日本銀行ワーキングペーパーシリーズ

与信ポートフォリオの信用リスク計量における資産相関について

—— 本邦のデフォルト実績データを用いた実証分析 ——

橋本　崇*

No.08-J-10
2008 年 6 月

日本銀行
〒103-8660　日本橋郵便局私書箱 30 号

* 金融機構局（現総務人事局）

与信ポートフォリオの信用リスク計量における資産相関について
―― 本邦のデフォルト実績データを用いた実証分析 ――

橋本 崇*

【要 旨】

本稿では、本邦企業を業種、企業規模、信用度、地域によりグループ分けし、実際のデフォルトの時系列データに基づき、マートン型のファクター･モデルにより資産相関を推定し、比較･検討を行った。

その主な結果は以下のとおりである。

① 資産相関の推定のためには、1 種類の共通ファクターのみでは必ずしも十分ではない場合があること。

② 資産相関は、業種、企業規模、信用度、地域の各グループのなかで、ばらつきがみられること。

③ 企業規模別にみると、資産相関は規模の大きい企業で大きく、規模の小さい企業では小さい傾向があること。

④ 信用度別にみると、資産相関は、信用度の高位の企業と低位の企業で大きく、信用度が中位の企業で小さい傾向があること。

---

* 金融機構局（現総務人事局）。連絡先は、金融機構局リスクアセスメント担当（post.fsbe65ra@boj.or.jp）。

本稿の作成に当たっては、森平爽一郎教授（早稲田大学大学院ファイナンス研究科）、村永淳氏（PwC アドバイザリー株式会社）、池森俊文氏（みずほ第一フィナンシャルテクノロジー株式会社）、全国地方銀行協会信用リスク管理高度化支援室、および日本銀行スタッフから有益なコメントを得た。記して感謝の意を表したい。ただし、あり得べき誤りは筆者に属する。また、本稿の内容･意見は筆者個人に属するものであり、日本銀行および金融機構局の公式見解を示すものではない。

目　　次

１．はじめに

わが国では、多くの金融機関が、信用リスク管理の基本的な枠組みとして内部格付を利用している。また、金融機関は、内部格付制度の下で、デフォルト率（Probability of Default、PD）、デフォルト時損失率（Loss Given Default、LGD）、デフォルト時エクスポージャー（Exposure at Default、EaD）といったパラメータの推定を行っている。併せて、これらのパラメータを基に、自らの与信ポートフォリオ全体の期待損失額（Expected Loss、EL）や非期待損失額（Unexpected Loss、UL）等の計測が行われている。

与信ポートフォリオにかかる信用リスク計測で広く用いられているモデルの 1 つに、いわゆるマートン型のファクター・モデルがある。このモデルは、入力パラメータとして、PD、LGD、EaD のほかに「資産相関」を必要とする。資産相関は、いくつかの債務者が同時にデフォルトする蓋然性を表しており、各債務者の資産価値、ひいては各債務者に対する与信の価値の連関度合いを示している。資産相関の水準は、信用リスク量としての UL の水準に影響を与えるため、資産相関を推定するための手法やデータは、信用リスクを計測するうえでの重要な鍵の 1 つとなる。

資産相関の値は、理論的には、債務者毎に定義することができる。しかし、貸出債権の価値は、一般には市場で観測されないため、実務的に資産相関を求めるうえでは、何らかの推定手法と推定のためのデータが必要となる。また、多数の債務者について、債務者毎の資産相関を推定することは現実的ではない。このため、実務では、債務者群を何らかの基準でグループ分けしたうえで、グループ毎に資産相関を推定し、当該グループに含まれる債務者にはその値を一律に適用することが一般的である。このため、グループ毎に推定された資産相関の値がどの程度異なり得るのかという点は、信用リスク管理実務において重要な論点となる。

以下では、本邦企業を一定の基準でグループ分けし、実際のデフォルトの時系列データに基づき、資産相関を推定し、比較・検討を行う。本稿が、資産相関の推定を行う際のグループ分けや資産相関のばらつき度合いにつき、リスク管理実務上の参考となれば幸甚である。

本稿では、分析を行うためのデータとして、比較的長期間に亘り本邦のデータが蓄積されている帝国データバンクの「倒産確率算出用マトリクスデータ」を用いる。このデータから、全社数とデフォルト社数を求め、年別・グループ別のデ

フォルト率を算出することができる。

本稿の構成は、次のとおりである。まず、２節で、本稿がモデルとして採用しているマートン型のファクター･モデルを説明する。３節では、実証分析を行う。最後に、４節で、分析の示唆するところをまとめる。

２．1 ファクター･モデルの概要

本稿では、信用リスクの計量モデルのうち、実務で用いられることが多いマートン型の 1 ファクター･モデル[1]を採用し、過去のデフォルトのデータを基に、資産相関を推定する。

