



日本銀行ワーキングペーパーシリーズ

## 不均一な与信ポートフォリオのリスク計量 におけるモンテカルロ・シミュレーション の効率化

肥後秀明\*

hideaki.higo@boj.or.jp

No.06-J-18  
2006年9月

日本銀行  
〒103-8660 日本橋郵便局私書箱 30 号

\* 金融機構局 金融高度化センター

日本銀行ワーキングペーパーシリーズは、日本銀行員および外部研究者の研究成果をとりまとめたもので、内外の研究機関、研究者等の有識者から幅広くコメントを頂戴することを意図しています。ただし、論文の中で示された内容や意見は、日本銀行の公式見解を示すものではありません。

なお、ワーキングペーパーシリーズに対するご意見・ご質問や、掲載ファイルに関するお問い合わせは、執筆者までお寄せ下さい。

商用目的で転載・複製を行う場合は、予め日本銀行情報サービス局までご相談ください。転載・複製を行う場合は、出所を明記してください。

## 不均一な与信ポートフォリオのリスク計量における モンテカルロ・シミュレーションの効率化

肥後秀明\*

### 【要旨】

与信ポートフォリオの信用リスク計量には、計算負荷の大きいモンテカルロ・シミュレーションが用いられることが多い。本稿では、ポートフォリオを大口債務者と小口債務者のサブ・ポートフォリオに分割し、後者の個別要因を捨象することで計算負荷を軽減するモンテカルロ・シミュレーション法（分割モンテカルロ法）を紹介する。サンプル・ポートフォリオによる試行では、通常モンテカルロ・シミュレーションに比較し 1/15 程度の計算時間で近似精度のよい信用 VaR 値を得ることができた。また、分割モンテカルロ法を適用する過程で、個別要因を捨象できる小口債務者と、そうでない大口債務者の範囲を特定できるため、単なる計算負荷の軽減だけでなく、与信ポートフォリオ全体のリスク管理体制の適切性や効率性を考えるうえでの参考情報を得ることもできる。

\* 日本銀行 金融機構局 金融高度化センター

Tel : 03-3277-1130

E-mail : hideaki.higo@boj.or.jp

本稿に記された意見・見解は筆者個人のものであり、日本銀行および金融機構局の公式見解を示すものではない。有り得べき誤りは全て筆者個人に属する。

## 第1章. はじめに

与信ポートフォリオの信用リスク計量には、計算負荷の大きいモンテカルロ・シミュレーションが用いられることが多い。近年のコンピューターの計算能力の向上に伴い、モンテカルロ・シミュレーションに必要な計算時間は短縮しているが、それでもなお、債務者数が数千～数万に及ぶ日本の一般的な金融機関の与信ポートフォリオについて信用リスク量を計算する際には、数十分から場合によっては数時間の計算時間が必要となる。このように、モンテカルロ・シミュレーション法は計算負荷が大きいため、与信残高の変化（あるいは先行きの変化見通し）に応じて頻繁に信用リスク量を計測することや、計量上の各種パラメータを変更してモンテカルロ・シミュレーションの再計算を繰り返すような分析を行うことは容易ではない。

これに対し、より計算負荷の小さい解析的手法によって信用リスク量を計測しようというアプローチが存在する。例えば、新しいバーゼル合意の内部格付手法でのリスクウェイト関数の基礎となっている ASRF モデル<sup>2</sup>は、マートン型の 1 ファクター・モデルの枠組みにおいて、無限分散ポートフォリオを想定した場合の与信ポートフォリオのリスク量の解析的表現である。また、無限分散ポートフォリオではなく、債務者毎の与信額にばらつきがある不均一なポートフォリオについての解析的近似法として、Martin and Wilde[2002] や Gordy[2004]によりグラニュラリティ調整法が提案されている。さらに、Pykhtin[2004]は、マートン型のマルチファクター・モデルの枠組みでの解析的近似法を提案している。もっとも、これらの解析的手法には、ポートフォリオの不均一性が非常に強い場合や債務者のデフォルト確率が低い場合、また、相関が低い場合等に近似精度が悪化する（Tasche[2005]、安藤[2005]、肥後[2006]）ことが知られており、モンテカルロ・シミュレーションを完全に代替するものではない。

与信ポートフォリオの信用リスク計量において、モンテカルロ・シミュレーション、解析的近似法はそれぞれ長所短所を有しているが、本稿では、それぞれの長所を組み合わせたハイブリッド的な手法を紹介する。具体的には、与信ポートフォリオ全体のうち与信額の大きい債務者については通常のモンテカルロ・シミュレーションと同じ計算プロセスを適用する一方、無限分散ポートフォリオに近似できるような小口債務者については、各債務者の固有リスク部分を捨象し共通ファクターによる期待損失の変動のみをシミュレートすることで、計算負荷を抑えつつ精度の高いリスク計量を行うという手法である。基本的なアイデアは非常にシンプルであり、実装も容易である。

---

<sup>1</sup> 信用リスク量を月次など低頻度で計測している場合にはモンテカルロ・シミュレーションの計算負荷は大きな問題とはならないが、ポートフォリオ全体の信用リスク量を参照しつつ、新規の融資案件の取組みやヘッジ戦略を考えるような機動的なポートフォリオ運営を行う場合等には、信用リスク量を短時間で算出する必要性が高まる。

<sup>2</sup> Asymptotic Single Risk Factor モデル。Basel Committee on Banking Supervision [2005]を参照。

## 第2章. 基本的なアイデア

### (1) モンテカルロ・シミュレーションの計算負荷

まず、モンテカルロ・シミュレーションの計算負荷について簡単に整理する。計算対象となるポートフォリオの債務者数を  $M$  とし、各債務者への貸出から発生する損失（デフォルト時損失もしくは時価下落）が、 $S$  個の共通ファクター  $\bar{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_S\}$  と各債務者の固有ファクター  $\bar{\varepsilon} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_M\}$  の影響を受けるというモデルを考える。一般的なモデルセッティングでは、固有ファクター  $\bar{\varepsilon}$  は共通ファクター  $\bar{X}$  に対して独立であると同時に、各固有ファクター同士も独立とすることが多い。

このモデルの下で、与信ポートフォリオ全体の損失額をパス数  $N$  のモンテカルロ・シミュレーションで算出する場合、相関を考慮した  $S$  個の共通ファクターと、独立な  $M$  個の固有ファクターを表現する乱数を各パスにおいて発生させるので、計算負荷のオーダーは  $O((S^2 + M) \times N)$  である<sup>3</sup>。通常、モデルを選択した時点で共通ファクター数  $S$  は固定されているので、モデルを所与とすると計算負荷のオーダーは  $O(M \times N)$  である。単純に言えば、債務者数  $M$  を倍にする、あるいはパス数  $N$  を倍にするとモンテカルロ・シミュレーションに必要な時間も倍となる。

したがって、モンテカルロ・シミュレーションの計算時間を短縮する最も簡単な方法は、パス数  $N$  を減らすか、債務者数  $M$  を減らすことであるが、パス数  $N$  を削減するとシミュレーションの算出結果の安定性が失われる（収束が悪くなる）。したがって、パス数  $N$  ではなく債務者数  $M$  を削減することで計算負荷を軽減できないかというのが本稿のアイデアの出発点である。

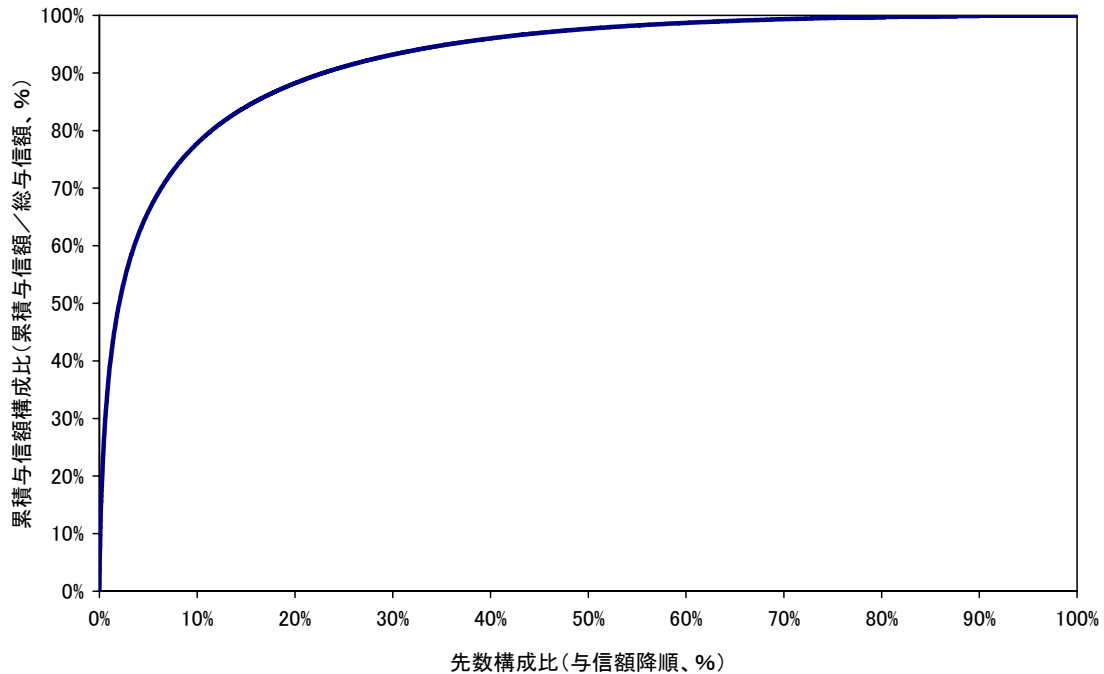
### (2) 現実の与信ポートフォリオの与信額分布

図表1は、本邦金融機関の与信ポートフォリオにおける与信額構成比の累積分布例を示している<sup>4</sup>。グラフは、各債務者を与信額の大きい順に並べたうえで、先数構成比（%）を横軸に、与信額構成比の累積値（%）を縦軸にプロットしたものである。

<sup>3</sup> 正確には、シミュレーションで得られた  $N$  個のポートフォリオ損失額から  $\alpha$  分位点（ $\alpha$  は信頼水準）を特定するための計算負荷を考慮する必要があるが、本文では簡便のためこの計算負荷を除いて表記している。

<sup>4</sup> 金融機構局が保有する各金融機関の与信額データから与信額構成比の累積値を算出し平均化したもの（サンプルとして用いた金融機関数は10行。債務者数は約3,000～30,000）。

( 図表 1 ) 与信額構成比の累積分布の例



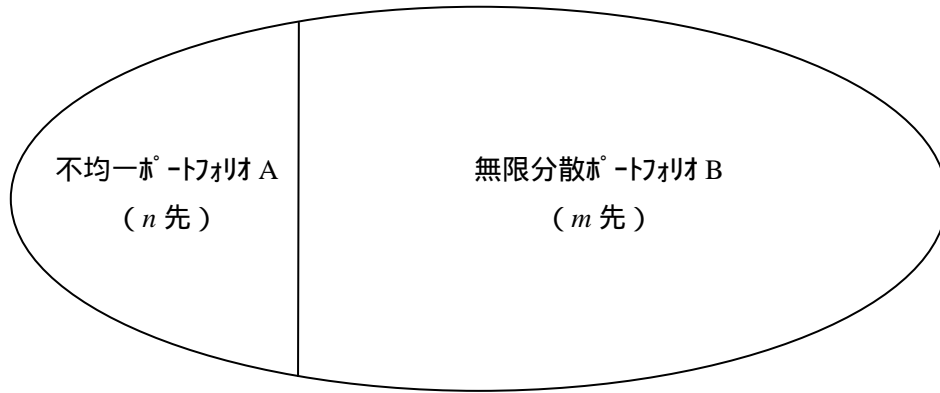
グラフをみると、与信額上位 30% (先数構成比) の債務者で総与信額の 9 割以上を占めており、残る下位 70% の債務者への与信額は合計でも 1 割に満たない。したがって、これら与信額下位のグループに含まれる個々の債務者の与信額はポートフォリオ全体の総与信額に対して極めて小さい。法人向け融資からリテール向け融資まで幅広く扱っている金融機関の多くにおいて、程度の差こそあれ与信額分布は ( 図表 1 ) と類似した不均一性を示す。

このように、与信ポートフォリオの与信額構成が不均一となっている場合、与信ポートフォリオ全体のリスクは主に与信額構成比の大きい債務者から発生し、与信額構成比の小さい債務者がポートフォリオ全体のリスクに与える影響は小さいのではないかと考えられる。

### ( 3 ) 無限分散ポートフォリオを含むポートフォリオの VaR

仮に、与信ポートフォリオ全体のうち一部が、与信額構成比が極めて微小な債務者で構成されるポートフォリオ ( 無限分散ポートフォリオ ) であったとしよう ( 図表 2 )。以下、この与信ポートフォリオについて、そのリスク量がどのように表現されるかを考えたい。

