、以下の(61)式の条件式を(59)式の代わりに用いることにより、この問題のもたらす悪影響を縮小出来ることを示している。

⁴⁶ 本節では、中央銀行は民間主体の期待を観察出来ると仮定し、MSV 解のパラメータを学習するのではなく、構造パラメータ (s, k) を直接学習すると想定する。ただし、中央銀行は、民間主体が構造パラメータの真の値を基に期待形成していることを知らず、そのため、民間主体の期待から構造パラメータの値を推計することはしないと仮定する。

⁴⁷ (60)式中の期待は、民間主体が形成する合理的期待である。(60)式の中の各パラメータは、(41)式のパラメータ $(\mathbf{q}_L, \mathbf{q}_p, \mathbf{q}_x, \mathbf{q}_u)$ と同形状だが、推計パラメータ $(\tilde{s}_s, \mathbf{k}_s)$ に基づく点で異なる。

⁴⁸ Orphanides and Williams[2003]は、1960年代、70年代の米国の高インフレの原因は、主としてFRBが自然利子率に関する大きな推計誤差を抱えていたことにあると論じている。

⁴⁹ パラメータの推計誤差が政策パフォーマンスを悪化させる度合は、公約型の最適政策の場合に顕著となる。これは、最適公約ルールが歴史依存性を持ち、過去の政策ミスを現在の政策へ引きずる傾向を持つためである。Aoki and Nikolov は、最適裁量政策と最適公約政策を比較し、推

$$\mathbf{K}_s \cdot \hat{p}_t + \mathbf{a} \cdot x_t = 0 \quad (61)$$

(61)式は、当期のインフレ率ではなく、当期の物価水準（ \hat{p}_t ）に基づいており、いわゆる「物価水準ターゲティング」型の金融政策を表している⁵⁰。この式の差分をとれば(59)式に一致するため、この物価水準ターゲティングは、最適性条件の積分形（integrated form）であるとみなすことが出来る⁵¹。この(61)式を満たす政策ルールとしては、例えば以下の形状のルールが考えられる。

$$\hat{i}_t = \tilde{r}_t + \mathbf{h}_{p,s} \cdot \hat{p}_{t-1} + \mathbf{h}_{p,s} \cdot E_t \hat{p}_{t+1} + \mathbf{h}_{x,s} \cdot E_t x_{t+1} + \mathbf{h}_{u,s} \cdot u_t \quad (62)$$

このルールは、物価水準のラグ値（ \hat{p}_{t-1} ）を含む点で、(60)式等の最適公約ルールとは形状が異なる。なお、(62)式の各パラメータ（ $\mathbf{h}_{p,s}$, $\mathbf{h}_{p,s}$, $\mathbf{h}_{x,s}$, $\mathbf{h}_{u,s}$ ）は、(55)～(58)、(61)式と整合的になるように決定された、最適な物価水準ターゲティング・ルールのパラメータ推計値である。(62)式のルールは、完全知識下では、(59)式の最適性条件を満たす政策ルール（例えば(60)式のルール）と同様に、最良の政策パフォーマンスを示す。しかし、Aoki and Nikolov は、中央銀行が構造パラメータを推計する場合には、(59)式をターゲットにする政策よりも、(61)式のような、物価水準をターゲットした政策の方が、パフォーマンスが良好となると指摘している。

この理由は、物価水準ターゲティングが、当期に生じた政策ミス、その翌期に修正する性質を備えていることに依拠している。

図9．物価水準ターゲティングの概念図

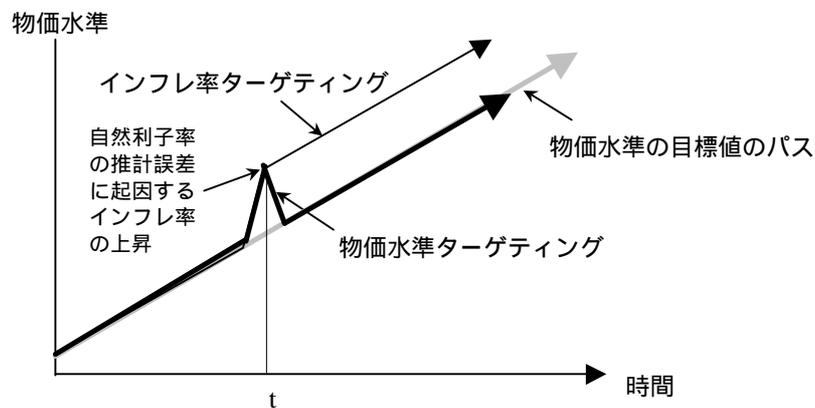


図9は、物価水準ターゲティングの概念図である。図は、t 期に自然利子率の負の推計誤差が生じ、名目金利を引き下げ過ぎたことで、GDP ギャップが上昇し、インフレ率が上昇した状況を表している。(59)式のような、インフレ率をターゲット

計誤差の程度次第で、前者のパフォーマンスが後者を凌駕する可能性があることを指摘している。

⁵⁰ より正確には、 \hat{p}_t は物価水準の定常値からの乖離幅を表す。

⁵¹ ただし、(59)式と(61)式の推計パラメータ（ \mathbf{K}_s ）は、異なるルールを導入したモデルの中で推計されるもので、両者の値は一致しない。

とした政策では、自然利子率の推計誤差のために t 期のインフレ率が上昇しても、中央銀行は $t+1$ 期以降のインフレ率さえ目標値に近づければ良い。しかし、(61)式のような物価水準をターゲットとした政策では、 t 期にインフレ率が上昇したとき、物価水準を元の目標パスに戻すためには、一度インフレ率を目標値よりも低い水準へ誘導することが必要であり、このため、名目金利を大幅に引き上げることになる。つまり、物価水準ターゲティングは、自然利子率の推計誤差が一度生じた場合に、その影響を埋め合わせるような政策を将来実行する性質を備えている。本稿で検討しているフォワードルッキング・モデルでは、この機能を人々が事前に知っているため、期待が安定し、政策パフォーマンスが良好となる⁵²。

このように、中央銀行の知識が完全な場合には、同じように最適なパフォーマンスを示したルールが、中央銀行の知識が不完全な下では異なる政策パフォーマンスを示す可能性がある。したがって、中央銀行が構造パラメータについて大きな不確実性を持つ場合には、推計誤差が政策に与える影響を限定的とするような政策ルールを選択することが望ましいと言える。