1 ファクター･モデルでは、債務者である企業の資産価値が、対象とする複数の企業に共通の要因（systematic factor）と各企業に固有の要因（idiosyncratic factor）の加重和として表現される。これら 2 つの要因が時間変化することにより、企業の資産価値も変化し、満期時点（例えば 1 年後）に、資産価値が一定の閾値を下回ったときに、当該企業にデフォルトが発生すると考える。例えば、共通要因をわが国の景気であると捉えれば、各企業のデフォルト事象は、各企業固有の事情と景気動向により説明されることとなる。

以下では、全企業を一定の基準（業種、企業規模、信用度、地域）によりグループ分け[2]し、グループ毎に資産相関を計算する。本稿では、この資産相関を用いて、全企業に同一の共通要因を設定するモデルを「シングル･インデックス･モデル」と呼び、グループ毎に共通要因を設定するモデルを「マルチ･インデックス･モデル」と呼ぶ。なお、本稿の分析では、主に後者のマルチ･インデックス･モデルを扱う。

---

[1] 1 ファクター･モデルの詳細は、補論１を参照。1 ファクター･モデルのほかには、マルチ･ファクター･モデルと呼ばれるモデルがある（補論１の脚注 22 を参照）。

[2] 例えば、「業種」という基準を用いた場合、「製造業」、「建設業」、「サービス業」等にグループ化される。また、「企業規模」という基準を採用した場合は、「大企業」、「中小企業」、「個人営業」等にグループ化される（企業規模の定義は脚注 11 を参照）。

（1）シングル･インデックス･モデル

シングル･インデックス･モデルでは、時刻をt（$t \geq 0$）として、グループS_kに属する企業a_iの資産価値$Z_i(t)$は、(1)式で表される。

$$Z_i(t) = \sqrt{\rho_k} X(t) + \sqrt{1-\rho_k} \varepsilon_i(t) \tag{1}$$

$$0 \leq \rho_k \leq 1,\ a_i \in S_k,\ i = 1,2,...,n,\ k = 1,2,...,m$$

ここで、nは企業数、mはグループ数を表す。

上式では、企業a_iの資産価値Z_iは、全企業に共通な要因を示す共通要因$X(t)$と、企業a_iに固有の個別要因$\varepsilon_i(t)$という 2 つの確率要素から構成される。グループS_kに属する企業は、ρ_kという同一の値をとる。ρ_kが資産相関であり、$\sqrt{\rho_k}$は資産価値$Z_i(t)$の共通要因$X(t)$に対する感応度を表す。$X(t)$と$\varepsilon_i(t)$は、それぞれ互いに独立な標準正規分布に従うと仮定する。したがって、それらの線形結合も正規分布に従い、$Z_i(t)$は標準正規分布に従う。

（2）マルチ･インデックス･モデル

マルチ･インデックス･モデルでは、時刻をt（$t \geq 0$）として、企業a_iの資産価値$Z_i(t)$は、(2)式で表される。

$$Z_i(t) = \sqrt{\rho_k} X_k(t) + \sqrt{1-\rho_k} \varepsilon_i(t) \tag{2}$$

$$0 \leq \rho_k \leq 1,\ a_i \in S_k, i = 1,2,...,n,\ k = 1,2,...,m$$

シングル･インデックス･モデルとマルチ･インデックス･モデルとの違いは、資産価値$Z_i(t)$の定式化に当たり、前者が全企業に共通な要因$X(t)$を採用する一方、後者がS_k毎に異なる影響を与える共通要因$X_k(t)$を用いる点である[3]。

３．資産相関の推定

本節では、データ蓄積期間が 1985 年以降の長期にわたり、データベースに含まれる企業も足許で 120 万社程度の多数に上る、帝国データバンクの「倒産確率算出用マトリクスデータ」（1985～2005 年）を用いて、マルチ･インデックス･モデルを用いることの必要性を確認したうえで、①業種、②信用度（帝国デー

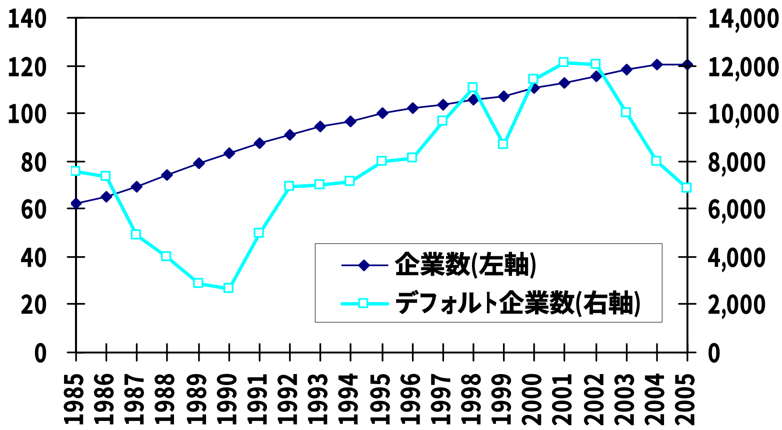
[3] 詳細は、補論１の（３）を参照。

タバンク評点[4])、③企業規模、④地域、という 4 つの基準でグループ化し、資産相関の推定を行う。

これらの基準を選択した理由は、信用リスク管理実務で実際に採用されることが多いと考えられることと、複数の既存研究でも同様の基準でグループ分けされ、分析がなされているためである[5]。