(図表 2) 無限分散ポートフォリオを含む不均一ポートフォリオ



(注) ポートフォリオ全体 (A+B、 $n+m=M$  先) としては不均一ポートフォリオ

まず、ポート A に含まれる債務者数を  $n$ 、ポート B に含まれる債務者数を  $m$  とし、ポートフォリオ全体の債務者数を  $M = n + m$  とする。 $i$  を各債務者を識別するインデックスとし、 $i = 1, 2, \dots, n$  のとき債務者  $i$  はポート A に属し、 $i = n + 1, n + 2, \dots, n + m = M$  のとき債務者  $i$  はポート B に属するとする。

不均一ポート A を構成する各債務者 ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) については、以下の仮定が満たされているとする。

$$\frac{EaD_i}{\sum_{i=1}^M EaD_i} = c_i > 0 \quad (c_i \text{ は定数}) \quad (\text{仮定 1})$$

(注)  $EaD_i$  は債務者  $i$  への与信額 (デフォルト時エクスポージャー)

仮定 1 は、ポート A を構成する  $n$  人の債務者の与信額は、ポートフォリオ全体の与信額の中で常に一定の比率を占めており、無視できないサイズであることを意味している。

一方、ポート B は無限分散ポートフォリオと想定しているので、 $m \rightarrow \infty$  のときに次の 2 つの仮定が満たされているとする (Gordy[2003])、

$$\sum_{i=n+1}^{n+m} EaD_i \rightarrow \infty \quad (\text{仮定 2})$$

$$\frac{EaD_{n+m}}{\sum_{i=n+1}^{n+m} EaD_i} = O\left(m^{-\left(\frac{1}{2} + \zeta\right)}\right) \text{ を満たす } \zeta > 0 \text{ が存在する。} \quad (\text{仮定 3})$$

仮定 2、3 は、ポート B が十分に分散されており、どの債務者の与信額も、ポート B 全体の与信額に比べると無視し得るほど小さいということを意味している。

ここで、各債務者への与信から生じる損失額を  $L_i$  とすると、与信ポートフォリオ全体の損失額  $L_M$  は、ポート A の損失額  $L_n^A$  と、ポート B の損失額  $L_m^B$  の和で表される。

$$\begin{aligned} L_M &\equiv \sum_{i=1}^M L_i \\ &= \sum_{i=1}^n L_i + \sum_{i=n+1}^{n+m} L_i \\ &= L_n^A + L_m^B \end{aligned} \quad (1)$$

$$(\text{注}) \quad L_n^A \equiv \sum_{i=1}^n L_i, \quad L_m^B \equiv \sum_{i=n+1}^{n+m} L_i$$

さらに、ポート B の損失額  $L_m^B$  を、システムティック・リスク部分（共通ファクター  $\bar{X}$  についての条件付期待損失額  $E[L_m^B | \bar{X}]$ ）とアンシステムティック・リスク部分（ $L_m^B$  から  $E[L_m^B | \bar{X}]$  を差し引いた残余）に分解すると、(1)式は次のように表わされる。

$$L_M = L_n^A + \underbrace{E[L_m^B | \bar{X}]}_{\text{ポートBのシステムティック・リスク部分}} + \underbrace{L_m^B - E[L_m^B | \bar{X}]}_{\text{ポートBのアンシステムティック・リスク部分}} \quad (2)$$

このとき、ポート B が無限分散ポートフォリオであると仮定しているので、 $\bar{x}$  を  $\bar{X}$  の実現値とすると以下が成立する（Gordy[2003]）。

$$m \rightarrow \infty \text{ のとき、} L_m^B - E[L_m^B | \bar{x}] \rightarrow 0 \quad (\text{a.s.}) \quad (3)$$

(3)式は、無限分散ポートフォリオであるポート B では、債務者固有の要因が完全に消滅し、共通ファクター  $\bar{X}$  の実現値のみによってポート B の損失額が決定されることを示している。また、(2)式から

$$L_m^B - E[L_m^B | \bar{x}] = L_M - \left( L_n^A + E[L_m^B | \bar{x}] \right) \quad (4)$$

であるので、(3)式と同様に以下が成立する。

$$m \rightarrow \infty \text{ のとき、} L_M - \left( L_n^A + E[L_m^B | \bar{x}] \right) \rightarrow 0 \quad (\text{a.s.}) \quad (5)$$

ここで、任意の確率変数の $\alpha$ 分位点を $q_\alpha(\bullet)$ とすると<sup>5</sup>、(5)式から、以下が成立する(証明は補論参照)<sup>6</sup>。

$$m \rightarrow \infty \text{ のとき、 } q_\alpha(L_M) - q_\alpha\left(L_n^A + E\left[L_m^B \mid \bar{X}\right]\right) \rightarrow 0 \quad (6)$$

つまり、ポート B の債務者数  $m$  が無限大となると、ポートフォリオ全体の損失額の $\alpha$ 分位点(すなわち信頼水準 $\alpha$ での VaR)は、ポート A の損失額 $L_n^A$ とポート B のシステムティック・リスク部分 $E\left[L_m^B \mid \bar{X}\right]$ の和の $\alpha$ 分位点に収束し、ポート B に属する各債務者の固有ファクターの影響は捨象することができる。

#### (4)「十分に細分化されたサブ・ポートフォリオ」の指標

前節の議論は、ポート B が無限分散ポートフォリオであることを前提としていたが、現実には債務者数が無限大となるような無限分散ポートフォリオは存在しない。したがって、債務者数  $M$  が有限な現実のポートフォリオのなかで、無限分散ポートフォリオに近似できるようなサブ・ポートフォリオ(十分に細分化されたサブ・ポートフォリオ)を特定することを考える。

ポート B について前節の仮定(2)および仮定(3)が満たされている場合、 $m \rightarrow \infty$ (同時に $M \rightarrow \infty$ )において以下が成立する(Gordy[2003] Appendix A)。

$$\frac{\sum_{i=n+1}^M EaD_i^2}{\left(\sum_{i=n+1}^M EaD_i\right)^2} \rightarrow 0 \quad (7)$$

(7)式の分母は、ポート B の総与信額の2乗であるが、これをポートフォリオ全体の総与信額の2乗で置換えた場合にも、 $M \rightarrow \infty$ において以下が成立する。

$$\frac{\sum_{i=n+1}^M EaD_i^2}{\left(\sum_{i=1}^M EaD_i\right)^2} \rightarrow 0 \quad (8)$$

したがって、債務者数  $M$  が有限な現実のポートフォリオの中で、

<sup>5</sup>  $q_\alpha(\bullet)$ の定義については補論を参照のこと。

<sup>6</sup> 厳密には、条件付期待損失額 $E\left[L_m^B \mid \bar{X}\right]$ が不連続な関数である場合には、(6)式が成立するとは限らない。



$$\frac{\sum_{i=n+1}^M EaD_i^2}{\left(\sum_{i=1}^M EaD_i\right)^2} = \sum_{i=n+1}^M w_i^2 \approx 0 \quad (9)$$

(注)  $w_i = \frac{EaD_i}{\sum_{i=1}^M EaD_i}$  (ポートフォリオ総与信額に占める債務者*i*の構成比)

を満たすような、与信額構成比の小さい債務者でポート B を構成すればよい<sup>7</sup>。

もっとも、(9)式(ポート B の与信額構成比二乗和)がどの程度小さければ、ポート B に属する各債務者の固有ファクターを捨象してポートフォリオ全体のリスク量を計測(以下、「分割モンテカルロ法」と表記)しても近似精度に問題が生じないかは事前には分らない。このため、次章以降ではサンプル・ポートフォリオを用いて実際に通常のモンテカルロ法と分割モンテカルロ法でそれぞれリスク量を算出して数値比較を行う。一般的に普及しているシミュレーション型の信用リスクモデルとして、第 3 章ではマートン型の 1 ファクター・モデルを、第 4 章では、同じくマートン型のマルチファクター・モデルを適用した試算を行う。

### 第 3 章 デフォルト・モードのマートン型 1 ファクター・モデルでの数値例

#### (1) モデルと計算負荷

マートン型 1 ファクター・モデルでは、共通ファクター  $\bar{X}$  は単変量  $X$  であり、 $X$  および各債務者の固有ファクター  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_M$  は互いに独立な標準正規分布  $N(0,1)$  に従う。この下で、各債務者  $i$  の企業価値変化率  $Y_i$  を以下のように定義する。

$$Y_i = \sqrt{R_i} X + \sqrt{1-R_i} \varepsilon_i \quad (10)$$

(注)  $\sqrt{R_i}$  は  $Y_i$  と  $X$  との相関係数

この  $Y_i$  がある一定の閾値  $N^{-1}(PD_i)$  ( $N^{-1}(\bullet)$  は標準正規分布の分布関数  $N(\bullet)$  の逆関数、 $PD_i$  は債務者  $i$  のデフォルト確率)を下回った場合にデフォルトが発生し、当該債務者から

<sup>7</sup> (7)式が成立するとき(9)式も成立するが、その逆は必ずしも真ではない。もっとも、(9)式が満たされていれば、ポートフォリオ全体の与信額からみてポート B の規模が小さいと言えるため、実務的には(9)式をポート B を特定するための指標として使うことで特段問題は生じないと考えられる。

$EaD_i \times LGD_i$  ( $LGD_i$ は債務者*i*のデフォルト時損失率<sup>8</sup>)だけの損失が生じるとする。したがって、各債務者から生じる損失  $L_i$  は、

$$L_i = EaD_i LGD_i 1_{\{Y_i < N^{-1}(PD_i)\}} \quad (11)$$

であり、 $M$ 人の債務者で構成されるポートフォリオ全体の損失額  $L_M$  は、

$$L_M = \sum_{i=1}^M L_i \quad (12)$$

である。通常のモンテカルロ・シミュレーションでは、この  $L_M$  のサンプルをパス数  $N$  だけ発生させて、信頼水準  $\alpha$  に相当する分位点サンプル ( $q_\alpha(L_M)$ ) を VaR 値とする。

一方、与信ポートフォリオを前章のようにポート A とポート B に分割したうえで、ポート A の損失額とポート B のシステムティック・リスク部分を合計した確率変数を  $L'_M$  とすると、

$$\begin{aligned} L'_M &= L_n^A + E[L_m^B | X] \\ &= \sum_{i=1}^n L_i + E\left[\sum_{i=n+1}^M L_i | X\right] \\ &= \sum_{i=1}^n L_i + \sum_{i=n+1}^M E[L_i | X] \\ &= \sum_{i=1}^n L_i + \sum_{i=n+1}^M EaD_i LGD_i E\left[1_{\{Y_i \leq N^{-1}(PD_i)\}} | X\right] \\ &= \sum_{i=1}^n L_i + \sum_{i=n+1}^M EaD_i LGD_i \Pr\{Y_i < N^{-1}(PD_i) | X\} \\ &= \sum_{i=1}^n L_i + \sum_{i=n+1}^M EaD_i LGD_i \Pr\{\sqrt{R_i} X + \sqrt{1-R_i} \varepsilon_i < N^{-1}(PD_i)\} \\ &= \sum_{i=1}^n L_i + \sum_{i=n+1}^M EaD_i LGD_i N \left( \frac{N^{-1}(PD_i) - \sqrt{R_i} X}{\sqrt{1-R_i}} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

となる。この(13)式で記述された  $L'_M$  の  $\alpha$  分位点 ( $L'_M$  の VaR 値) をシミュレーションによって求めるのが、マートン型 1 ファクター・モデルでの分割モンテカルロ法となる。もっ

とも、(13)式の  $N \left( \frac{N^{-1}(PD_i) - \sqrt{R_i} X}{\sqrt{1-R_i}} \right)$  は  $PD_i$  と  $R_i$  の関数であるから、ポート B に属する

<sup>8</sup> 本章では、簡便のため LGD は債務者毎に確定的 (確率変動しない) と仮定している。

債務者を  $PD_i$  が等しい  $K$  個のグループ ( $k=1,2,\dots,K$ ) と  $R_i$  が等しい  $G$  個のグループ ( $g=1,2,\dots,G$ ) に分けると、(13)式は以下のように書き直すことができる。

$$L'_M = \sum_{i=1}^n L_i + \sum_{k=1}^K \sum_{g=1}^G \left( N \left( \frac{N^{-1}(PD(k)) - \sqrt{R(g)}X}{\sqrt{1-R(g)}} \right) \sum_{i \in \{k,g\}} (EaD_i LGD_i) \right) \quad (14)$$

(注)  $PD(k)$  はグループ  $k$  のデフォルト確率、 $R(g)$  はグループ  $g$  の相関

つまり、ポート B の債務者について、あらかじめデフォルト確率と相関が等しいグループ毎にデフォルト時損失額 ( $EaD \times LGD$ ) を集計しておけば、ポートフォリオ全体のリスク量をパス数  $N$  の分割モンテカル口法で算出する際の計算負荷は  $O(N \times (n + K \times G))$  となる。計算負荷が  $O(N \times M)$  である通常のモンテカル口・シミュレーションと比較すると、計算負荷は  $(n + K \times G)/M$  倍となる。デフォルト確率と相関のグループ数 ( $K \times G$ ) がポートフォリオ全体の債務者数  $M$  に対して十分に小さければ、 $(n + K \times G)/M \approx n/M$  とみなせるので、分割モンテカル口法の計算負荷は、ポート A の先数構成比 ( $n/M$ ) にほぼ比例して軽減される。