5.2. 民間期待をルールに導入することの問題点と対処法

3.3.で説明した通り、裁量解・公約解ともに、最適性条件を満たす最適政策ルールは複数存在し、その一つの形状が、民間主体の期待に基づく最適政策ルール((39)、(41)式)であった。しかし、3.2.で見た通り、民間主体の期待を政策ルールに取り込む場合には、合理的期待均衡の一意性条件を満たすパラメータの範囲が狭くなる。もっとも、3節のように、中央銀行が完全知識であれば、この範囲が狭いとしても、それらをうまくクリアーするようにパラメータ設定を行えば良かった。

しかし、本節のように、中央銀行の構造パラメータに関する知識が不完全である場合には、中央銀行は均衡の一意性の条件を正確に知ることが出来ない。例えば、中央銀行が前掲(28)式の、民間期待に基づく政策ルールを採用していたとしよう。

$$\hat{i}_t = \hat{r}_t^n + f_p \cdot E_t \hat{p}_{t+1} + f_x \cdot E_t x_{t+1} \quad \text{再掲(28)}$$

中央銀行は、均衡の一意性を満たすように政策反応度 (f_p, f_x) を設定する必要があるが、真の構造パラメータを知らないため、均衡の一意性の条件(前掲(25),(29),(30)式)を正確に知らない。

$$f_p + \frac{1-b}{k} f_x > 1 \quad \text{再掲(25)}$$

$$f_x < s^{-1} \cdot (1+b^{-1}) \quad \text{再掲(29)}$$

$$k \cdot (f_p - 1) + (1+b) \cdot f_x < 2s^{-1} \cdot (1+b) \quad \text{再掲(30)}$$

⁵² なお、人々の期待が主としてバックワードルッキングに形成される場合には、この効果を通じて経済が安定する度合は、標準的ニューケインジアン・モデルと比較して小さくなる。

上記3式は、政策反応度のある適切なレンジ内に収めることを求めている。中央銀行が構造パラメータを知らないために、(25),(29),(30)式における構造パラメータ (s, k) をパラメータの推計値 (\hat{s}, \hat{k}) と置換えた場合、パラメータが推計誤差を含んでいる分、政策反応度の適切なレンジを誤る危険性が生じる。

Bullard and Mitra[2000]は、中央銀行が民間期待を政策ルールに導入する場合には、名目金利の慣性 (inertia) を十分に取ることで、合理的期待均衡の一意性を満たす政策パラメータのレンジを広げることが出来ることを示している。彼らは、(28)式のルールに名目金利のラグ項 (\hat{i}_{t-1}) を導入し、以下の(63)式のように修正している。

$$\hat{i}_t = \hat{r}_t^n + f_i \cdot \hat{i}_{t-1} + f_p \cdot E_t \hat{p}_{t+1} + f_x \cdot E_t x_{t+1} \quad (63)$$

(63)式のルールの下では、均衡の一意性の条件式は、以下の3式となる。

$$f_i + f_p + \frac{1-b}{k} f_x > 1 \quad (64)$$

$$f_i > \frac{1}{k+2s(1+b)} \cdot (k \cdot f_p + (1+b) \cdot f_x) - 1 \quad (65)$$

$$2 \cdot s > f_x \quad (66)$$

このように、(63)式の下でも、均衡の一意性を満たすために、政策ルールは3つの条件式を満たさなければならない。しかし、この場合、3つの条件式を満たすようにパラメータの選択を行なうことは、比較的容易である。(64)式は、テイラー・プリンシプルと似ているが、左辺に名目金利の慣性のパラメータを含む⁵³。したがって、他の政策パラメータ (f_p, f_x) を一定とすると、金利慣性の程度 (f_i) を高めれば、(64)式を満たすことが出来る。また、(65)式は、パラメータ f_p, f_x がある範囲内に収められることを求めているが、金利慣性 (f_i) を大きく取れば、この範囲自体を大きくすることが出来る。(66)式は、GDPギャップへの反応度を十分に小さ目に設定すれば、満たすことが出来る。

このように、中央銀行が民間期待を政策ルールに導入するとしても、名目金利の慣性を大きく設定することで、均衡の一意性を確保することが出来る。名目金利の慣性を取ることによって均衡の一意性が確保され易くなるのは、人々のインフレ期待の急激な変化に応じて名目金利が異なる均衡へとジャンプすることが防がれるためである。なお、ここでインフレ率への反応度 (f_x) を一定とすると、名目金利の慣性を取ることは、累積でのインフレ反応度を高める働きがあり、金融政策のノミナル・アンカーとしての役割を強める機能を持つ。したがって、インフレ率は中央銀行の目標値へと収束し、合理的期待均衡の一意性が保たれる。

3.1.で述べた通り、均衡の一意性を確保することは、政策ルールの選択において第一義的に重要であるため、構造パラメータの知識が不完全な状況では、まず名目金利に慣性を持たせた政策運営を採用することが妥当と考えられる。

⁵³ (64)式は、インフレ率の恒常的な1%の上昇に対して、名目金利を累積で1%以上引き上げることを示しており、金利の慣性を含んだ場合のテイラー・プリンシプルと見なすことが出来る。

6. 民間主体と中央銀行の知識が不完全な場合の金融政策

4、5節では、民間主体ないし中央銀行の知識が不完全な場合の金融政策について各々解説した。しかし、現実の経済では、両者の知識は共に不完全であると考えられるため、両者が共に不完全知識を持つことを前提にした場合（2.1.の表1のケース4）に、どのような政策インプリケーションが導かれるかを検討することも重要である。特に、両者が共に不完全知識の状況では、両者の学習方法の組合せや、両者の情報集合の位置関係が、政策インプリケーションを左右する可能性がある。本節では、この点を解説する。

6.1. 両主体の学習方法と情報集合が同じ場合

まず、民間主体と中央銀行の学習方法と情報集合が同一（homogeneous）のケースを扱う。この場合、民間主体と中央銀行の形成する期待（ $E_t^{P\&CB} \hat{p}_{t+1}$, $E_t^{P\&CB} x_{t+1}$ ）は共通の値をとる。この状況下で、中央銀行が以下の政策ルールに従っているとしよう。

$$\hat{i}_t = \tilde{r}^n_t + y_p \cdot E_t^{P\&CB} \hat{p}_{t+1} + y_x \cdot E_t^{P\&CB} x_{t+1} + y_u \cdot u_t, \quad \tilde{r}^n_t \equiv \tilde{s}^{-1} \cdot g_t \quad (67)$$