「倒産確率算出用マトリクスデータ」に含まれる企業[6]数とデフォルト企業[7]数の時系列推移を図表 1 に示す。

[**図表** 1] **倒産確率算出用マトリクスデータの企業数（左軸：万社、右軸：社）**



[4] 帝国データバンクのホームページによれば、帝国データバンク評点とは、「帝国データバンクが企業を評価している点数で満点は 100 点。企業が健全な経営活動を行っているか、支払能力があるか、安全な取引ができるかを第三者機関として評価したもの」である。

[5] 既存研究の概要は、補論 2 を参照。

[6] 本稿では、「倒産確率算出用マトリクスデータ」に含まれる企業のうち、図表等で表記している年の前年年末時に評点が付されていた企業を分析対象としており、「未評点」とされていた企業は含めていない。

[7] デフォルト企業は、脚注 6 の企業のうち、図表等で表記している年に帝国データバンクの「倒産」の定義に該当する事象を起こした企業である。なお、「倒産」の定義は、以下のいずれかに該当する場合である。

① 1 回目不渡り後に任意整理する。
② 2 回目不渡りを出し銀行取引停止処分を受ける。
③ 不渡りを出さずに内整理する（代表者が倒産の事実を認めた時）。
④ 再建を目的として、裁判所に会社更生法の適用を申請する。
⑤ 再建を目的として、裁判所に商法による会社整理の適用を申請する。
⑥ 再建を目的として、裁判所に民事再生法の適用を申請する。
⑦ 裁判所に破産を申請する。
⑧ 裁判所に特別清算の開始を申請する。

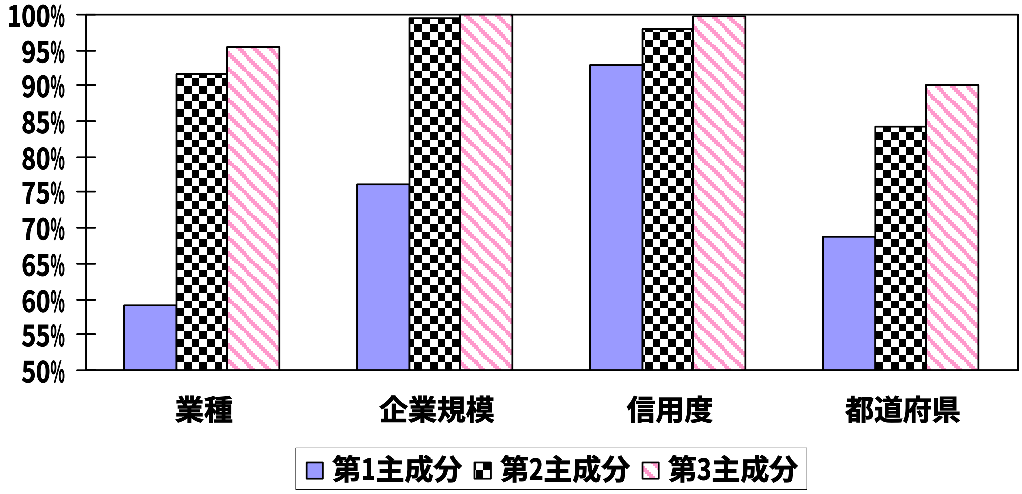
（1）マルチ･インデックス･モデルを選択する理由

資産相関の推定には、２節（２）で定義したマルチ･インデックス･モデルを使用する（推定は、最尤法によって行う[8, 9]）。

本節では、シングル･インデックス･モデルではなく、マルチ･インデックス･モデルを採用する理由を説明する。

まず、図表 2 は、業種別、企業規模別、信用度別、および都道府県別のデフォルト率の時系列データに、主成分分析を施し、各主成分の寄与率を累積値で示したものである。これをみると、累積寄与率は、第 1 主成分では相対的に低いものの、第 2 主成分まで勘案すれば過半のグループで 9 割以上に達していることがわかる。このことは、第 1 主成分だけでは、デフォルト率の変動を十分に説明することは困難であることを示している。

[図表 2] 主成分の累積寄与率



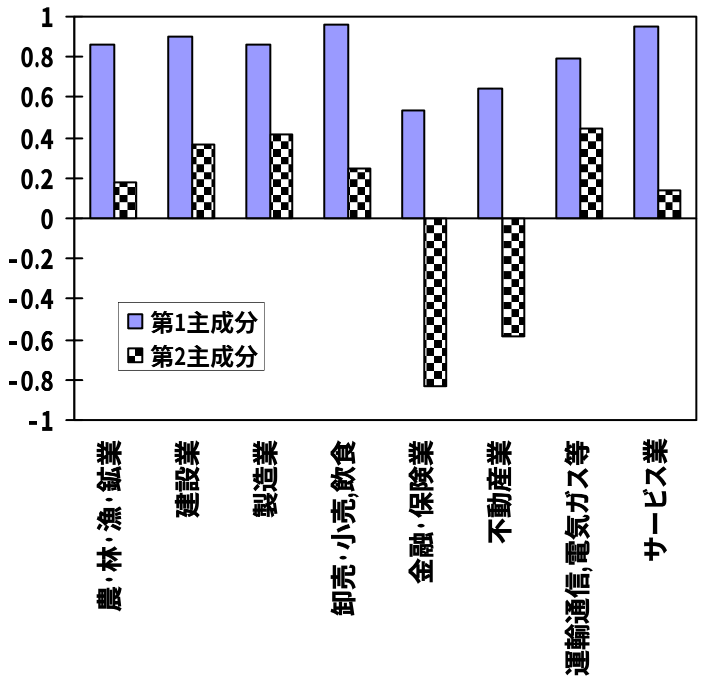
このため、この第 2 主成分を勘案することは、大きな意味があると考えられる。次の図表 3 は、業種を例に、各業種（業種区分の詳細は後述する）の主成分負荷量を示したものである。