## (2) サンプル・ポートフォリオ

サンプル・ポートフォリオの与信額 ( $EaD$ ) 構成は、実際の金融機関でのリスク計量を模擬するため、与信額累積比率が図表 1 と同じになるように各債務者の与信額を調整した 5,000 先の仮想ポートフォリオを用いる。ポートフォリオの総与信額は、以降の数値分析の見通しをよくするため 100.0 とする。

一方、各債務者のデフォルト確率  $PD_i$ 、デフォルト時損失率  $LGD_i$ 、相関  $R_i$  は、様々な与信ポートフォリオの状況についてテストするため、図表 3 の仮想ケース ~ を適用した。ケース ~ はデフォルト確率の低い債務者が多いポートフォリオ (以下、低 PD ポートフォリオ) を、ケース ~ はデフォルト確率の高い債務者が多いポートフォリオ (以下、高 PD ポートフォリオ) を想定したものである<sup>9</sup>。また、それぞれについて、相関  $R_i$  は一律に 0.01、0.1、0.2 の 3 種類を適用し、デフォルト時損失率  $LGD_i$  は債務者毎に 0.2 ~ 1.0 の値を適用する<sup>10</sup>。

<sup>9</sup> 括弧内の先数構成比に従い各債務者の PD をランダムに設定 (ケース毎にランダムに設定)。

<sup>10</sup> 括弧内の先数構成比に従い各債務者の LGD をランダムに設定 (ケース毎にランダムに設定)。

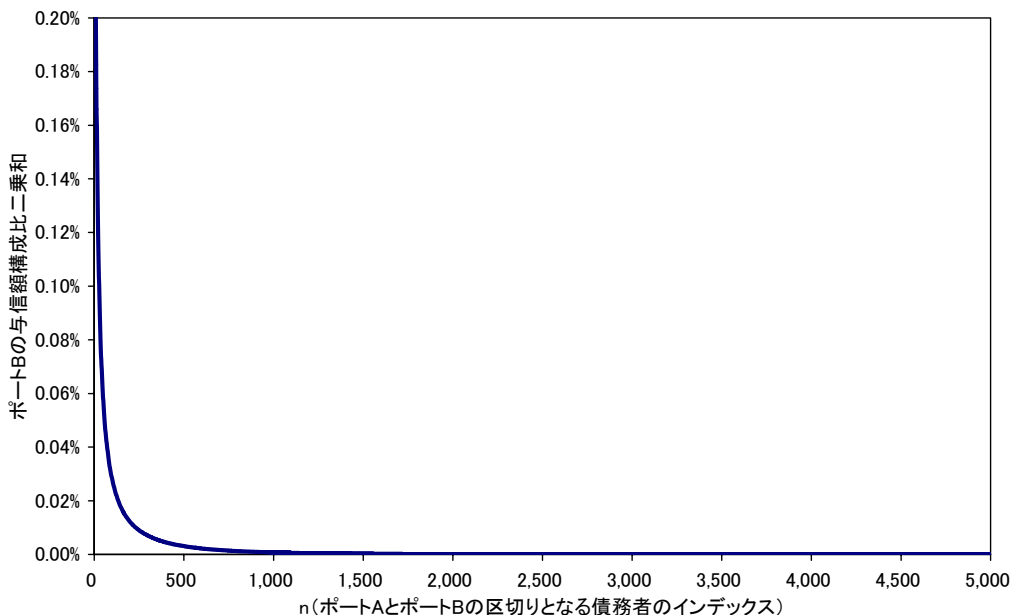
(図表 3) ポートフォリオのケース設定

ケース	PD ( )内は先数構成比	LGD ( )内は先数構成比	R
ケース	0.03%(30%)、0.1%(25%)、 0.5%(20%)、1.0%(15%)、 5.0%(10%) 0.03%(10%)、0.1%(15%)、 0.5%(20%)、1.0%(25%)、 5.0%(30%)	0.2(20%)、0.4(20%)、 0.6(20%)、0.8(20%)、 1.0(20%)	全債務者 0.01
ケース			" 0.10
ケース			" 0.20
ケース			" 0.01
ケース			" 0.10
ケース			" 0.20

(3) ポートフォリオの分割パターンと VaR 値の比較方法

図表 4 は、このサンプル・ポートフォリオについて、各債務者の与信額降順にインデックス  $i=1,2,\dots,5000$  を付し、ポート A とポート B の区切りとなる債務者のインデックス  $n$  によって(9)式の値 (ポート B の与信額構成比の二乗和、 $\sum_{i=n+1}^{5000} w_i^2$ ) がどのように変化するかを示したものである。

(図表 4) ポート B の与信額構成比の二乗和



図表 4 をみると、 $n$  を大きくするとポート B の与信額構成比二乗和は急速に 0 に近づくことが分る。以下では、ポート B の与信額構成比二乗和が適当な区切りのよい値になるよ

うにポート A、B を図表 5 のように 6 通りに分割し、各分割パターンで分割モンテカルロ法を適用した場合の VaR 値と通常のモンテカルロ法で算出した VaR 値を比較する。

(図表 5) サンプル・ポートフォリオの分割パターン

	ポート B の 与信額 構成比 二乗和	ポート A、B の債務者数 ( ) 内は先数構成		(参考) ポート B の 与信額合計 (注)総与信額=100
		ポート A <与信額上位>	ポート B <与信額下位>	
通常の モンテカルロ法	---	5,000 先(100.0%)	0 先(0.0%)	0.0
分割パターン 1	0.003%	513 先( 10.3%)	4,487 先(89.7%)	21.8
分割パターン 2	0.005%	375 先( 7.5%)	4,625 先(92.5%)	27.0
分割パターン 3	0.010%	231 先( 4.6%)	4,769 先(95.4%)	35.4
分割パターン 4	0.030%	92 先( 1.8%)	4,908 先(98.2%)	51.6
分割パターン 5	0.050%	56 先( 1.1%)	4,944 先(98.9%)	60.1
分割パターン 6	0.100%	26 先( 0.5%)	4,974 先(99.5%)	72.2

シミュレーションに伴う数値誤差を小さくするため、通常のモンテカルロ法、分割モンテカルロ法いずれもパス数を 100 万と比較的大きく設定したうえで、信頼水準 95%、99%、99.9% の 3 種類の VaR 値を計算する。各 VaR 値について、通常のモンテカルロ法による VaR 値を「真の値」とみなし、これに対する乖離率をもって分割モンテカルロ法の近似精度の判断基準とする。この際、筆者のこれまでの経験から、不均一な与信ポートフォリオの場合、VaR 値には数%程度のシミュレーション誤差があると認識しているため、乖離率が概ね 1%以内であれば、近似精度が高いとみなすこととする<sup>11</sup>。

#### (4) 計算結果

図表 6 は、ケース ~ での、通常のモンテカルロ法と分割モンテカルロ法の VaR 値の計算結果を示している。網掛け部分は、通常のモンテカルロ法での VaR 値に対する乖離率の絶対値が 1%以上であることを示している。

<sup>11</sup> 「乖離率が概ね 1%以内」という基準は筆者の経験に基づく主観的判断によるものであり、分析目的に応じてより厳しい基準（あるいは逆により緩い基準）を採用し得る。統計的な観点から正確性を期するのであれば、同じパス数で通常のモンテカルロ・シミュレーションを繰り返し実施し、「シミュレーション誤差の範囲」を特定した方がよいと考えられる。もっとも、パス数 100 万といった比較的規模の大きいシミュレーションを繰り返し実行するための計算時間は膨大となるため、本稿では経験的な判断基準に拠ることとした。

(図表6) マートン型1ファクターモデルでのVaR比較(パス数100万)

(ケース ) 低PDポートフォリオ、LGDは0.2~1.0、相関は一律0.01

		95% VaR		99% VaR		99.9% VaR	
			乖離率		乖離率		乖離率
通常のモンテカルロ法		1.241	----	1.666	----	2.216	----
分割 モンテカルロ法	パターン1	1.241	-0.02%	1.664	-0.14%	2.206	-0.43%
	パターン2	1.244	+0.25%	1.667	+0.09%	2.230	+0.64%
	パターン3	1.249	+0.59%	1.656	-0.62%	2.211	-0.23%
	パターン4	1.276	+2.80%	1.642	-1.46%	2.199	-0.77%
	パターン5	1.301	+4.82%	1.616	-2.98%	2.160	-2.51%
	パターン6	1.319	+6.22%	1.568	-5.90%	2.149	-2.98%

(ケース ) 低PDポートフォリオ、LGDは0.2~1.0、相関は一律0.10

		95% VaR		99% VaR		99.9% VaR	
			乖離率		乖離率		乖離率
通常のモンテカルロ法		1.194	----	1.933	----	3.065	----
分割 モンテカルロ法	パターン1	1.197	+0.24%	1.935	+0.06%	3.080	+0.50%
	パターン2	1.192	-0.17%	1.938	+0.26%	3.090	+0.80%
	パターン3	1.194	-0.06%	1.935	+0.08%	3.101	+1.19%
	パターン4	1.179	-1.27%	1.913	-1.07%	3.048	-0.54%
	パターン5	1.166	-2.34%	1.888	-2.34%	3.014	-1.67%
	パターン6	1.107	-7.28%	1.822	-5.77%	2.915	-4.89%

(ケース ) 低PDポートフォリオ、LGDは0.2~1.0、相関は一律0.20

		95% VaR		99% VaR		99.9% VaR	
			乖離率		乖離率		乖離率
通常のモンテカルロ法		1.442	----	2.659	----	4.896	----
分割 モンテカルロ法	パターン1	1.445	+0.19%	2.671	+0.43%	4.881	-0.31%
	パターン2	1.446	+0.27%	2.687	+1.06%	4.919	+0.45%
	パターン3	1.438	-0.31%	2.675	+0.58%	4.893	-0.06%
	パターン4	1.429	-0.93%	2.645	-0.54%	4.902	+0.12%
	パターン5	1.421	-1.47%	2.626	-1.25%	4.806	-1.84%
	パターン6	1.403	-2.75%	2.608	-1.92%	4.758	-2.83%

(ケース ) 高PDポートフォリオ、LGDは0.2~1.0、相関は一律0.01

		95% VaR		99% VaR		99.9% VaR	
			乖離率		乖離率		乖離率
通常のモンテカルロ法		2.512	----	3.320	----	4.293	----
分割 モンテカルロ法	パターン1	2.519	+0.25%	3.323	+0.11%	4.287	-0.16%
	パターン2	2.517	+0.18%	3.319	-0.03%	4.301	+0.18%
	パターン3	2.509	-0.12%	3.313	-0.19%	4.282	-0.26%
	パターン4	2.498	-0.59%	3.298	-0.65%	4.262	-0.72%
	パターン5	2.480	-1.29%	3.281	-1.18%	4.253	-0.93%
	パターン6	2.430	-3.28%	3.194	-3.79%	4.105	-4.40%

(ケース ) 高 PD ポートフォリオ、LGD は 0.2~1.0、相関は一律 0.10

		95% VaR		99% VaR		99.9% VaR	
			乖離率		乖離率		乖離率
通常のモンテカルロ法		3.377	----	5.103	----	7.667	----
分割 モンテカルロ法	パターン 1	3.371	-0.18%	5.088	-0.31%	7.623	-0.57%
	パターン 2	3.374	-0.08%	5.113	+0.19%	7.652	-0.20%
	パターン 3	3.355	-0.65%	5.092	-0.22%	7.632	-0.45%
	パターン 4	3.349	-0.82%	5.064	-0.78%	7.582	-1.10%
	パターン 5	3.349	-0.83%	5.050	-1.05%	7.433	-3.05%
	パターン 6	3.310	-1.98%	4.989	-2.24%	7.392	-3.58%

(ケース ) 高 PD ポートフォリオ、LGD は 0.2~1.0、相関は一律 0.20

		95% VaR		99% VaR		99.9% VaR	
			乖離率		乖離率		乖離率
通常のモンテカルロ法		3.872	----	6.659	----	11.087	----
分割 モンテカルロ法	パターン 1	3.874	+0.04%	6.692	+0.49%	11.107	+0.17%
	パターン 2	3.869	-0.08%	6.636	-0.34%	11.068	-0.17%
	パターン 3	3.873	+0.01%	6.645	-0.21%	11.090	+0.03%
	パターン 4	3.861	-0.29%	6.652	-0.11%	11.104	+0.15%
	パターン 5	3.846	-0.68%	6.583	-1.14%	10.993	-0.85%
	パターン 6	3.822	-1.30%	6.566	-1.40%	11.033	-0.49%