(67)式は、民間期待に基づく完全知識下の最適裁量ルール（(39)式）と同様の形状の政策ルールだが、(i)政策反応度（ y_p, y_x, y_u ）は必ずしも最適値ではないこと、(ii)政策ルールに含む期待（ $E_t^{P\&CB} \hat{p}_{t+1}, E_t^{P\&CB} x_{t+1}$ ）は合理的期待でなく、民間主体と中央銀行の学習に基づく期待であること、(iii)パラメータ \tilde{s} は推計された値であるため、自然利子率の推計値（ \tilde{r}^n_t ）は誤差を含む可能性があること、の3点で最適ルールと異なる。

Evans and Honkapohja [2003a]は、(20)～(23)のモデルに(67)式の政策ルールを導入した場合のE-stabilityの条件を導出している。その結果、E-stabilityの条件が、以下のテイラー・プリンシプルと一致することを明らかにしている。

$$y_p + \frac{1-b}{k} y_x > 1 \quad (68)$$

このように、両主体の知識が不完全でも、両者の学習方法と情報集合が同一であるケースでは、テイラー・プリンシプルを満たせばE-stabilityを確保出来る。このため、中央銀行は、4節と5節で導かれた条件式以外に追加的な条件を満たす必要はない。以下では、この結論をベンチマークとし、学習方法や情報集合に関する両主体間の異質性（heterogeneity）を導入していく。

6.2. 両主体の学習方法が異なる場合

民間主体と中央銀行が「異質的な学習（heterogeneous learning）」を行う代表的ケ

ースとして、両者が constant gain の RLS を行っているが、gain の値が両者間で異なる場合を考えよう。2 節で説明したように、適応的学習における gain の値は「直近のデータに対する重視度」を表しており、constant gain の値が大きいということは、人々が経済構造の変化の可能性が高いと想定し、より最近のデータを重要視して学習を行っていることを意味している。

いま、民間主体の設定する constant gain を l^P 、中央銀行の設定する constant gain を l^{CB} としよう。このとき、民間主体と中央銀行は別々に構造パラメータを推計し、その知識に基づいて、別々の期待形成を行なう。民間主体の形成する期待を $E_t^P \hat{p}_{t+1}$ 、 $E_t^P x_{t+1}$ と表し、中央銀行の期待を $E_t^{CB} \hat{p}_{t+1}$ 、 $E_t^{CB} x_{t+1}$ と表そう。このとき、中央銀行が(67)式と同形状の政策ルールを採用したとすると、経済構造は以下の(69)~(73)式により構成される。

$$x_t = E_t^P x_{t+1} - \mathbf{s} \cdot (\hat{i}_t - E_t^P \hat{p}_{t+1}) + g_t \quad (69)$$

$$\hat{p}_t = \mathbf{b} \cdot E_t^P \hat{p}_{t+1} + \mathbf{k} \cdot x_t + u_t \quad (70)$$

$$g_t = \mathbf{r}^g \cdot g_{t-1} + \mathbf{e}_t^g \quad (71)$$

$$u_t = \mathbf{r}^u \cdot u_{t-1} + \mathbf{e}_t^u \quad (72)$$

$$\hat{i}_t = \tilde{r}^{n^{CB}}_t + \mathbf{m}_p \cdot E_t^{CB} \hat{p}_{t+1} + \mathbf{m}_x \cdot E_t^{CB} x_{t+1} + \mathbf{m}_u \cdot u_t, \quad \tilde{r}^{n^{CB}}_t \equiv \tilde{\mathbf{s}}^{CB-1} \cdot g_t \quad (73)$$

(69)、(70)式は民間主体の行動から導かれているため、その中の期待は民間主体の期待 ($E_t^P \hat{p}_{t+1}$ 、 $E_t^P x_{t+1}$) である。一方、(73)式の政策ルールの中の期待は、中央銀行の期待 ($E_t^{CB} \hat{p}_{t+1}$ 、 $E_t^{CB} x_{t+1}$) である。なお、(73)式の中の自然利子率 ($\tilde{r}^{n^{CB}}_t$) は、中央銀行が推計した構造パラメータ $\tilde{\mathbf{s}}^{CB}$ に基づく、自然利子率の推計値である。

Honkapohja and Mitra [2002]は、このモデルの合理的期待均衡の E-stability 条件が、以下の2式となることを示している。

$$\mathbf{m}_p + \frac{1-b}{k} \mathbf{m}_x > 1 \quad (74)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{m}_p + \mathbf{m}_x > \frac{l^P}{l^{CB}} \mathbf{k} - \mathbf{s}^{-1} \quad (75)$$

(74)式はテイラー・プリンシプルだが、この場合、(74)式だけでなく、追加的に(75)式も同時に満たされなければならない。(75)式の右辺は、民間主体と中央銀行の constant gain の相対比 (l^P / l^{CB}) に依存している。つまり、中央銀行が民間主体に比べ、最近期のデータをより重視しているほど、 l^P / l^{CB} は小さくなるため、一定の強さの政策反応度 ($\mathbf{m}_p, \mathbf{m}_x$) に対して、(75)式は満たされやすい。逆に、中央銀行が民間主体に比べ、過去のデータ変動に引きずられる傾向が強いと、 l^P / l^{CB} は大きくなり、(75)式は満たされにくくなる。したがって、政策反応度を所与とすれば、中央銀行が直近のデータにより重きを置いて、経済構造の変化に敏感になる方が、E-stability を満たしやすくなり、経済が安定化することになる。

この結論が導かれる理由を直観的に説明するために、(73)式の政策ルールを(69)式に代入して整理すると、以下の式が導かれる。

$$x_t = (\mathbf{s} \cdot E_t^P \hat{p}_{t+1} + E_t^P x_{t+1}) - \mathbf{s} \cdot (\mathbf{m}_p \cdot E_t^{CB} \hat{p}_{t+1} + \mathbf{m}_x \cdot E_t^{CB} x_{t+1}) - z_t, \\ z_t \equiv (\mathbf{s} \cdot \mathbf{m}_u \cdot u_t + (\frac{\mathbf{s}}{\mathbf{s}^{CB}} - 1)) \cdot g_t \quad (76)$$