---

8 最尤法による資産相関の推定方法、およびモーメント法による資産相関の推定結果との比較は補論３を参照。

9 推定には、計算アプリケーション MATLAB を使用した。補論３の(15)式内の積分計算では、Halton 列を用いた準モンテカルロ積分（乱数の個数は 65,535 ＜=2^{16}-1＞）の手法を採用している。

[図表 3] 各業種の主成分負荷量



図表 3 の結果から、第 1 主成分は、全業種で同符号の負荷量を示しており、業種に共通したファクターと解釈することができる一方、第 2 主成分は、業種毎のばらつきが大きく、業種に固有のファクターと解釈することが可能と考えられる。また、金融･保険業と不動産業以外の業種では、第 1 主成分の負荷量が大きいため、これらの業種のデフォルト率の変動は、共通ファクターで説明し得る部分が大きいことになる。一方、金融･保険業と不動産業のデフォルト率の変動は、第 1 主成分によって説明し得る割合が相対的に小さいことがわかる。このことは、金融･保険業と不動産業のデフォルト率の変動は、1 種類の共通ファクターでは必ずしも十分に説明することができないことを示している。

このため、企業の資産価値変動のモデル化する際には、全企業に共通するファクターに加えて、グループ内の共通ファクターを導入する必要があると考えられる。

具体的には、グループ S_k に属する企業 a_i の資産相関 $Z_i(t)$ を次の(3)式で表現する。

$$Z_i(t) = \sqrt{\alpha_k}\, X(t) + \sqrt{\beta_k}\, \delta_k(t) + \sqrt{1-\alpha_k-\beta_k}\, \varepsilon_i(t) \tag{3}$$

$$0 \le \alpha_k, \beta_k, \alpha_k + \beta_k \le 1,\ \ a_i \in S_k,\ \ i = 1,2,\ldots,n,\ \ k = 1,2,\ldots,m$$

なお、$X(t)$は全企業に共通な要因を示す共通要因、$\delta_k(t)$は企業a_iの属するグループS_kに共通する共通要因、$\varepsilon_i(t)$は企業a_iに固有の個別要因を示す。また、$X(t)$、$\delta_k(t)$、$\varepsilon_i(t)$は、それぞれ互いに独立な標準正規分布に従うと仮定する。

ここで、$\alpha_k = \rho_k \rho , \beta_k = \rho_k (1-\rho)$（$0 \le \rho, \rho_k \le 1$）と置く。

このとき、(3)式は、

$$
\begin{aligned}
Z_i(t) &= \sqrt{\rho_k \rho} X(t) + \sqrt{\rho_k (1-\rho)} \delta_k(t) + \sqrt{1-\rho_k} \varepsilon_i(t) \\
&= \sqrt{\rho_k} (\sqrt{\rho} X(t) + \sqrt{1-\rho} \delta_k(t)) + \sqrt{1-\rho_k} \varepsilon_i(t) \qquad (4)
\end{aligned}
$$

と書き換えられ、さらに、

$$
X_k(t) = \sqrt{\rho} X(t) + \sqrt{1-\rho} \delta_k(t) \qquad (5)
$$

と置けば、$X_k(t)$は標準正規分布に従う確率変数となり、

$$
Z_i(t) = \sqrt{\rho_k} X_k(t) + \sqrt{1-\rho_k} \varepsilon_i(t)
$$

という、マルチ･インデックス･モデルの表現（上述の(2)式）が導かれる。ここで、$\sqrt{\rho}$は、グループ毎に共通の要因$X_k(t)$の全企業に共通の要因$X(t)$に対する感応度を表す。

本稿では、モデルの簡便化のため、ρ_kのみを推定･分析の対象とするマルチ･インデックス･モデルを採用する。

（２）分類の基準と資産相関

イ．業種

まず、上記のデータを、業種を基準としてグループ分けする。グループの設定には、帝国データバンクの業種大分類コードを用いた。ただし、「農業」、「林業、狩猟業」、「漁業」、「鉱業」の 4 業種は、含まれる企業数が少ないため、1 つにまとめ「農･林･漁･鉱業」とした。また、デフォルト企業数が僅少である「電気･ガス･水道･熱供給業」は、「運輸･通信」と併合して「運輸･通信、電気･ガス等」とした[10]。これらの結果、全企業を 8 つのグループに分類した（図表 4)。