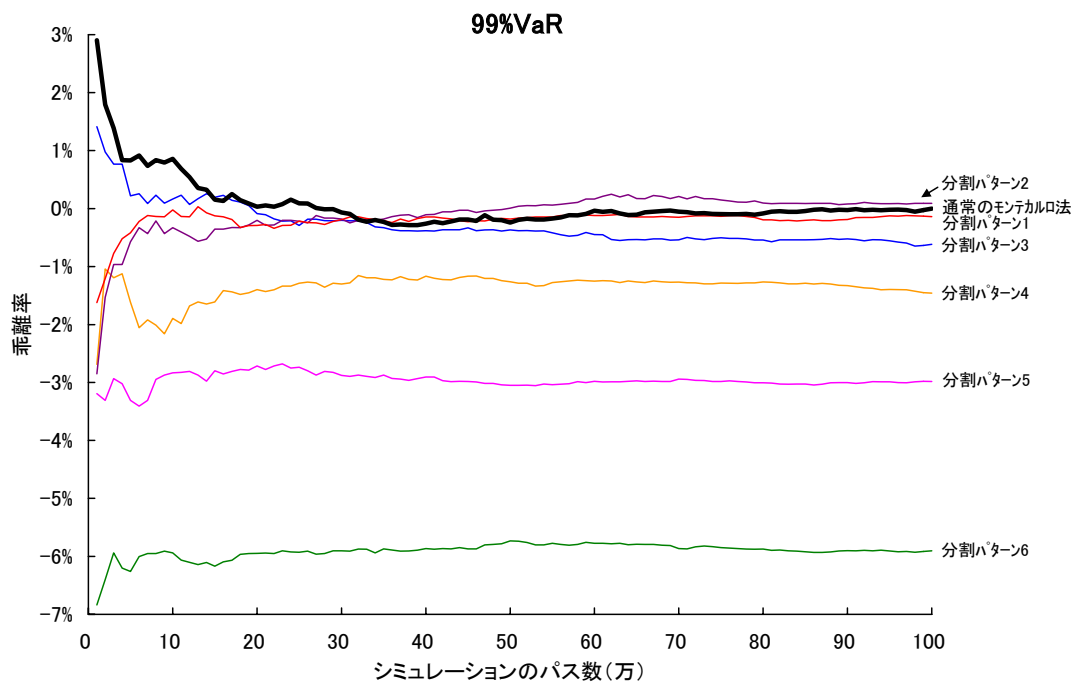
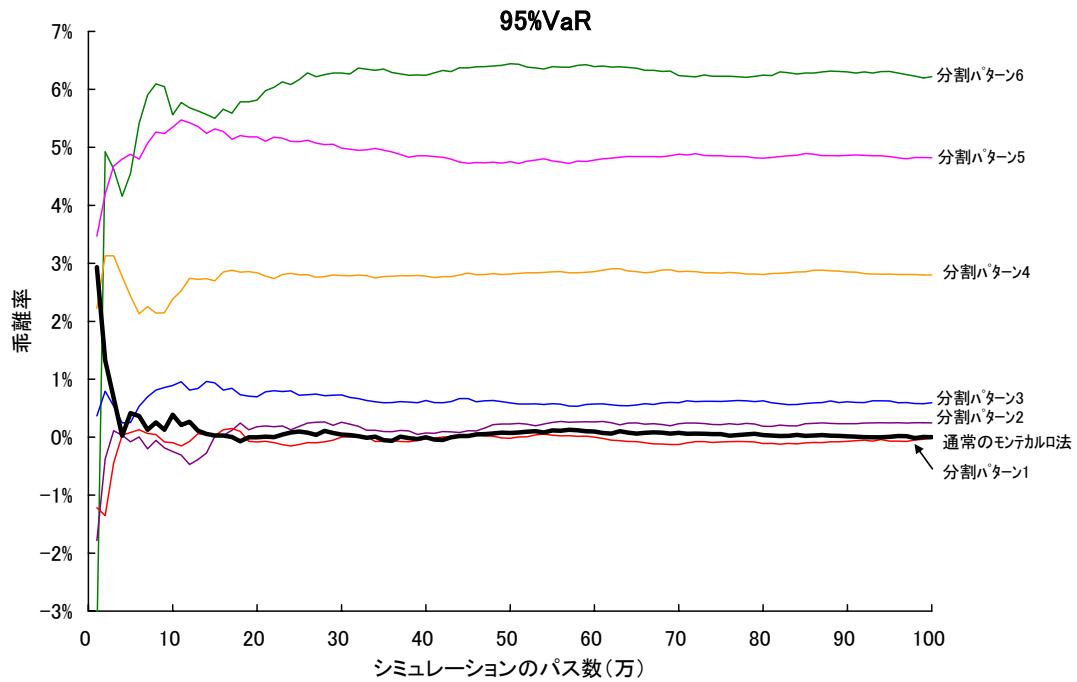
ケースによって多少ばらつきがあるものの、ケース ~ を通じてみれば、ポート B の規模が大きくなる分割パターンにおいて通常のモンテカルロ法での VaR 値からの乖離が大きくなる傾向が見られる。乖離率が概ね 1%以内という判断基準から見ると、通常のモンテカルロ法に比較して近似精度がよいとみなすことができるのは、分割パターン 3(ポート B の債務者数は 4,769 先<先数構成比 95.4%>、与信額構成比二乗和は 0.01%)までと考えられる。

図表 7 は、ケース (低 PD ポート、LGD は 0.2~1.0、相関は一律 0.01) を例として、パス数 100 万のシミュレーションの過程で VaR 値がどのように推移したかを示している。グラフは、分割パターン 1~3 での VaR 値が、通常のモンテカルロ法での VaR 値の近傍に収束していることを示している。

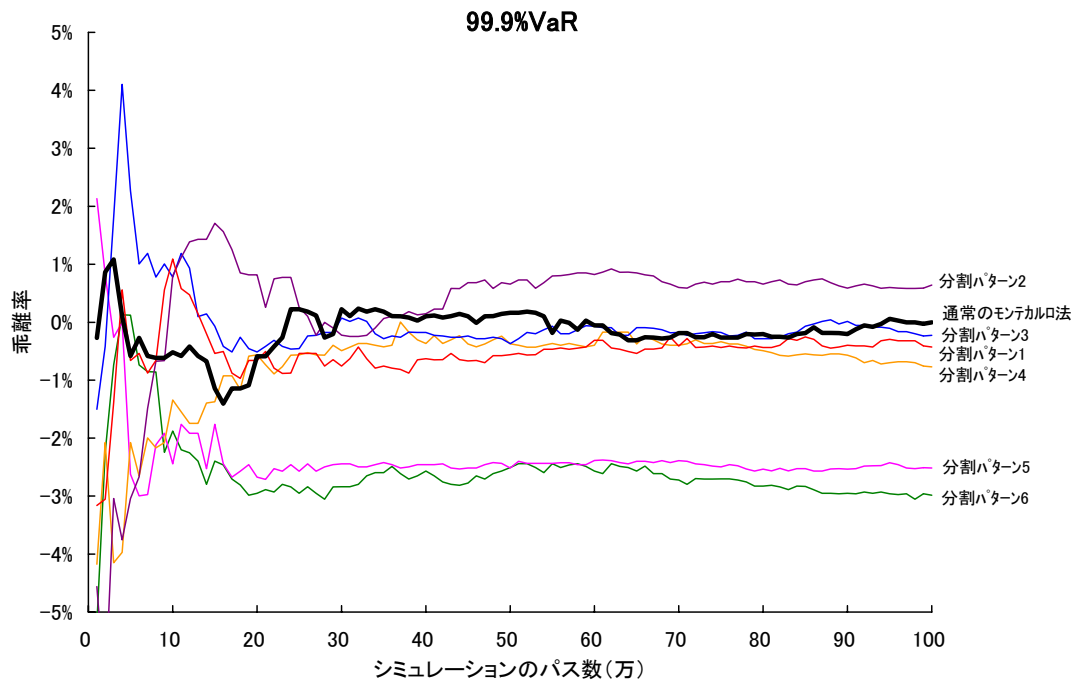
また、図表 8 は、同じくケース について、通常のモンテカルロ法と分割モンテカルロ法(分割パターン 3 および 4)での、それぞれのポートフォリオ損失額の累積確率分布を描いたものである。通常のモンテカルロ法での分布曲線に対し、分割パターン 4 での分布曲線は乖離が目立つ一方、分割パターン 3 での分布曲線は、損失額がゼロに近い一部の領域を除き通常のモンテカルロ法での分布曲線にほぼ一致している。つまり、分割パターン 3 での分割モンテカルロ法によって、信頼水準 95%、99%、99.9%の VaR 値のみならず、ポートフォリオの損失分布全体も高い精度で近似できたことが示されている。

(図表7) VaR の収束状況 (ケース )

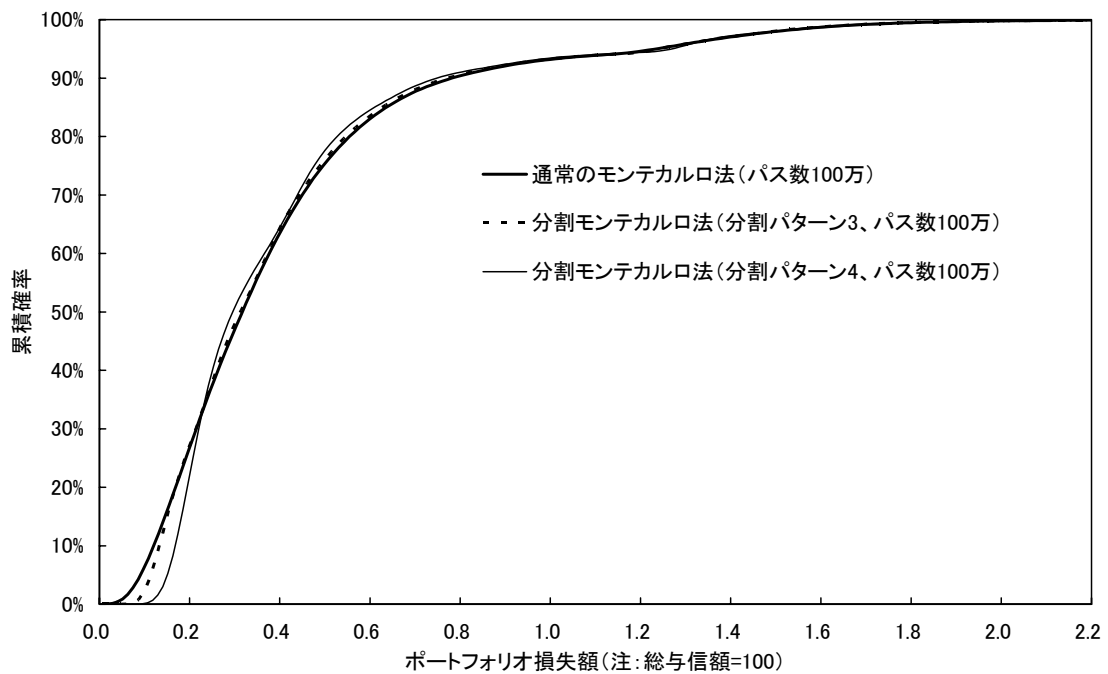
(注) 縦軸の「乖離率」は、100 万パス終了時点での通常のモンテカルロ法での VaR 値に対する乖離率を表している。







( 図表 8 ) ポートフォリオ損失額の累積確率分布の比較 ( ケース )



なお、分割パターン 3 でのポート A の債務者数は与信額上位 231 先（先数構成比 4.6%）であり、計算時間は通常のモンテカルロ法の約 1/15（6.3%）であった<sup>12</sup>。

（図表 9）分割モンテカルロ法の計算時間（ケース ~ の平均値）

	ポート B の 与信額 構成比 二乗和	ポート A、B の債務者数 ( ) 内は先数構成比		計算時間 (注)通常のモンテ カルロ法を 1 とし た場合
		ポート A <与信額上位>	ポート B <与信額下位>	
通常のモンテカルロ法	---	5,000 先(100.0%)	0 先(0.0%)	1.000
分割パターン 1	0.003%	513 先( 10.3%)	4,487 先(89.7%)	0.119
分割パターン 2	0.005%	375 先( 7.5%)	4,625 先(92.5%)	0.092
分割パターン 3	0.010%	231 先( 4.6%)	4,769 先(95.4%)	0.063
分割パターン 4	0.030%	92 先( 1.8%)	4,908 先(98.2%)	0.036
分割パターン 5	0.050%	56 先( 1.1%)	4,944 先(98.9%)	0.030
分割パターン 6	0.100%	26 先( 0.5%)	4,974 先(99.5%)	0.024

### （5）解析的近似法との比較

参考として、図表 10 にケース ~ それぞれについて Martin and Wilde[2002]、Gordy[2004]らにより提唱されているグラニュラリティ調整法による解析的近似解<sup>13</sup>を適用した場合の VaR 値と、パス数 100 万での通常のモンテカルロ法による VaR 値からの乖離率を示した。