(76)式の右辺第1項は、当期のGDPギャップが、民間主体のインフレ率とGDPギャップに関する期待に正の関係で依存することを表す。つまり、民間の学習によるGDPギャップとインフレ率に関する期待が、合理的期待から上方に乖離した場合、現実のGDPギャップも自己実現的に上昇する。また、フィリップス曲線((70)式)を通じて、当期のインフレ率も自己実現的に上昇する。

一方、(76)式の右辺第2項は、当期のGDPギャップが、中央銀行のインフレ率とGDPギャップに関する期待に負の関係で依存することを表す。つまり、中央銀行のGDPギャップとインフレ率に関する期待が、合理的期待よりも上振れたとすると、それは当期のGDPギャップは低下し、その結果、フィリップス曲線を通じてインフレ率も低下する。

このように、学習による期待が合理的期待から乖離することは、民間主体については、経済を自己実現的に変動させる反面、中央銀行については、そのような自己実現的経済変動を抑制する方向に作用する。したがって、経済全体のE-stabilityが確保されるためには、中央銀行の期待形成の安定化効果が、民間主体の期待形成の不安定化効果を凌駕する必要がある。

(75)式は、この状況を確保するには、中央銀行が民間主体に比して、最近期のデータをより重視する必要があることを示している。これは、例えば、民間主体のGDPギャップやインフレ率に関する期待が、合理的期待よりも上方に乖離したとすると、それによって実際のGDPギャップやインフレ率が自己実現的に上昇するが、このことを中央銀行が最近期のデータを中心に速やかに学習すれば、中央銀行のGDPギャップとインフレ率に関する期待も速やかに上昇する。中央銀行は、その期待に基づいて名目金利を早急に引き上げるが、テイラー・プリンシプルを満たしているだけに、名目金利の引き上げは実質金利を上昇させ、その結果、GDPギャップとインフレ率の上昇を抑制し、経済は安定化に向かうことになる。逆に、中央銀行が足許の経済変動に対して鈍感になり、民間主体よりも過去の経済変動に引きずられたまましていると、民間主体の期待は修正されないため、E-stabilityは確保されず、経済は不安定化しやすくなる。

6.3. 両主体の情報集合が異なる場合

6.2.では、民間主体と中央銀行の間で、情報集合は同質だが、学習方法が異なるケースを解説した。本節では、両主体間で、学習の際に用いることが出来る情報の量が異なる、「情報の非対称性(asymmetric information)」のケースを解説する。

一例として、民間主体は需要ショックとインフレ・ショックの両方を観察出来るが、中央銀行は需要ショックのみしか観察できず、インフレ・ショックの情報は持たないと仮定しよう。このとき、経済構造は前節のモデル((69)~(73)式)と基本

的に同様であるが、中央銀行はインフレ・ショックの情報を持たないので、(73)式の中の、インフレ・ショック反応度 (m_u) はゼロである。

Honkapohja and Mitra[2002]は、この状況下での E-stability 条件が、以下の2式となることを示している。

$$m_p + \frac{1-b}{k} m_x > 1 \quad (77)$$

$$2 + k \cdot s - ((2 + k \cdot s)^2 - 4)^{-1/2} \geq 2 \cdot r^u \quad (78)$$

(77)式はテイラー・プリンシプルだが、それ以外に、(78)式の追加条件が満たされなければならない。(78)式の右辺の r^u は、インフレ・ショックの慣性の程度を表すパラメータである。つまり、(78)式は、インフレ・ショックの慣性が低い場合には満たされやすいが、慣性が高まると満たされにくくなる。

(78)式の意味は、再び(76)式を見ることにより理解される。ここで、インフレ・ショックの慣性が高い (r^u が大きい) 状況を想定しよう。当期のインフレ率を上昇させるインフレ・ショックが生じた場合、民間主体はそのショックを観察し、それを織り込んで将来のインフレ率の期待を形成する。このとき、ショックの慣性が強いことを民間主体は学習により学んでいるので、インフレ率がしばらく先まで上昇を続けると予想する。一方、中央銀行は、インフレ・ショックを観察できないから、インフレ・ショックの慣性が高いことを学習しておらず、当期のインフレ・ショックが当期のインフレ率に与える影響しか考慮せず、先行きについて十分な政策対応を行わない。このため、政策対応は過小となり、民間主体の期待は安定化せず、経済が安定化しない。

以上が(78)式の意味であるが、重要なのは、(78)式の条件が、中央銀行の選択するパラメータには、一切依存していないという点である。つまり、民間主体が決定する構造パラメータ (s, k) と、経済に加わる外生ショックのパラメータ (r^u) は中央銀行にとって与件であるが、これらが(78)式を満たさない場合、中央銀行は政策反応度を最大限に工夫しても、E-stability の条件を満たすことが出来ない。

したがって、E-stability を確保するには、中央銀行は最大限の情報収集を行い、民間主体との対比で情報劣位になることを避けなければならない⁵⁴。中央銀行が民間主体と比較して大幅な情報劣位にある状態は、民間主体の自己実現的な期待を抑制するメカニズムが備わっていないという意味で、経済の安定性にとって好ましくない状態である。このような状況を回避するために、中央銀行は丹念な情報収集・情勢判断作業を行い、情報の非対称性を解消するように努める必要があると考えられる。

⁵⁴ Honkapohja and Mitra[2003]は、民間主体と中央銀行の情報集合が本節の仮定と逆の場合(民間主体のみがインフレ・ショックを観察できない場合)、E-stability の条件がテイラー・プリンシプル(77式)のみとなることを示している。したがって、E-stability にとって重要なのは、中央銀行が少なくとも民間主体と同等以上の情報量を確保することであると言える。

7. おわりに：不完全知識下で望ましい金融政策運営とは

本稿では、学習行動 (learning) を導入した最近の金融政策ルール分析をサーベイし、人々が経済構造について不完全な知識しか持たない状況下における望ましい金融政策のあり方について、理論的に検討してきた。