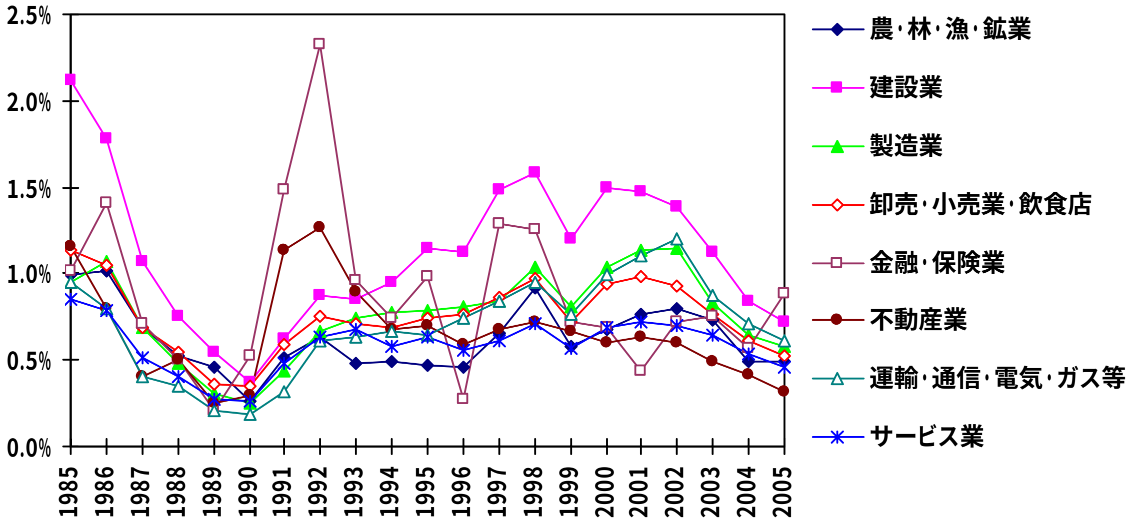
[10] 各グループの企業数、デフォルト数は、補論４の（１）参照。

[**図表** 4] **業種におけるグループの区分方法**

本稿の業種区分		**帝国データバンクの業種区分（大分類）**
1	**農･林･漁･鉱業**	**「農業」、「林業、狩猟業」、「漁業」、「鉱業」**
2	**建設業**	**「建設業」**
3	**製造業**	**「製造業」**
4	**卸売･小売業･飲食店**	**「卸売･小売業、飲食店」**
5	**金融･保険業**	**「金融･保険業」**
6	**不動産業**	**「不動産業」**
7	**運輸･通信･電気･ガス等**	**「運輸･通信」、「電気･ガス･水道･熱供給業」**
8	**サービス業**	**「サービス業」**

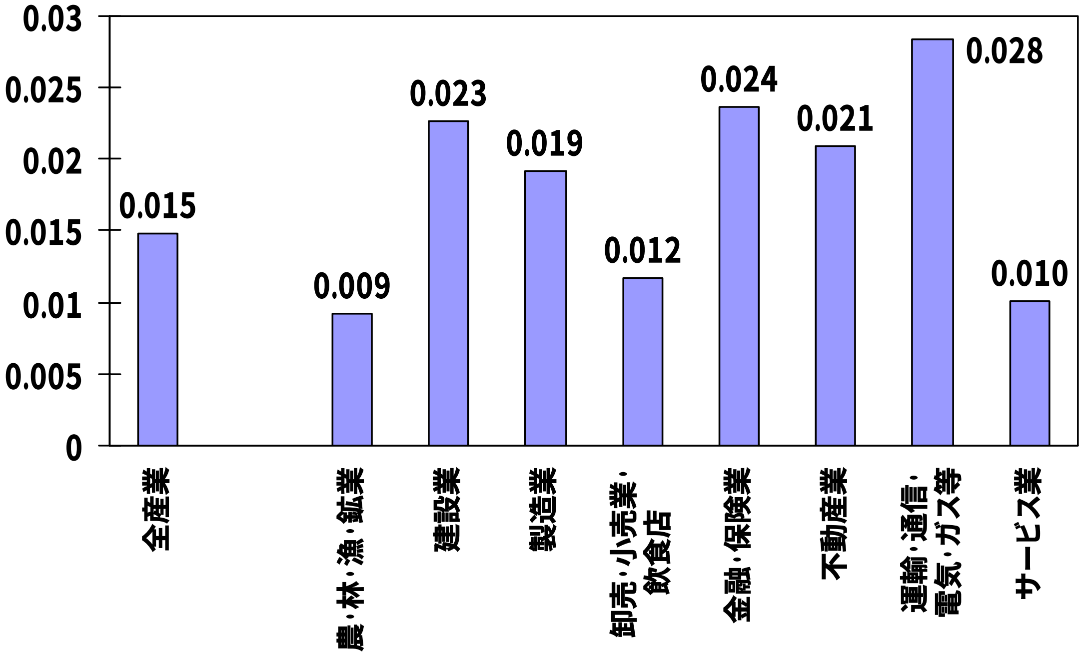
各業種のデフォルト率の推移を図表 5 に掲げた。

[**図表** 5] **業種別デフォルト率の推移**



業種別の毎年の期初企業のデータおよび期中デフォルト企業のデータを用いて、資産相関を推定した結果が図表 6 である。資産相関は、業種によって水準にばらつきがみられることが確認される。