（図表 10）グラニュラリティ調整法による解析的近似解のパフォーマンス

ケース	95% VaR			99% VaR			99.9% VaR		
	通常の モンテカルロ法	解析的近似		通常の モンテカルロ法	解析的近似		通常の モンテカルロ法	解析的近似	
		乖離率	乖離率		乖離率	乖離率			
	1.241	1.509	+21.6%	1.666	2.010	+20.6%	2.216	2.600	+17.4%
	1.194	1.203	+0.7%	1.933	1.890	-2.2%	3.065	2.986	-2.6%
	1.442	1.432	-0.8%	2.659	2.644	-0.6%	4.896	4.859	-0.8%
	2.512	2.891	+15.1%	3.320	3.695	+11.3%	4.293	4.654	+8.4%
	3.377	3.349	-0.8%	5.103	5.008	-1.9%	7.667	7.458	-2.7%
	3.872	3.874	+0.0%	6.659	6.628	-0.5%	11.087	11.043	-0.4%

グラニュラリティ調整法は計算負荷が極めて小さい（計算時間は数秒）うえに、相関が比較的高いケース（ケース、ケース）での乖離率は最大でも約 1%程度と近似精度は良

<sup>12</sup> ちなみに、筆者が実装したプログラムでサンプル・ポートフォリオ（債務者数 5,000 社）に対し、パス数 100 万の通常のモンテカルロ法を適用した場合の計算時間は 112 分（ケース ~ の平均値）。分割パターン 3 での分割モンテカルロ法の計算時間は約 7 分（"）であった。プログラムは C++言語により作成。PC の OS は Microsoft 社の Windows 2000、CPU は Intel 社 Celeron 2.00GHz、RAM は 521MB である。

<sup>13</sup> グラニュラリティ調整法のプログラムを実装する際には、安藤[2005]を参考とした。

好である。もっとも、相関が低いケース（ケース 1、ケース 2）では近似精度が悪化している。特に、低 PD ポートフォリオを対象としたケース 2 での乖離率は約 20%と極めて大きい。

分割モンテカルロ法は、計算負荷という点ではグラニューラリティ調整法に劣るものの、グラニューラリティ調整法では近似精度が悪化する状況（相関が低い、あるいは PD が低い債務者が多いポートフォリオ）でも、良好な近似精度を得られるというのが特徴点と言える。

#### 第4章 デフォルト・モードのマートン型マルチファクター・モデルでの数値例

##### (1) モデルと計算負荷

デフォルト・モードのマートン型マルチファクター・モデルとして、以下のようなモデルを考える。まず、共通ファクター  $\bar{X}$  は以下のような多変量正規分布に従う  $S$  個の確率変数とする。

$$\bar{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_S\} \sim N(0, Q) \quad (15)$$

(注)  $Q$  は共通ファクターの相関行列

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{1,2} & \cdots & \rho_{1,S} \\ \rho_{S,1} & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \rho_{S-1,S} \\ \rho_{S,1} & \cdots & \rho_{S,S-1} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ただし } \rho_{i,j} = \rho_{j,i}$$

$s = 1, 2, \dots, S$  はセクター（業種・地域等）を表し、各債務者  $i$  の企業価値変化率  $Y_i$  を、当該債務者が属するセクターのファクター  $X_{s\{i \in s\}}$  と、それと独立な固有ファクター  $\varepsilon_i$  によって以下のように定義する。

$$Y_i = \sqrt{R_{i,s}} X_s + \sqrt{1 - R_{i,s}} \varepsilon_i \quad \text{ただし、} i \in s \quad (16)$$

(注)  $\sqrt{R_{i,s}}$  は  $Y_i$  と  $X_s$  との相関係数（セクター内相関係数）

各債務者の固有ファクター  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_M$  が互いに独立な標準正規分布に従い、 $Y_i$  がある一定の閾値  $N^{-1}(PD_i)$  を下回った場合に、当該債務者から  $EaD_i \times LGD_i$  だけの損失が生じ

るといのは 1 ファクター・モデルと同様である。

各債務者から生じる損失  $L_i$  は、1 ファクター・モデルと同様に、

$$L_i = EaD_i LGD_i 1_{\{Y_i < N^{-1}(PD_i)\}} \quad (17)$$

であり<sup>14</sup>、 $M$  人の債務者で構成されるポートフォリオ全体の損失額  $L_M$  は、

$$L_M = \sum_{i=1}^M L_i \quad (18)$$

である。

一方、ポート A の損失額とポート B のシステムティック・リスク部分を合計した確率変数  $L'_M$  は、

$$\begin{aligned} L'_M &= L_n^A + E[L_m^B | \bar{X}] \\ &= \sum_{i=1}^n L_i + E\left[\sum_{i=n+1}^M L_i | \bar{X}\right] \\ &= \sum_{i=1}^n L_i + \sum_{i=n+1}^M E[L_i | \bar{X}] \\ &= \sum_{i=1}^n L_i + \sum_{i=n+1}^M EaD_i LGD_i E\left[1_{\{Y_i \leq N^{-1}(PD_i)\}} | \bar{X}\right] \\ &= \sum_{i=1}^n L_i + \sum_{i=n+1}^M EaD_i LGD_i \Pr\{Y_i < N^{-1}(PD_i) | X_{s\{i \in s\}}\} \\ &= \sum_{i=1}^n L_i + \sum_{i=n+1}^M EaD_i LGD_i \Pr\{\sqrt{R_{i,s}} X_s + \sqrt{1-R_{i,s}} \varepsilon_i < N^{-1}(PD_i)\} \\ &= \sum_{i=1}^n L_i + \sum_{i=n+1}^M EaD_i LGD_i N\left(\frac{N^{-1}(PD_i) - \sqrt{R_{i,s}} X_s}{\sqrt{1-R_{i,s}}}\right) \end{aligned} \quad (19)$$

となる。この(19)式で記述された  $L'_M$  の  $\alpha$  分位点 ( $L'_M$  の VaR 値) をシミュレーションによって求めるのが、マートン型マルチファクター・モデルでの分割モンテカルロ法となる。

ただし、 $N\left(\frac{N^{-1}(PD_i) - \sqrt{R_{i,s}} X_s}{\sqrt{1-R_{i,s}}}\right)$  は  $s$ 、 $PD_i$ 、 $R_{i,s}$  に依存しているので、ポート B に属す

る各債務者をセクター  $s$  ごとに  $PD_i$  が等しい  $K$  個のグループと  $R_{i,s}$  が等しい  $G$  個のグルー

<sup>14</sup> 前章と同様に、LGD は債務者毎に確定的 (確率変動しない) と仮定している。

ブに分けると、(19)式は以下のように書き直すことができる。

$$L'_M = \sum_{i=1}^n L_i + \sum_{s=1}^S \sum_{k=1}^K \sum_{g=1}^G \left( N \left( \frac{N^{-1}(PD(k)) - \sqrt{R_s(g)} X_s}{\sqrt{1 - R_s(g)}} \right) \sum_{i \in \{s,k,g\}} (EaD_i LGD_i) \right) \quad (20)$$

(注)  $PD(k)$ はグループ  $k$  のデフォルト確率、 $R_s(g)$ はグループ  $g$  の  $X_s$  に対する相関

ポート B について、あらかじめセクター毎にデフォルト確率とセクター内相関が等しい債務者グループのデフォルト時損失額 ( $EaD \times LGD$ ) を集計すれば、(20)式を用いた場合の分割モンテカルロ法の計算負荷は  $O(N \times (n + S \times K \times G))$  となる。1 ファクター・モデルの場合 (14)式と比較すると、(20)式右辺第 2 項での場合分けの数がセクター数倍だけ増加するため計算効率は悪化するが、ポートフォリオ全体の債務者数  $M$  に比較して集計グループ数 ( $S \times K \times G$ ) が相対的に小さければ、1 ファクター・モデルの場合と同様に、分割モンテカルロ法の計算負荷はポート A の先数構成比 ( $n/M$ ) にほぼ比例して軽減される。

## (2) サンプル・ポートフォリオ

サンプル・ポートフォリオの与信額 ( $EaD$ ) 構成は、前章と同じ仮想ポートフォリオ (5,000 先) を用いる。業種を表すセクターの数は 10 とし、10 個の共通ファクター  $\bar{X}$  は図表 11 の相関行列 (TOPIX の業種別株価指数<sup>15</sup>から適当に 10 業種を選択して作成したもの) に従うと仮定する。

(図表 11) 共通ファクターの相関行列

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$	$X_8$	$X_9$	$X_{10}$
$X_1$	1	0.38	0.44	0.48	0.59	0.23	0.50	0.38	0.45	0.44
$X_2$	0.38	1	0.48	0.40	0.61	0.42	0.57	0.67	0.48	0.63
$X_3$	0.44	0.48	1	0.59	0.70	0.30	0.54	0.48	0.56	0.60
$X_4$	0.48	0.40	0.59	1	0.64	0.26	0.51	0.41	0.48	0.45
$X_5$	0.59	0.61	0.70	0.64	1	0.53	0.83	0.43	0.73	0.77
$X_6$	0.23	0.42	0.30	0.26	0.53	1	0.55	0.32	0.41	0.50
$X_7$	0.50	0.57	0.54	0.51	0.83	0.55	1	0.45	0.85	0.85
$X_8$	0.38	0.67	0.48	0.41	0.43	0.32	0.45	1	0.29	0.50
$X_9$	0.45	0.48	0.56	0.48	0.73	0.41	0.85	0.29	1	0.80
$X_{10}$	0.44	0.63	0.60	0.45	0.77	0.50	0.85	0.50	0.80	1

与信ポートフォリオの各債務者のデフォルト確率  $PD$ 、デフォルト時損失率  $LGD$ 、所属するセクター  $s$ 、セクター内相関  $R_s$  は、(図表 12)の仮想ケース ~ を適用した。前章と同様に、ケース ~ はデフォルト確率の低い債務者が多いポートフォリオを、ケース ~ は  $PD$  の高い債務者が多いポートフォリオを想定したものである。

<sup>15</sup> 2001 年初 ~ 2005 年末の月次データ。

(図表 12) ポートフォリオのケース設定

ケース	PD ( )内は先数構成比 <sup>16</sup>	LGD ( )内は先数 構成比 <sup>17</sup>	s (セクター) <sup>18</sup>	R <sub>s</sub> (セクター内相関)
ケース	0.03%(30%)、0.1%(25%)、	0.2(20%) 0.4(20%) 0.6(20%) 0.8(20%) 1.0(20%)	債務者の 10%ずつを 10個 のセクターに 割当	全債務者 0.01
ケース	0.5%(20%)、1.0%(15%)、			" 0.10
ケース	5.0%(10%)			" 0.20
ケース	0.03%(10%)、0.1%(15%)、			" 0.01
ケース	0.5%(20%)、1.0%(25%)、			" 0.10
ケース	5.0%(30%)			" 0.20

### (3) ポートフォリオの分割パターンと VaR 値の比較方法

ポートフォリオの分割パターンは、1 ファクター・モデルでの分割パターン(図表 5)と同じものを使用した。VaR の比較方法も前章と同じ方法を採用した。

### (4) 計算結果

図表 13 は、マルチファクター・モデルの下での通常のモンテカルロ法と分割モンテカルロ法での VaR 値を比較したものである。網掛け部分は、図表 6 と同様に通常のモンテカルロ法での VaR 値に対する乖離率の絶対値が 1%以上であることを示している。

(図表 13) マートン型マルチファクター・モデルでの VaR 値の比較 (パス数 100 万)

(ケース ) 低 PD ポートフォリオ、LGD は 0.2~1.0、セクター内相関は一律 0.01

	95% VaR		99% VaR		99.9% VaR		
		乖離率		乖離率		乖離率	
通常のモンテカルロ法	1.333	----	1.816	----	2.427	----	
分割 モンテカルロ法	パターン 1	1.334	+0.09%	1.811	-0.23%	2.420	-0.27%
	パターン 2	1.338	+0.44%	1.819	+0.21%	2.431	+0.18%
	パターン 3	1.338	+0.37%	1.812	-0.22%	2.421	-0.25%
	パターン 4	1.358	+1.89%	1.818	+0.11%	2.402	-1.03%
	パターン 5	1.384	+3.87%	1.835	+1.07%	2.387	-1.62%
	パターン 6	1.410	+5.83%	1.636	-9.90%	2.333	-3.85%