完全知識を仮定した従来の金融政策ルール分析では、民間主体は合理的期待を形成でき、中央銀行は最適政策ルールを実行することができた。この状況下では、中央銀行は均衡の一意性を確保するためにテイラー・プリンシプルを満たした上で、損失関数を最小化するように最適政策ルールを算出すれば良かった。つまり、この状況では、経済構造に関する知識の不完全性のために民間主体の期待が合理的期待から乖離して不安定となる可能性は存在しなかったし、中央銀行が経済構造に関する推計誤差を持ち、そのために最適ルールと異なる政策パターンを採用することによって経済が不安定化する可能性も存在しなかった。その意味で、従来分析は、経済が比較的安定的な状況を予め想定してきたとすることが出来る。

しかし、本稿で説明したように、ひとたび知識の不完全性を考慮すると、人々の持つ経済構造に関するミス・パーセプションが経済の不安定性をもたらす可能性が発生し、中央銀行は、そうした不安定性を阻止するようなスキームを考えなければならなくなる。学習行動を導入した金融政策ルール分析は、中央銀行が抱えるこの種の問題を理論的に検討したものであり、従来分析からは導かれなかった結論を幾つも導いている。ここで、それらを集約し、「人々の知識が不完全で、学習を通じて知識を習得するという想定下では、中央銀行はどのような政策運営を心掛ける必要があるか」という観点から、理論的含意をあらためて取り纏めると、以下の通り。

- (1) 中央銀行は、民間主体の期待が実際には合理的期待から乖離して、不安定化する可能性があることを念頭に置く必要がある。したがって、E-stability を満たす政策パターンを採用する必要がある。E-stability の必要十分条件は、経済構造や政策ルールの形状に依存して決まるが、多くの場合、テイラー・プリンシプルが E-stability の必要条件となるため、中央銀行は、最低限、テイラー・プリンシプルを満たす政策運営を心掛ける必要があると考えられる。
- (2) たとえ政策が E-stability の基準をクリアーしていても、社会厚生を高めるためには、民間主体が不完全知識であることを前提とし、その経済ダイナミクスの中で、より高いパフォーマンスを達成する政策を検討する必要があると考えられる。この点、民間主体の知識が不完全な場合には、インフレの慣性が高まる可能性が高く、その下では、中央銀行はインフレ変動に対してよりアグレッシブな政策を行なうことで、政策パフォーマンスを改善できる可能性がある。
- (3) 中央銀行が構造パラメータに関して高い不確実性を持つならば、その推計誤差を政策に出来るだけ反映しないような政策パターンを心掛ける必要がある。この点、人々がフォワードルッキングであることを前提とすると、インフレ率で

はなく、物価水準のパスをターゲットとする政策は、中央銀行が持つ推計誤差の影響を除去する程度が大きいため、人々の期待の安定化を通じて経済を安定させる効果を持つ可能性があると考えられる⁵⁵。

- (4) 中央銀行は、民間期待の不安定化によって現実の経済を不安定化させることを、出来るだけ早い段階で阻止する必要がある。このためには、少なくとも民間主体との対比で、最近期のデータに対してより敏感になることが望ましいと考えられる。また、期待の安定をもたらすためには、中央銀行が民間主体との対比で、大幅な情報劣位となることは望ましくない。したがって、中央銀行は、最大限の情報収集・情勢判断活動を行ない、出来るだけ多くの情報量を確保して政策運営することが必要と考えられる。

以上の結論を要約すれば、「人々の知識が不完全な下では、中央銀行はアップ・トゥ・デートかつ丹念な情勢判断活動を踏まえた上で、物価安定により力点を置いた政策運営を行うべきである」と纏めることが出来よう。勿論、この結論は、現実の中央銀行の政策運営を考えた場合、必ずしも目新しいものではないと思われるが、学習に基づく金融政策ルール分析は、各国の中央銀行が conventional wisdom として実践している政策行動に対し、これまで十分に提供されてこなかった理論的基礎付けを与えていると見る事が出来よう。

なお、本稿で紹介した研究は、主として E-stability の概念を中心とし、これを満たすための具体的な条件を求めることによって、金融政策の望ましい政策パターンを考察するものが多かった。これは、政策ルールが E-stability の条件を満たさないケースで、経済が合理的期待均衡へと収束しないという critical な問題が生じることを考えれば、学習下の金融政策分析の出発点として妥当なアプローチと言えよう。

しかし、学習を導入した研究により得られるインプリケーションは、E-stability の観点のみに留まらない。本稿でも触れたように、学習の下では、経済のダイナミクスが合理的期待下のそれとは異なる可能性がある。すなわち、学習を導入した分析は、人々の知識習得過程を内生化したものであるが、このプロセスを踏まえている分、既存モデルより現実に近いモデルのダイナミクス(インフレの慣性等)を生み出したり、新たなタイプのダイナミクス(escape dynamics 等)を発生させたりする可能性がある。そうした中で、望ましい金融政策ルールがどのようなものとなるかと言う点については、依然として多くの分析余地が残されているように思われる。

このように考えると、学習を導入した金融政策ルール分析が、今後も有益な実践的政策インプリケーションをもたらす可能性は高いため、中央銀行としては、この分野の研究動向を引き続きフォローしていくことが重要であろう。

以 上

⁵⁵ ただし、5.1.でも論じたように、人々の期待が主としてバックワードルッキングに形成される場合には、物価水準ターゲットの有効性は必ずしも高くない。したがって、現実の政策を考える上では、実際の人々の期待がどの程度バックワードルッキングに形成されているかを考える必要があるが、この点に関する議論は本稿のスコープを超えるため、ここでは捨象することとする。

補論. フォワードルッキング・モデルにおける E-stability の確認方法

本補論では、人々の期待を含む構造モデル(フォワードルッキング・モデル)において、合理的期待均衡解が E-stability を満たすための条件式を導出する方法について、簡単な解説を行なう。なお、本節で紹介するのは、decreasing gain の RLS を用いる場合であり、基本的な流れは、本編 2.3.において、インフレ率決定式を用いて説明したものと同一である。本補論では、同手法を、複数の内生変数を含む一般均衡型モデルに応用する場合の手法について解説する⁵⁶。

本節では、以下の形状を持つフォワードルッキング・モデルを考察の対象とする。

【フォワードルッキング・モデルの構造】

$$X_t = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 \cdot E_t X_{t+1} + \mathbf{a}_2 \cdot X_{t-1} + \mathbf{a}_3 \cdot Z_t \quad (\text{A1})$$

$$Z_t = B \cdot Z_{t-1} + \mathbf{e}_t \quad (\text{A2})$$

[記号] X_t :内生変数ベクトル ($k \times 1$ 行列) Z_t :外生変数ベクトル ($h \times 1$ 行列) \mathbf{e}_t :ホワイトノイズ ($h \times 1$ 行列) $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, B$:パラメータ行列。