[図表 6] 業種別の資産相関



ロ．企業規模

次に、分類の基準を企業規模[11]とする。大企業と中堅企業の企業数が少ないため、「大･中堅企業」、「中小企業」、「個人営業」の 3 つにグループ化した[12]。企業規模別のデフォルト率の時系列推移を図表 7 に掲げる。

---

[11] 企業規模の定義は、帝国データバンクの以下の定義に従っている。

「大企業」：資本金が 10 億円以上、かつ従業員数が 300 人超（卸売は 100 人超、小売･サービスは 50 人超）の企業。

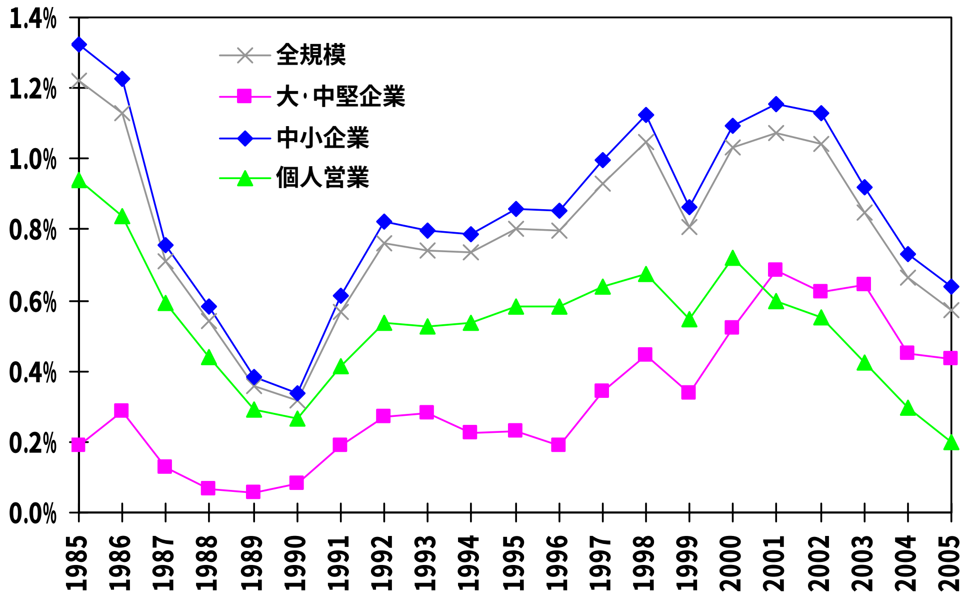
「中堅企業」：資本金が 1 億円超、かつ従業員数が 300 人超（卸売は資本金 3 千万円超かつ従業員数 100 人超、小売･サービスは資本金 1 千万円超かつ 50 人超）の企業。

「中小企業」：資本金が 1 億円以下、もしくは従業員が 300 人以下（卸売は資本金 3 千万円以下、もしくは従業員数 100 人以下、小売･サービスは資本金 1 千万円以下、もしくは 50 人以下）の企業。