<sup>16</sup> 括弧内の先数構成比に従い各債務者の PD をケース毎にランダムに設定(前章でのケース ~ とは異なる PD をそれぞれ設定)。

<sup>17</sup> 括弧内の先数構成比に従い各債務者の LGD をケース毎にランダムに設定(前章でのケース ~ とは異なる LGD をそれぞれ設定)。

<sup>18</sup> ケース毎に各債務者のセクターをランダムに設定。

(ケース ) 低 PD ポートフォリオ、LGD は 0.2～1.0、セクター内相関は一律 0.10

		95% VaR		99% VaR		99.9% VaR	
			乖離率		乖離率		乖離率
通常のモンテカルロ法		1.899	----	2.807	----	4.011	----
分割 モンテカルロ法	パターン 1	1.903	+0.23%	2.804	-0.12%	3.998	-0.34%
	パターン 2	1.899	+0.00%	2.806	-0.04%	4.036	+0.61%
	パターン 3	1.897	-0.10%	2.811	+0.14%	4.020	+0.22%
	パターン 4	1.893	-0.34%	2.801	-0.20%	4.000	-0.28%
	パターン 5	1.884	-0.81%	2.788	-0.67%	3.994	-0.42%
	パターン 6	1.848	-2.68%	2.747	-2.15%	3.966	-1.13%

(ケース ) 低 PD ポートフォリオ、LGD は 0.2～1.0、セクター内相関は一律 0.20

		95% VaR		99% VaR		99.9% VaR	
			乖離率		乖離率		乖離率
通常のモンテカルロ法		1.442	----	2.354	----	3.840	----
分割 モンテカルロ法	パターン 1	1.442	-0.03%	2.354	+0.00%	3.841	+0.02%
	パターン 2	1.444	+0.14%	2.350	-0.17%	3.826	-0.34%
	パターン 3	1.437	-0.37%	2.345	-0.38%	3.834	-0.15%
	パターン 4	1.430	-0.82%	2.332	-0.94%	3.833	-0.18%
	パターン 5	1.428	-0.93%	2.328	-1.12%	3.841	+0.03%
	パターン 6	1.390	-3.59%	2.262	-3.90%	3.710	-3.38%

(ケース ) 高 PD ポートフォリオ、LGD は 0.2～1.0、セクター内相関は一律 0.01

		95% VaR		99% VaR		99.9% VaR	
			乖離率		乖離率		乖離率
通常のモンテカルロ法		2.443	----	3.276	----	4.357	----
分割 モンテカルロ法	パターン 1	2.437	-0.26%	3.271	-0.17%	4.342	-0.35%
	パターン 2	2.436	-0.30%	3.263	-0.42%	4.337	-0.44%
	パターン 3	2.432	-0.44%	3.266	-0.31%	4.340	-0.39%
	パターン 4	2.422	-0.87%	3.241	-1.07%	4.303	-1.23%
	パターン 5	2.412	-1.28%	3.232	-1.35%	4.305	-1.18%
	パターン 6	2.429	-0.59%	3.199	-2.37%	4.286	-1.63%

(ケース ) 高 PD ポートフォリオ、LGD は 0.2～1.0、セクター内相関は一律 0.10

		95% VaR		99% VaR		99.9% VaR	
			乖離率		乖離率		乖離率
通常のモンテカルロ法		2.621	----	4.084	----	5.967	----
分割 モンテカルロ法	パターン 1	2.620	-0.06%	4.086	+0.06%	5.948	-0.31%
	パターン 2	2.619	-0.08%	4.100	+0.40%	5.923	-0.72%
	パターン 3	2.618	-0.13%	4.087	+0.09%	5.941	-0.42%
	パターン 4	2.585	-1.40%	4.054	-0.73%	5.909	-0.96%
	パターン 5	2.579	-1.63%	4.052	-0.78%	5.836	-2.19%
	パターン 6	2.537	-3.22%	4.013	-1.73%	5.843	-2.08%

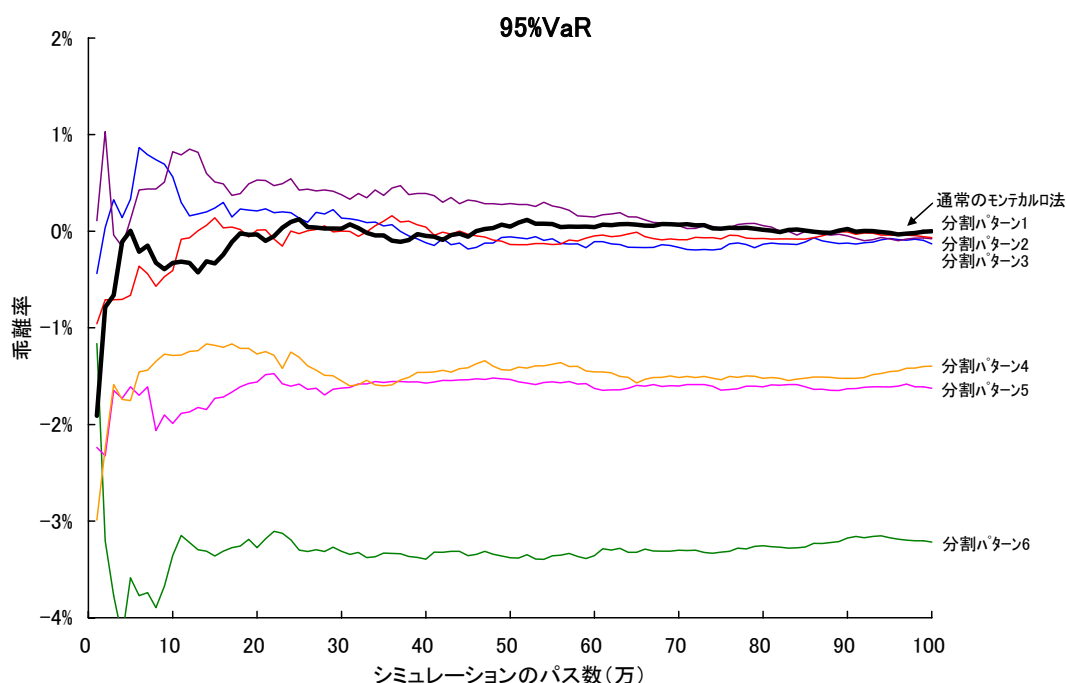
( ケース ) 高 PD ポートフォリオ、LGD は 0.2 ~ 1.0、セクター内相関は一律 0.20

		95% VaR		99% VaR		99.9% VaR	
			乖離率		乖離率		乖離率
通常のモンテカルロ法		3.397	----	5.548	----	8.473	----
分割 モンテカルロ法	パターン 1	3.402	+0.14%	5.559	+0.20%	8.565	+1.08%
	パターン 2	3.395	-0.06%	5.549	+0.01%	8.549	+0.90%
	パターン 3	3.391	-0.20%	5.523	-0.46%	8.480	+0.07%
	パターン 4	3.375	-0.66%	5.531	-0.32%	8.475	+0.02%
	パターン 5	3.363	-1.02%	5.529	-0.34%	8.444	-0.34%
	パターン 6	3.316	-2.41%	5.450	-1.77%	8.361	-1.32%

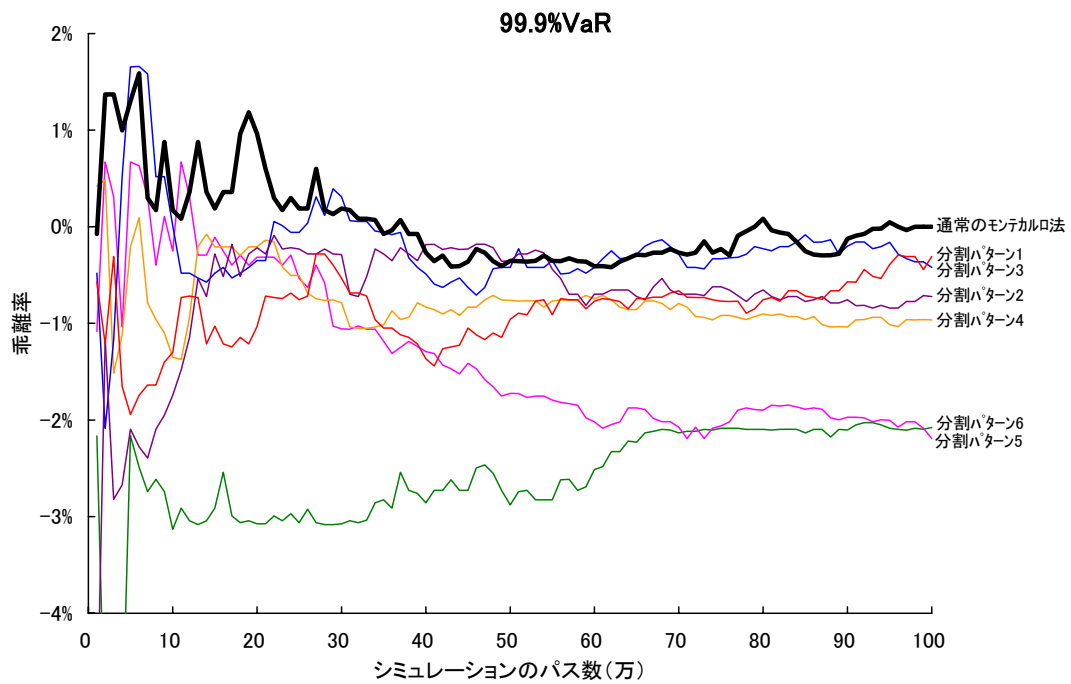
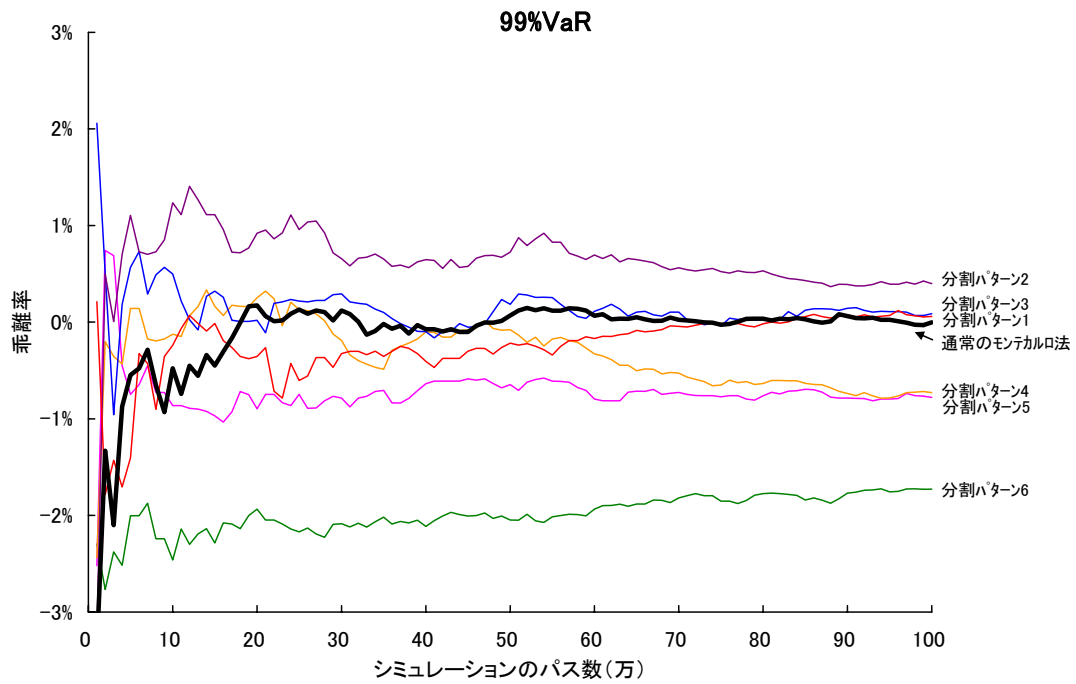
ケース ~ を通じてみると、前章と同様に、分割パターン 3 (ポート B の債務者数は 4,769 先 < 先数構成比 95.4% >、与信額構成比二乗和は 0.01%) までであれば、通常のモンテカルロ法に対する乖離率は概ね 1% 以内という結果が得られた。

図表 14 は、ケース (高 PD ポートフォリオ、LGD は 0.2 ~ 1.0、セクター内相関は一律 0.10) を例として、パス数 100 万のシミュレーションの過程での VaR 値の収束状況を示している。前章と同様に、分割パターン 1 ~ 3 での VaR 値が通常のモンテカルロ法での VaR 値の近傍に収束していることが示されている。

( 図表 14 ) VaR の収束状況 ( ケース )