このモデルは、内生変数ベクトルの決定式 ((A1)式) と外生変数の決定式 ((A2)式) の2本から成る。t期の内生変数は、t期に形成する t+1期の内生変数に対する期待に依存している。この構造モデルは、本編で取り扱った標準的ニューケインジアン・モデルを包含しており、線形フォワードルッキング・モデルの標準的構造を表している。

(A1)、(A2)式から成るフォワードルッキング・モデルにおける、最もシンプルな合理的期待均衡解 (MSV 解) は、以下の形状で表される。

【合理的期待均衡解 (MSV 解)】

$$X_t = a + b \cdot X_{t-1} + c \cdot Z_t \quad (\text{A3})$$

(A3)式のパラメータ (a, b, c) は、以下の3方程式を満たす値をとる⁵⁷。

$$(I - \mathbf{a}_1 \cdot b - \mathbf{a}_1) \cdot a = \mathbf{a}_0 \quad (\text{A4})$$

$$(I - \mathbf{a}_1 \cdot b) \cdot b = \mathbf{a}_2 \quad (\text{A5})$$

$$(I - \mathbf{a}_1 \cdot b) \cdot c = \mathbf{a}_1 \cdot c \cdot B + \mathbf{a}_3 \quad (\text{A6})$$

(A3)式の形状を前提とすると、人々が形成する PLM (Perceived Law of Motion) は、以下の(A7)式を取る。

⁵⁶ 本補論の解説は、Evans and Honkapohja[2001]の Chapter10 に基づく。

⁵⁷ I は、 $k \times k$ の単位行列。

【PLM (Perceived Law of Motion)】

$$X_t = \tilde{a}_{t-1} + \tilde{b}_{t-1} \cdot X_{t-1} + \tilde{c}_{t-1} \cdot Z_t \quad (A7)$$

(A7)式のパラメータ ($\tilde{a}_{t-1}, \tilde{b}_{t-1}, \tilde{c}_{t-1}$) は、人々が t 期の時点で持つ直近の推計パラメータである。(A7)式を一期進めて期待値を取ったものと(A2)式を(A1)式に代入すると、以下の ALM (Actual Law of Motion) が導ける。

【ALM (Actual Law of Motion)】

$$X_t = (I - \mathbf{a}_1 \cdot \tilde{b}_{t-1})^{-1} \cdot (\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 \cdot \tilde{a}_{t-1}) + (I - \mathbf{a}_1 \cdot \tilde{b}_{t-1})^{-1} \cdot \mathbf{a}_2 \cdot X_{t-1} \\ + (I - \mathbf{a}_1 \cdot \tilde{b}_{t-1})^{-1} \cdot (\mathbf{a}_1 \cdot \tilde{c}_{t-1} \cdot B + \mathbf{a}_3) \cdot Z_t \quad (A8)$$

(A7)、(A8)式より、PLM から ALM への写像関数は、各パラメータ ($\tilde{a}_{t-1}, \tilde{b}_{t-1}, \tilde{c}_{t-1}$) 毎に、以下のように定義される。

$$T_a(\tilde{a}_{t-1}) = (I - \mathbf{a}_1 \cdot \tilde{b}_{t-1})^{-1} \cdot (\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 \cdot \tilde{a}_{t-1}) \quad (A9)$$

$$T_b(\tilde{b}_{t-1}) = (I - \mathbf{a}_1 \cdot \tilde{b}_{t-1})^{-1} \cdot \mathbf{a}_2 \quad (A10)$$

$$T_c(\tilde{c}_{t-1}) = (I - \mathbf{a}_1 \cdot \tilde{b}_{t-1})^{-1} \cdot (\mathbf{a}_1 \cdot \tilde{c}_{t-1} \cdot B + \mathbf{a}_3) \quad (A11)$$

これらの写像関数を前提とすると、合理的期待均衡 (a, b, c) 近傍におけるパラメータの安定性は、以下の ODE (ordinary differential equation) により規定される。

$$\frac{da}{dt} = T_a(a) - a \quad (A12)$$

$$\frac{db}{dt} = T_b(b) - b \quad (A13)$$

$$\frac{dc}{dt} = T_c(c) - c \quad (A14)$$

合理的期待均衡のパラメータ (a, b, c) が E-stability を満たすということは、上記(A12) ~ (A14)式の ODE が (a, b, c) の近傍で局所的に安定であることを意味する。この点を確認するには、写像関数のヤコビアン行列を以下のように導出する⁵⁸。

$$DT_a(a) = \partial \text{vec} T_a / \partial (\text{veca})' = (I - \mathbf{a}_1 \cdot b)^{-1} \cdot \mathbf{a}_1 \quad (A15)$$

$$DT_b(b) = \partial \text{vec} T_b / \partial (\text{vec} b)' = ((I - \mathbf{a}_1 \cdot b)^{-1} \cdot \mathbf{a}_2)' \otimes ((I - \mathbf{a}_1 \cdot b)^{-1} \cdot \mathbf{a}_1) \quad (A16)$$

$$DT_c(c) = \partial \text{vec} T_c / \partial (\text{vecc})' = B' \otimes ((I - \mathbf{a}_1 \cdot b)^{-1} \cdot \mathbf{a}_1) \quad (A17)$$

人々が decreasing gain の RLS に従って学習している場合、合理的期待均衡の E-stability 条件は、以下の定理により導かれる。

⁵⁸ ⊗ は行列のクロネッカー乗算。vec は各行列をベクトル表示に整理し直したものの。

【合理的期待均衡の E-stability に関する定理】

(A1)、(A2)式のモデルの合理的期待均衡 (a, b, c) が、(A9)~(A11)式の写像関数の不動点であるとする。このとき、 (a, b, c) において、(A15)~(A17)式のヤコビアン行列の全ての固有値の実数部分が 1 より小さいならば、合理的期待均衡 (a, b, c) は E-stability を満たす。(A15)~(A17)式の行列の中で、実数部分が 1 よりも大きい固有値を持つ行列が一つでも存在するなら、合理的期待均衡 (a, b, c) は E-stability を満たさない。