「個人営業」：法人格を持たない先。

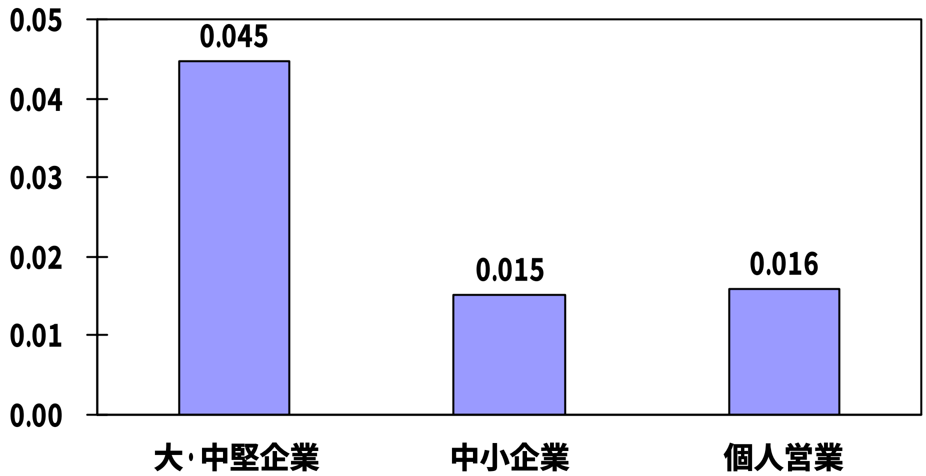
[12] 各グループの企業数、デフォルト数は、補論４の（２）参照。

[図表 7] **規模別デフォルト率の推移**



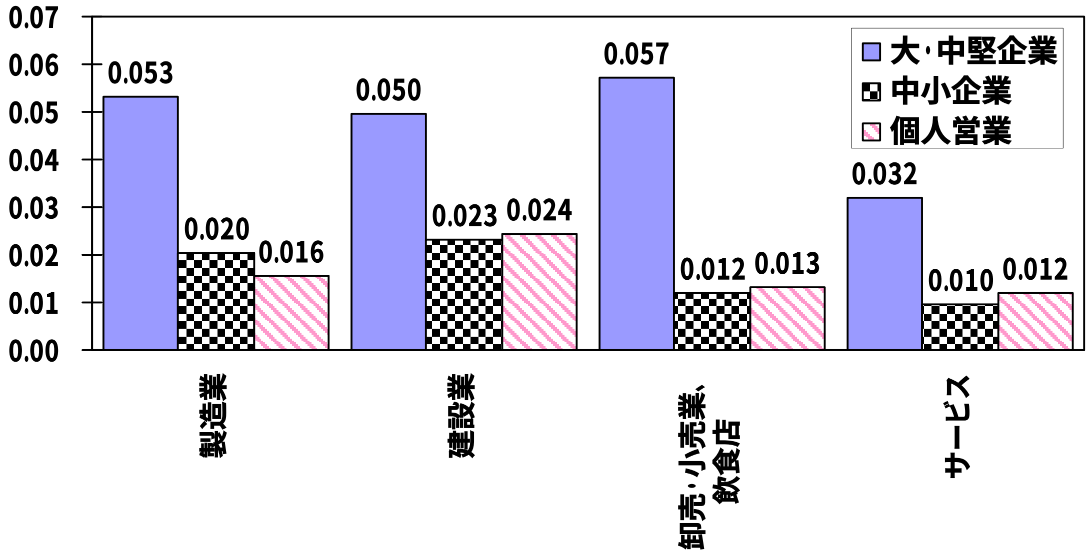
このデータを用いて資産相関を推定した結果が図表 8 である。資産相関は、大･中堅企業では高く、中小企業および個人営業では低いという結果となった。

[図表 8] **企業規模別の資産相関**



図表 9 は、企業数が多い 4 業種で、業種毎の企業規模別の資産相関を推定した結果である。資産相関は、図表 8 とほぼ同様に、大･中堅企業では高く、中小企業および個人営業では低いという傾向を確認することができる。

[図表 9] 主な業種の企業規模別の資産相関



既存研究[13]では、Düllmann and Scheule [2003]、Lopez [2004]、北野 [2007]が、企業規模が小さいほど資産相関が小さいという結果を導いている[14]。これらは、本稿の結果である、資産相関は大･中堅企業で大きく、中小企業および個人営業で小さいことと整合的である。

こうした結果の背景については、以下のような仮説を立てることが可能と考えられる。まず、企業規模が非常に大きい場合、その企業の業況は経済全体の「システム」―― 例えば、一国全体の景気、あるいは、その企業が属する業種･地域等の業況 ―― に近いことになる。この場合、当該企業は、共通要因（systematic factor）の影響を受けやすくなる。これが、大･中堅企業の資産相関が相対的に高い理由であると考えられる。一方、企業規模が小さくなると、その企業の業況は「システム」より、個社毎の事情に左右される度合いが高まると考えられる。このため、中小企業と個人営業の資産相関は相対的に低い水準を示すと考えられる。

ハ．信用度

次に、分類の基準として信用度を採用し、帝国データバンク評点（以下、評点）を 5 点幅のバンド区分でグループ化した。なお、データ数が相対的に小さ

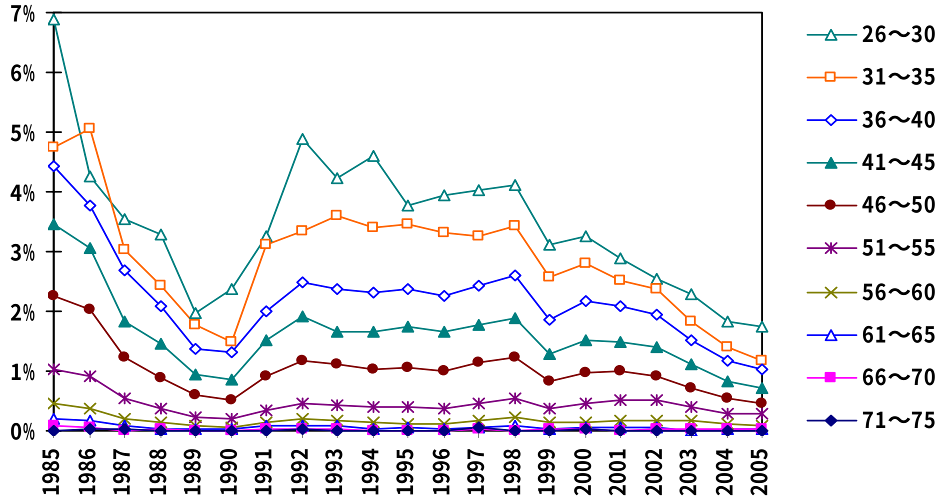
[13] 補論 2 参照。

[14] なお、Dietsch and Petey [2004]は、資産相関は企業規模（売上高）に関して下に凸の関数形を持つことを示している。この点は、後述のハ．信用度で触れる。