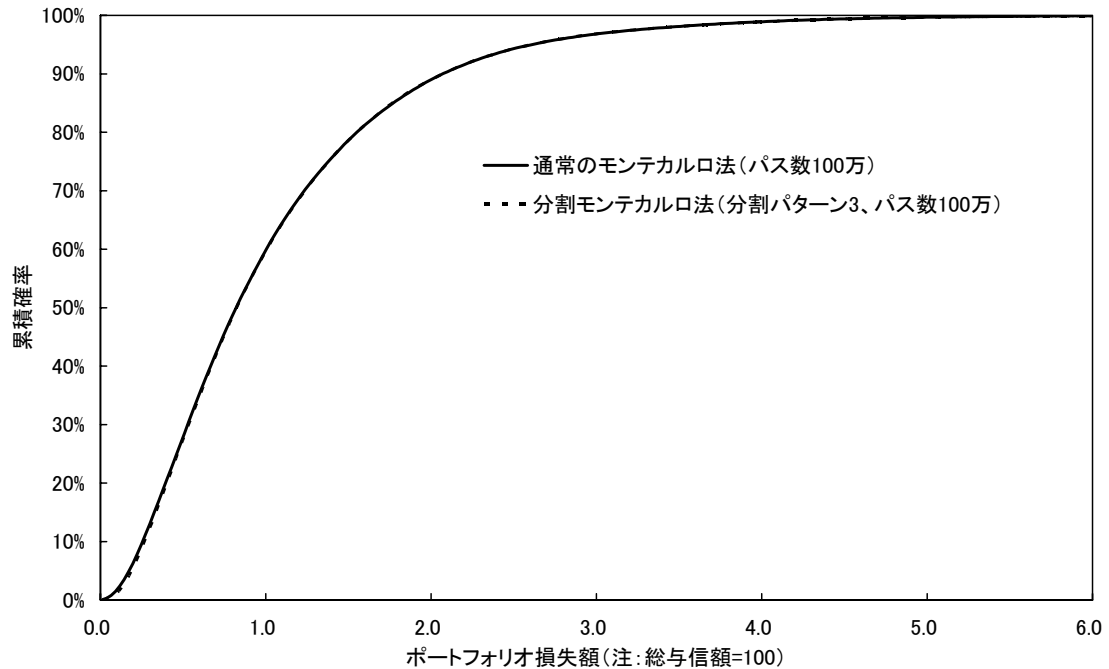






図表 15 は、同じくケース について、通常のモンテカルロ法と分割モンテカルロ法（分割パターン 3）での、それぞれのポートフォリオ損失額の累積確率分布を描いたものである。2 つの分布曲線は、グラフ上見分けがつかないほどに一致しており、分割モンテカルロ法（分割パターン 3）によって、ポートフォリオの損失分布全体も高い精度で近似できたことが示されている。

(図表 15) ポートフォリオ損失額の累積確率分布の比較 (ケース )



なお、分割パターン 3 での分割モンテカルロ法の計算時間は、通常のモンテカルロ法の約 1/15 (6.9%) であった。

(図表 16) 分割モンテカルロ法の計算時間 (ケース ~ の平均値)

	ポート B の 与信額 構成比 二乗和	ポート A、B の債務者数 ( ) 内は先数構成		計算時間 (注)通常のモンテ カルロ法を 1 とし た場合
		ポート A <与信額上位>	ポート B <与信額下位>	
通常のモンテカルロ法	---	5,000 先(100.0%)	0 先(0.0%)	1.000
分割パターン 1	0.003%	513 先( 10.3%)	4,487 先(89.7%)	0.124
分割パターン 2	0.005%	375 先( 7.5%)	4,625 先(92.5%)	0.097
分割パターン 3	0.010%	231 先( 4.6%)	4,769 先(95.4%)	0.069
分割パターン 4	0.030%	92 先( 1.8%)	4,908 先(98.2%)	0.042
分割パターン 5	0.050%	56 先( 1.1%)	4,944 先(98.9%)	0.035
分割パターン 6	0.100%	26 先( 0.5%)	4,974 先(99.5%)	0.029

(5) 解析的近似法との比較

参考として、図表 17 に Pykhtin[2004]が提唱するマルチファクター調整法による解析的近似解<sup>19</sup>をケース ~ に適用した場合の VaR 値と、パス数 100 万での通常のモンテカルロ法による VaR 値からの乖離率を示した。

(図表 17) マルチファクター調整法による解析的近似解のパフォーマンス

ケース	95% VaR			99% VaR			99.9% VaR		
	通常の モンテカルロ法	解析近似 乖離率		通常の モンテカルロ法	解析近似 乖離率		通常の モンテカルロ法	解析近似 乖離率	
	1.333	2.033	+52.55%	1.816	2.728	+50.24%	2.427	3.525	+45.27%
	1.899	1.976	+4.04%	2.807	2.808	+0.03%	4.011	3.934	-1.93%
	1.442	1.437	-0.35%	2.354	2.315	-1.65%	3.840	3.725	-2.99%
	2.443	3.174	+29.93%	3.276	4.098	+25.07%	4.357	5.168	+18.63%
	2.621	2.693	+2.73%	4.084	3.814	-6.60%	5.967	5.404	-9.43%
	3.397	3.414	+0.49%	5.548	5.293	-4.60%	8.473	8.113	-4.25%

グラニュラリティ調整法による解析的近似解(図表 10)と同様に、セクター内相関が高いケースでの近似精度は比較的良好である一方、セクター内相関が低いケース(ケース 、 )での近似精度が著しく悪い。前章での考察と同様に、分割モンテカルロ法は、マルチファクター調整法での近似精度が悪化する状況でも近似精度が良好な点が特徴と言える。

なお、Pykhtin[2004]が提唱するマルチファクター調整法では、計算過程で各債務者の固有ファクター間の相関を明示的に取り扱うため<sup>20</sup>、計算負荷は $O(M^2)$ となる。したがって、債務者数  $M$  が非常に大きいポートフォリオの場合、解析的近似解による計算負荷の軽減というメリットは減少する。債務者数の大きいポートフォリオの場合は、分割モンテカルロ法の方が、マルチファクター調整法よりも計算負荷が小さくなる可能性がある<sup>21</sup>。

<sup>19</sup> マルチファクター調整法のプログラムを実装する際には、安藤[2005]を参考とした。  
<sup>20</sup> 元来のモデル(本章第(1)節参照)では、各債務者の固有ファクターは互いに独立と仮定されているが、マルチファクター調整法では、元のマルチファクター・モデルを「同等な 1 ファクター・モデル」に変換する過程で各債務者の固有ファクターが独立性を失い、互いに相関を有するようになる。  
<sup>21</sup> ちなみに、筆者が実装したマルチファクター調整法による解析的近似解の計算時間は、サンプル・ポートフォリオ(債務者数 5,000 先)の場合、約 9 分であった。ただし、信頼水準が異なると再計算が必要なため、3つの信頼水準での VaR 値を算出するのに必要な時間は約 30 分である。一方、パス数 100 万の分割モンテカルロ法(分割パターン 3)の計算時間は約 7 分であった。また、1 回のシミュレーションで 3つの信頼水準での VaR を同時に算出可能である。

## 第5章. おわりに

### (1) 分割モンテカルロ法のメリット・デメリット

本稿では、「与信額の極めて小さい債務者の個別要因は、ポートフォリオ全体のリスク量には殆ど影響を与えないのではないか」というごく自然な考え方に基づいて、与信ポートフォリオを与信額の大きい債務者で構成されるサブ・ポートフォリオ(不均一ポート A)と、与信額の小さい債務者で構成されるサブ・ポートフォリオ(十分に細分化されたポート B)に分割し、前者については通常のモンテカルロ・シミュレーションと同じ計算プロセスを適用する一方、後者については各債務者の固有リスク部分を捨象し共通ファクターによる期待損失の変動のみをシミュレートすることで、リスク計量の計算負荷を軽減させる方法(分割モンテカルロ法)を試行した。

サンプル・ポートフォリオを使った数値計算では、通常のモンテカルロ法に対して 1/15 程度の計算時間で、近似精度のよい VaR 値を得ることができた。Gordy[2004]、Pykhtin[2004]らが提唱する解析的近似解法と比較した場合、解析的近似法では近似精度が悪化するような状況であっても、近似精度のよい VaR 値を得ることができるというのは分割モンテカルロ法のメリットである<sup>22</sup>。また、マートン型の信用リスク・モデルであれば、第3章、第4章で示したようにポート B の各債務者のデフォルト時損失額をデフォルト確率や相関等のグループ別に集計するようにプログラムを修正するだけでよいので、既存のモンテカルロ・シミュレーション法からの変更が容易なのも特徴である。

本稿では、マートン型の信用リスク・モデルでの計算例のみを示したが、第2章での考察は、共通ファクターと固有ファクターを用いる一般的な信用リスク・モデルに適用可能である。どのような信用リスク・モデルであれ、ポート B のシステムティック・リスク部分(共通ファクターを条件とする期待損失額、 $E[L_m^B | \bar{X}]$ )を特定できれば、分割モンテカルロ法による計算負荷の軽減が期待できる<sup>23</sup>。

一方、分割モンテカルロ法の難点としては、ポート B の与信額構成比二乗和( $\sum_{i=n+1}^M w_i^2$ )

<sup>22</sup> 近似精度の悪化への対処という点でも、解析的近似法よりも分割モンテカルロ法の方が扱いやすい。すなわち、解析的近似法は債務者のデフォルト確率が低い場合や相関が低い場合等に近似精度が悪化するが、その場合に近似精度を改善する良い対処方法がない(債務者のデフォルト確率や相関といった入力パラメータを近似精度向上のために変更するわけにはいかない)。これに対し、分割モンテカルロ法で近似精度が悪化した場合には、(計算効率を犠牲にすることになるが)十分な近似精度が得られるまでポート B の規模を縮小することで対応が可能である。

<sup>23</sup> 厳密には、 $E[L_m^B | \bar{X}]$  が不連続な関数の場合には、分割モンテカルロ法による近似精度が悪化する場合がある(脚注6参照)。

の大きさと VaR 値の近似精度の関係が事前には明らかではない、ということである

( $\sum_{i=n+1}^M w_i^2$  がゼロに近ければ近いほど良いということしか分らない)。本稿での試算では、

実際の金融機関の与信額構成を模擬したサンプル・ポートフォリオに基づいて、ポート B の各債務者の与信額構成比二乗和が 0.01% (分割パターン 3) であれば近似精度がよいという結果を得たが、この値は、信用リスク・モデル、ポートフォリオ構成、VaR 値の許容誤差によって変わり得る。したがって、分割モンテカルロ法を適用する際には、それぞれの与信ポートフォリオと信用リスク・モデルの下で、第 3 章、第 4 章のような比較分析を行うと同時に、「計算負荷」と「近似精度」とのトレードオフを考慮しながらポート B の範囲を特定しなければならない。また、与信ポートフォリオの時系列的な変化に伴ってポート B の範囲が変化していないかということも定期的に確認する必要があると思われる<sup>24</sup>。

## (2) 副次的メリット：リスク量からみたリテール・プールの特定

分割モンテカルロ法には、「十分に細分化されたポートフォリオ」(ポート B) をリスク量の比較分析を通じて経験的に特定しなければならないというデメリットがあるが、一方で、この作業を通じて、与信ポートフォリオ全体のリスク管理体制のあり方を考えるための重要な参考情報を得ることもできると思われる。

本稿でのポート B は、一般的な用語では「リテール・プール」と呼ばれるものに相当するであろう。もっとも、一般的には、リテール・プールは債務者の属性(個人、企業規模)や商品(住宅ローン、消費者ローン)、融資金額(万円未満)といった予め定められた基準により定義されているのが通常である。これに対し、分割モンテカルロ法を適用する過程でポート B を特定することは、「与信ポートフォリオ全体のリスクに与える個別要因の影響度」という別の観点からリテール・プールを特定することと言える。

例えば、サンプル・ポートフォリオ(債務者数 5,000 先)では、与信額下位約 95%(先数で約 4,800 先、ポートフォリオ総与信額に占める構成比は約 3 割)の債務者がポート B であると特定された。つまり、与信ポートフォリオ全体のリスクを考える際には、これらの債務者の個別要因の重要性は低く、むしろこれらの債務者から生じる平均的な損失額が共通ファクターによってどのように変化するかを考える方が重要ということである。したがって、ポート B に属すると判断された債務者について、過度に個別要因をチェックするような非効率的なリスク管理が行われていないか<sup>25</sup>、一方でポート B の平均的な損失額の変

<sup>24</sup> また、マルチファクター・モデルでの計算負荷(第 4 章(1)節)で説明したように、ポート B の債務者が帰属するセクター、デフォルト確率、相関等が非常に細かく分類されている場合には、分割モンテカルロ法による計算負荷の軽減効果が減少する点も留意する必要がある。

<sup>25</sup> 誤解を避けるために注記するが、各債務者の個別要因を無視してよいと言っている訳ではな

動から生じるリスクの分析やヘッジ手段の検討が十分に行われているか、という観点からリスク管理体制を見直すことが出来ると思われる。一方、ポート A に属すると判断された債務者については、各債務者の個別要因が与信ポートフォリオ全体のリスクに無視し得ない影響を与えると考えられるにも拘わらず、誤って「リテール・プール」に混入されていないか、といった観点から見直すことが出来ると思われる。

このように、分割モンテカルロ法には、単にリスク計量における計算負荷の軽減のみならず、「与信ポートフォリオ全体のリスクに占める個別要因の影響度」という観点から債務者を区別し、リスク管理体制の適切性や効率性を見直すうえでの参考情報を得るという副次的効果も期待できる。