(適用例): 標準的ニューケインジアン・モデルにおける E-stability 条件の確認

ここでは、上記の方法に基づいて、標準的ニューケインジアン・モデルの中で、テイラー・ルールを導入した場合の、合理的期待均衡の E-stability の確認を行なうこととする。モデルは、本編 3 節で紹介した、(20)~(24)式の 5 本で構成される。

$$x_t = E_t x_{t+1} - \mathbf{s} \cdot (\hat{i}_t - E_t \hat{p}_{t+1}) + g_t \quad \text{再掲(20)}$$

$$\hat{p}_t = \mathbf{b} \cdot E_t \hat{p}_{t+1} + \mathbf{k} \cdot x_t + u_t \quad \text{再掲(21)}$$

$$g_t = \mathbf{r}^g \cdot g_{t-1} + \mathbf{e}_t^g \quad \text{再掲(22)}$$

$$u_t = \mathbf{r}^u \cdot u_{t-1} + \mathbf{e}_t^u \quad \text{再掲(23)}$$

$$\hat{i}_t = \hat{r}_t + \mathbf{f}_p \cdot \hat{p}_t + \mathbf{f}_x \cdot x_t, \quad \hat{r}_t \equiv \mathbf{s}^{-1} \cdot g_t \quad \text{再掲(24)}$$

まず、(24)式を(20)式に代入すると、以下の式が導ける。

$$x_t = E_t x_{t+1} - \mathbf{s} \cdot (\mathbf{f}_p \cdot \hat{p}_t + \mathbf{f}_x \cdot x_t - E_t \hat{p}_{t+1}) \quad \text{(A18)}$$

ここで、需要ショック (g_t) は消去されるから、(22)式はモデルから消去される。したがって、モデルは(A18)、(21)、(23)式の 3 方程式で構成される。(A18)、(21)式を整理し直すと、以下のように表せる。

$$(1 + \mathbf{s} \cdot \mathbf{f}_x) \cdot x_t + \mathbf{s} \cdot \mathbf{f}_p \cdot \hat{p}_t = E_t x_{t+1} + \mathbf{s} \cdot E_t \hat{p}_{t+1} \quad \text{(A19)}$$

$$-\mathbf{k} \cdot x_t + \hat{p}_t = \mathbf{b} \cdot E_t \hat{p}_{t+1} + u_t \quad \text{(A20)}$$

(A19)、(A20)式を行列表示し、以下のように整理し直す。

$$\begin{pmatrix} x_t \\ \hat{p}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \mathbf{s} \cdot \mathbf{f}_x & \mathbf{s} \cdot \mathbf{f}_p \\ -\mathbf{k} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{s} \\ 0 & \mathbf{b} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_t x_{t+1} \\ E_t \hat{p}_{t+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 + \mathbf{s} \cdot \mathbf{f}_x & \mathbf{s} \cdot \mathbf{f}_p \\ -\mathbf{k} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ u_t \end{pmatrix} \quad \text{(A21)}$$

内生変数ベクトル、外生変数ベクトル、パラメータ行列を以下のように定義する。

$$X_t = \begin{pmatrix} x_t \\ \hat{p}_t \end{pmatrix}, Z_t = \begin{pmatrix} 0 \\ u_t \end{pmatrix}, \mathbf{a}_0 = 0, \mathbf{a}_1 = \frac{1}{1 + \mathbf{s} \cdot \mathbf{f}_x + \mathbf{s} \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{f}_p} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{s} - \mathbf{s} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{f}_p \\ \mathbf{k} & \mathbf{k} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{b} + \mathbf{s} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{f}_x \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{a}_2 = 0, \mathbf{a}_3 = \frac{1}{1 + \mathbf{s} \cdot \mathbf{f}_x + \mathbf{s} \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{f}_p} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{s} \cdot \mathbf{f}_p \\ \mathbf{k} & 1 + \mathbf{s} \cdot \mathbf{f}_x \end{pmatrix} \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{r}'' \end{pmatrix} \quad (\text{A22})$$

このとき、(A22)を(A1)、(A2)式に当てはめれば、前掲の E-stability に関する定理を用いることが出来る。したがって、E-stability 条件を確認するためには、(A15)～(A17)式のヤコビアン行列の固有値を求めれば良い。ここで、 \mathbf{a}_2 がゼロである点に着目し、(A5)式に代入すると、パラメータ行列 \mathbf{b} がゼロ行列となり得ることが分かる。 \mathbf{b} がゼロ行列の場合、(A3)式は先決内生変数 (X_{t-1}) には依存せず、外生変数ベクトル (Z_t) のみに依存するため、MSV 解をとる。したがって、 \mathbf{b} はゼロ行列と考える。このとき、(A15)～(A17)式のヤコビアン行列は、以下の3式となる。

$$DT_a(\mathbf{a}) = (\mathbf{I} - \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b})^{-1} \cdot \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_1 \quad (\text{A23})$$

$$DT_b(\mathbf{b}) = ((\mathbf{I} - \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b})^{-1} \cdot \mathbf{a}_2)' \otimes ((\mathbf{I} - \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b})^{-1} \cdot \mathbf{a}_1) = 0 \quad (\text{A24})$$

$$DT_c(\mathbf{c}) = \mathbf{B}' \otimes ((\mathbf{I} - \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b})^{-1} \cdot \mathbf{a}_1) = \mathbf{B}' \otimes \mathbf{a}_1 \quad (\text{A25})$$

以上より、チェックすべき行列は \mathbf{a}_1 と $\mathbf{B}' \otimes \mathbf{a}_1$ である。行列 \mathbf{a}_1 の固有値をチェックすると、行列 \mathbf{a}_1 の characteristic polynomial は、以下の式で表せる。

$$p(\mathbf{I}) = \mathbf{I}^2 - \frac{1 + \mathbf{k}\mathbf{s} + \mathbf{b} + \mathbf{s} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{f}_x}{1 + \mathbf{s} \cdot \mathbf{f}_x + \mathbf{s} \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{f}_p} \cdot \mathbf{I} + \frac{\mathbf{b}}{1 + \mathbf{s} \cdot \mathbf{f}_x + \mathbf{s} \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{f}_p} \quad (\text{A26})$$

このとき、(A26)式の characteristic roots の実数部分が 1 より小となる必要十分条件は、以下の2式である。

$$\left| \frac{\mathbf{b}}{1 + \mathbf{s} \cdot \mathbf{f}_x + \mathbf{s} \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{f}_p} \right| < 1 \quad (\text{A27})$$

$$\left| \frac{1 + \mathbf{k}\mathbf{s} + \mathbf{b} + \mathbf{s} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{f}_x}{1 + \mathbf{s} \cdot \mathbf{f}_x + \mathbf{s} \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{f}_p} \right| < 1 + \frac{\mathbf{b}}{1 + \mathbf{s} \cdot \mathbf{f}_x + \mathbf{s} \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{f}_p} \quad (\text{A28})$$

割引率 \mathbf{b} が 1 より小さい正の値であり、政策反応度 ($\mathbf{f}_x, \mathbf{f}_p$) は正だから、(A27)式は必ず満たされる。また、(A28)式は、以下の条件式と一致する。

$$\mathbf{f}_p + \frac{1 - \mathbf{b}}{\mathbf{k}} \mathbf{f}_x > 1 \quad (\text{A29})$$

これは、本編 3.2.で説明したテイラー・プリンシプル (前掲(25)式) に他ならない。(A29)式が成立する場合、(A25)式における行列 $\mathbf{b}' \otimes \mathbf{a}_1$ の固有値が 1 より小さいことは、容易に確認出来る。したがって、このモデルの合理的期待均衡が E-stability を満たす必要十分条件は、(A29)式のテイラー・プリンシプルである。

参考文献

- 小田信之・村永淳 [2003]、「自然利子率について：理論と計測」*日本銀行ワーキングペーパーシリーズ*、No.03-J-5。
- Aoki, K. and Nikolov, K. [2003], “Rule-Based Monetary Policy under Central Bank Learning,” *unpublished*.
- Benhabib, J., Schmitt-Grohe, S., and Uribe, M. [2001], “The Perils of Taylor Rules,” *Journal of Economic Theory*, vol.96, pp.40-69.
- Bernanke, B. and Woodford, M. [1997], “Inflation Forecasts and Monetary Policy,” *Journal of Money, Credit and Banking*, vol.29(4), pp.653-684.
- Bullard, J. and Cho, I. [2002], “Escapist Policy Rules,” *Federal Reserve Bank of St. Louis Working Paper*, 2002-002A.
- Bullard, J. and Mitra, K. [2000], “Determinacy, Learnability, and Monetary Policy Inertia,” *Federal Reserve Bank of St. Louis Working Paper*, 2000-030A.
- [2002], “Learning about Monetary Policy Rules,” *Journal of Monetary Economics*, vol.49(6), 1105-1129.
- Bullard, J. and Duffy, J. [2003], “Learning and Structural Change in Macroeconomic Data,” *unpublished*.
- Clarida, R., Galí, J. and Gertler, M. [1999], “The Science of Monetary Policy: A New Keynesian Perspective,” *Journal of Economic Literature*, 37(4), pp.1661-1707.
- Evans, G. and Honkapohja, S. [2001], *Learning and Expectations in Macroeconomics*, Princeton University Press, Princeton and Oxford.
- [2002], “Monetary Policy, Expectations and Commitment,” *CEPR Discussion Papers*, no.3434.
- [2003a], “Expectations and the Stability Problem for Optimal Monetary Policies,” *Review of Economic Studies*, vol.70(4), pp.807-824.
- [2003b], “Policy Interaction, Expectations and the Liquidity Trap,” *Federal Reserve Bank of Atlanta Working Paper*, no.2003-16.
- , and Mitra, K. [2002], “Notes on Agents’ Behavioral Rules Under Adaptive Learning and Recent Studies of Monetary Policy,” *unpublished*.
- Gaspar, V., Smets, F. and Vestin, D. [2003], “Private-sector Learning, Expectations and Persistence: The Role of the Conservative Central Bank,” *unpublished*.
- Giannitsarou, C. [2003], “E-Stability Does Not Imply Learnability,” *unpublished*.
- Honkapohja, S. and Mitra, K. [2002], “Performance of Monetary Policy with Internal Central Bank Forecasting,” *European Central Bank Working Paper*, no.127.
- [2003], “Monetary Policy with Internal Central Bank Forecasting: A Case of Heterogeneous Information,” *unpublished*.
- Howitt, P. [1992], “Interest Rate Control and Nonconvergence to Rational Expectations”, *Journal of Political Economy*, Vol.100(4), pp.776-800.
- Lansing, K. [2000], “Learning about a Shift in Trend Output,” *Federal Reserve Bank of San Francisco Working Paper*, 2000-16.

- Marcet, A. and Sargent, T. [1989], "Convergence of Least-Squares Learning Mechanism in Self-Referential Linear Stochastic Models," *Journal of Economic Theory*, vol.48(2), pp.337-368.
- McCallum, B. [1981], "On Non-Uniqueness in Rational Expectations Models: An Attempt at Perspective," *Journal of Monetary Economics*, vol.11, pp.139-168.
- Orphanides, A. and Williams, J. [2002], "Imperfect Knowledge, Inflation Expectations, and Monetary Policy," *Federal Reserve Board, Finance and Economics Discussion Series*, no.2002-27.
- [2003], "The Decline of Activist Stabilization Policy: Natural Rate Misperceptions, Learning, and Expectations," *unpublished*.
- Preston, B. [2003a], "Learning about Monetary Policy Rules When Long-Horizon Expectations Matter," *unpublished*.
- [2003b], "Adaptive Learning, Forecast-Based Instrument Rules and Monetary Policy," *unpublished*.
- Sargent, T. [1993], *Bounded Rationality in Macroeconomics*, Oxford University Press.
- [1999], *The Conquest of American Inflation*, Princeton University Press.
- Taylor, J. [1999], "An Historical Analysis of Monetary Policy Rules," in John B Taylor eds., *Monetary Policy Rules*, University of Chicago Press.
- Wieland, V. [2000], "Monetary Policy, Parameter Uncertainty and Optimal Learning," *Journal of Monetary Economics*, vol.46(1), pp.199-228.
- Williams, N. [2003], "Escape Dynamics in Learning Models," *unpublished*.
- Woodford, M. [2001], "The Taylor Rule and Optimal Monetary Policy," *American Economic Review*, vol.91(2), pp.232-237.
- [2003], *Interest and Prices*, Princeton University Press.