以上

---

い。債務者の信用度を個別に適切に判断することは、リテール業務を行っている業務部門には必要不可欠な行為である。金融機関全体の与信ポートフォリオのリスク管理を考える立場の役員は、個別要因ではなくポート B 全体の平均的な損失額がどう変化するかを重点的にリスク分析しなければならない、ということである。

補論 本文(6)式の証明<sup>26</sup>

不均一ポート A に属する債務者の固有ファクターのベクトルを  $\bar{\varepsilon}^{(A)} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}$ 、無限分散ポート B に属する債務者の固有ファクターのベクトルを  $\bar{\varepsilon}^{(B)} = \{\varepsilon_{n+1}, \varepsilon_{n+2}, \dots, \varepsilon_M\}$ 、とすると、ポート A の損失額  $L_n^A$ 、ポートフォリオ全体の損失額  $L_M$  は、共通ファクターとそれぞれのポートフォリオに属する債務者の固有ファクターの関数として以下のように書ける。

$$L_n^A = L_n^A(\bar{X}, \bar{\varepsilon}^{(A)})$$

$$L_M = L_M(\bar{X}, \bar{\varepsilon}^{(A)}, \bar{\varepsilon}^{(B)})$$

本文(5)式より、 $\bar{x}$  を  $\bar{X}$  の実現値、 $\bar{e}^{(A)}$  を  $\bar{\varepsilon}^{(A)}$  の実現値とすると、 $m \rightarrow \infty$  ( $M = m + n$  なので同時に  $M \rightarrow \infty$ ) において以下が成立する。

$$L_M(\bar{x}, \bar{e}^{(A)}, \bar{\varepsilon}^{(B)}) - \left( L_n^A(\bar{x}, \bar{e}^{(A)}) + E[L_m^B | \bar{x}] \right) \rightarrow 0 \quad (\text{a.s.}) \quad (\text{A-1})$$

概収束が成り立つとき、確率収束も成り立つので  $\zeta > 0$  に対し以下が成立する。

$$m \rightarrow \infty \text{ のとき、 } \Pr \left( \left| L_M(\bar{x}, \bar{e}^{(A)}, \bar{\varepsilon}^{(B)}) - \left( L_n^A(\bar{x}, \bar{e}^{(A)}) + E[L_m^B | \bar{x}] \right) \right| < \zeta \mid \bar{x}, \bar{e}^{(A)} \right) \rightarrow 1 \quad (\text{A-2})$$

ここで、 $F_M$  を  $L_M$  の累積密度関数とすると(A-2)式から  $m \rightarrow \infty$  において以下が成立する。

$$\begin{aligned} & F_M \left( L_n^A(\bar{x}, \bar{e}^{(A)}) + E[L_m^B | \bar{x}] + \zeta \mid \bar{x}, \bar{e}^{(A)} \right) \\ & - F_M \left( L_n^A(\bar{x}, \bar{e}^{(A)}) + E[L_m^B | \bar{x}] - \zeta \mid \bar{x}, \bar{e}^{(A)} \right) \rightarrow 1 \end{aligned} \quad (\text{A-3})$$

$F_M$  の取り得る値は  $[0,1]$  なので、(A-3)式から以下が成立する。

$$m \rightarrow \infty \text{ のとき、 } F_M \left( L_n^A(\bar{x}, \bar{e}^{(A)}) + E[L_m^B | \bar{x}] + \zeta \mid \bar{x}, \bar{e}^{(A)} \right) \rightarrow 1 \quad (\text{A-4})$$

$$m \rightarrow \infty \text{ のとき、 } F_M \left( L_n^A(\bar{x}, \bar{e}^{(A)}) + E[L_m^B | \bar{x}] - \zeta \mid \bar{x}, \bar{e}^{(A)} \right) \rightarrow 0 \quad (\text{A-5})$$

ここで以下のような集合を考える。

<sup>26</sup> ここでの証明方法は、Gordy[2003]の Appendix B を参考としている。

$$S_m^+ \equiv \left\{ \bar{x}, \bar{e}^{(A)} \mid L_n^A(\bar{x}, \bar{e}^{(A)}) + E[L_m^B | \bar{x}] \leq q_\alpha \left( L_n^A(\bar{X}, \bar{e}^{(A)}) + E[L_m^B | \bar{X}] \right) \right\}$$

ただし、 $q_\alpha \left( L_n^A(\bar{X}, \bar{e}^{(A)}) + E[L_m^B | \bar{X}] \right)$  は  $L_n^A(\bar{X}, \bar{e}^{(A)}) + E[L_m^B | \bar{X}]$  の  $\alpha$  分位点<sup>27</sup>

定義により、

$$\Pr(\bar{x}, \bar{e}^{(A)} \in S_m^+) \geq \alpha \tag{A-6}$$

である。このとき、条件付分布の性質から以下が成立する。

$$\begin{aligned} & F_M \left( q_\alpha \left( L_n^A(\bar{X}, \bar{e}^{(A)}) + E[L_m^B | \bar{X}] \right) + \zeta \right) \\ &= F_M \left( q_\alpha \left( L_n^A(\bar{X}, \bar{e}^{(A)}) + E[L_m^B | \bar{X}] \right) + \zeta \mid \bar{X}, \bar{e}^{(A)} \in S_m^+ \right) \cdot \Pr(\bar{X}, \bar{e}^{(A)} \in S_m^+) \\ & \quad + F_M \left( q_\alpha \left( L_n^A(\bar{X}, \bar{e}^{(A)}) + E[L_m^B | \bar{X}] \right) + \zeta \mid \bar{X}, \bar{e}^{(A)} \notin S_m^+ \right) \cdot \Pr(\bar{X}, \bar{e}^{(A)} \notin S_m^+) \\ & \geq F_M \left( q_\alpha \left( L_n^A(\bar{X}, \bar{e}^{(A)}) + E[L_m^B | \bar{X}] \right) + \zeta \mid \bar{X}, \bar{e}^{(A)} \in S_m^+ \right) \cdot \Pr(\bar{X}, \bar{e}^{(A)} \in S_m^+) \\ & \geq F_M \left( q_\alpha \left( L_n^A(\bar{X}, \bar{e}^{(A)}) + E[L_m^B | \bar{X}] \right) + \zeta \mid \bar{X}, \bar{e}^{(A)} \in S_m^+ \right) \alpha \end{aligned} \tag{A-7}$$

ここで、全ての  $\bar{x}, \bar{e}^{(A)} \in S_m^+$  について、 $S_m^+$  の定義と(A-4)式から、 $m \rightarrow \infty$  のとき、

$$\begin{aligned} 1 & \geq F_M \left( q_\alpha \left( L_n^A(\bar{X}, \bar{e}^{(A)}) + E[L_m^B | \bar{X}] \right) + \zeta \mid \bar{x}, \bar{e}^{(A)} \right) \\ & \geq F_M \left( L_n^A(\bar{x}, \bar{e}^{(A)}) + E[L_m^B | \bar{x}] + \zeta \mid \bar{x}, \bar{e}^{(A)} \right) \rightarrow 1 \end{aligned} \tag{A-8}$$

である。(A-8)式とルベーグの収束定理から、 $m \rightarrow \infty$  のとき、

$$F_M \left( q_\alpha \left( L_n^A(\bar{X}, \bar{e}^{(A)}) + E[L_m^B | \bar{X}] \right) + \zeta \mid \bar{X}, \bar{e}^{(A)} \in S_m^+ \right) \rightarrow 1 \tag{A-9}$$

が成り立つ。(A-9)式を(A-7)式へ代入すると、 $m \rightarrow \infty$  のとき、

$$F_M \left( q_\alpha \left( L_n^A(\bar{X}, \bar{e}^{(A)}) + E[L_m^B | \bar{X}] \right) + \zeta \right) \geq \alpha \tag{A-10}$$

が得られる。

同様に、

---

<sup>27</sup> 任意の確率変数  $Z$  について、その  $\alpha$  分位点を  $q_\alpha(Z) \equiv \inf \{z \mid \Pr(Z \leq z) \geq \alpha\}$  と定義する。



$$S_m^- \equiv \left\{ \bar{x}, \bar{e}^{(A)} \left| L_n^A(\bar{x}, \bar{e}^{(A)}) + E[L_m^B | \bar{x}] \geq q_\alpha \left( L_n^A(\bar{X}, \bar{e}^{(A)}) + E[L_m^B | \bar{X}] \right) \right. \right\}$$

となる集合を考えると、定義により、

$$\Pr(\bar{x}, \bar{e}^{(A)} \in S_m^-) \geq 1 - \alpha \quad (\text{A-11})$$

であり、以下が成立する。

$$\begin{aligned} & F_M \left( q_\alpha \left( L_n^A(\bar{X}, \bar{e}^{(A)}) + E[L_m^B | \bar{X}] \right) - \zeta \right) \\ &= F_M \left( q_\alpha \left( L_n^A(\bar{X}, \bar{e}^{(A)}) + E[L_m^B | \bar{X}] \right) - \zeta \left| \bar{X}, \bar{e}^{(A)} \in S_m^- \right. \right) \cdot \Pr(\bar{X}, \bar{e}^{(A)} \in S_m^-) \\ & \quad + F_M \left( q_\alpha \left( L_n^A(\bar{X}, \bar{e}^{(A)}) + E[L_m^B | \bar{X}] \right) - \zeta \left| \bar{X}, \bar{e}^{(A)} \notin S_m^- \right. \right) \cdot \Pr(\bar{X}, \bar{e}^{(A)} \notin S_m^-) \\ & \leq \alpha + F_M \left( q_\alpha \left( L_n^A(\bar{X}, \bar{e}^{(A)}) + E[L_m^B | \bar{X}] \right) - \zeta \left| \bar{X}, \bar{e}^{(A)} \in S_m^- \right. \right) \cdot \Pr(\bar{X}, \bar{e}^{(A)} \in S_m^-) \end{aligned} \quad (\text{A-12})$$

ここで、全ての  $\bar{x}, \bar{e}^{(A)} \in S_m^-$  について、 $S_m^-$  の定義と(A-5)式から、 $m \rightarrow \infty$  のとき、

$$\begin{aligned} 0 & \leq F_M \left( q_\alpha \left( L_n^A(\bar{X}, \bar{e}^{(A)}) + E[L_m^B | \bar{X}] \right) - \zeta \left| \bar{x}, \bar{e}^{(A)} \right. \right) \\ & \leq F_M \left( L_n^A(\bar{x}, \bar{e}^{(A)}) + E[L_m^B | \bar{x}] - \zeta \left| \bar{x}, \bar{e}^{(A)} \right. \right) \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (\text{A-13})$$

である。(A-13)式とルベグの収束定理から、 $m \rightarrow \infty$  のとき、

$$F_M \left( q_\alpha \left( L_n^A(\bar{X}, \bar{e}^{(A)}) + E[L_m^B | \bar{X}] \right) - \zeta \left| \bar{X}, \bar{e}^{(A)} \in S_m^- \right. \right) \rightarrow 0 \quad (\text{A-14})$$

が成り立つ。(A-14)式を(A-12)式へ代入すると、 $m \rightarrow \infty$  のとき、

$$F_M \left( q_\alpha \left( L_n^A(\bar{X}, \bar{e}^{(A)}) + E[L_m^B | \bar{X}] \right) - \zeta \right) \leq \alpha \quad (\text{A-15})$$

が得られる。

(A-10)式、(A-15)式より、本文(6)式、

$$m \rightarrow \infty \text{ のとき、 } q_\alpha(L_M) - q_\alpha \left( L_n^A + E[L_m^B | \bar{X}] \right) \rightarrow 0$$

を得る。

## 参考文献

- Basel Committee on Banking Supervision, "An Explanatory Note on the Basel II IRB Risk Weight Functions," July, 2005 (<http://www.bis.org> で入手可能)
- Gordy, M., "A risk-factor model foundation for rating based bank capital rules," *Journal of Financial Intermediation*, 12(3), July 2003, pp.199-232
- Gordy, M., "Granularity Adjustment in Portfolio Credit Risk Measurement," *Risk Measures for the 21<sup>st</sup> Century*, edited by G. Szegö, Wiley, 2004, pp.109-121
- Martin, R. and T. Wilde, "Unsystematic credit risk," *Risk*, 15(11), 2002, pp.123-128
- Pykhtin, M., "Multi-factor adjustment," *Risk*, 17(3), 2004, pp.85-90
- Tasche, D., "Calculating credit risk capital charges with the one-factor model," *Journal of Risk*, 7, 2005, pp.85-101
- 安藤美孝、「与信ポートフォリオの信用リスクの解析的な評価方法：極限損失分布およびグラニュラリティ調整を軸に」、『金融研究』、第24巻別冊第1号、日本銀行金融研究所、2005年、39-120頁
- 肥後秀明、「個社別ULの解析的近似法と与信ポートフォリオ・マネジメントへの応用」、日本銀行 金融機構局 金融高度化セミナー講演資料、2006年  
([http://www.boj.or.jp/type/release/zuiji\\_new/fsc0608a.htm](http://www.boj.or.jp/type/release/zuiji_new/fsc0608a.htm) で入手可能)