い、評点が 76 点以上と 25 点以下のバンドは分析対象としていない[15]。

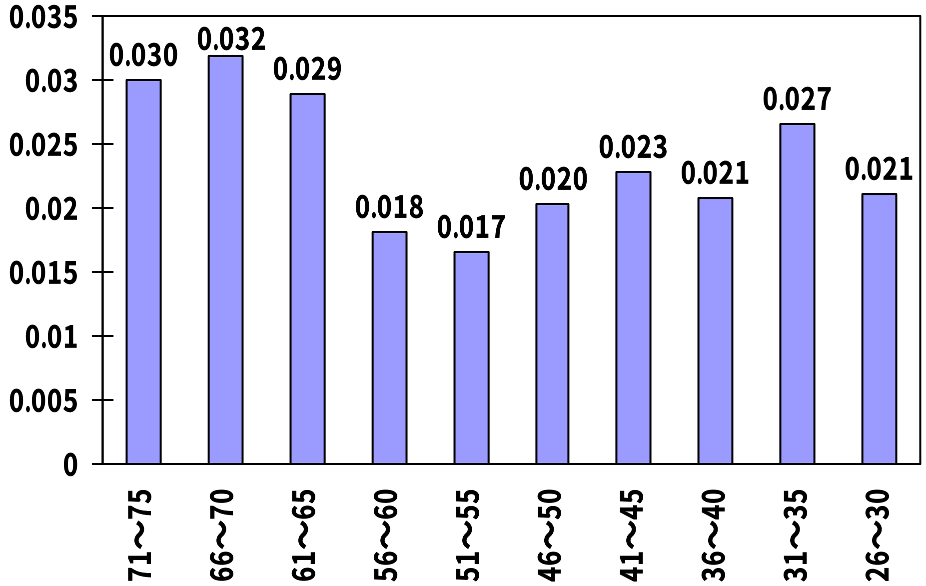
評点バンド別のデフォルト率を図表 10 に挙げる。

[図表 10] 評点バンド別デフォルト率の推移



図表 11 は、評点バンド別に資産相関を推定した結果である。これからは、総じていえば、資産相関は、①信用度が高位（75～61 点）と低位（35～31 点）で相対的に高く、②信用度が中位（60～36 点）で相対的に低い、という傾向がみてとれる。

[図表 11] 評点バンド別の資産相関



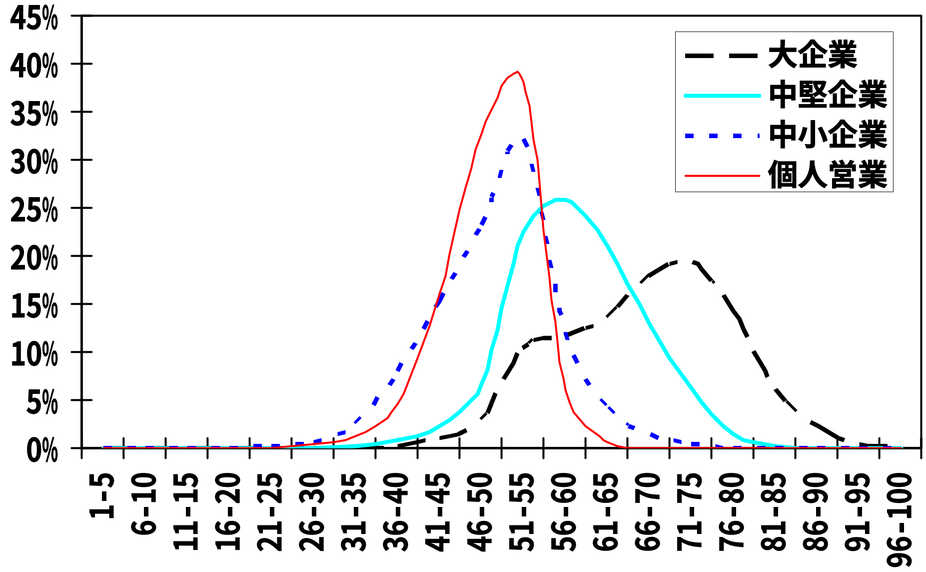
[15] 各グループの企業数、デフォルト数は、補論４の（３）参照。

既存研究[16]では、Bluhm and Overbeck [2003]が、資産相関は、信用度の高位の企業と低位の企業で大きく、信用度が中位の企業で小さいという結果を示している。また、Hamerle, Liebig and Rösch [2003]も Bluhm and Overbeck [2003]と類似の結果であるといえよう。一方で、Dietsch and Petey [2004]では、仏の中小企業（SMEs＜small or medium-sized enterprises＞）に同様の傾向がみられるが、独の中小企業にはそうした傾向は必ずしもみられないという結果を得ている。このほか、Lopez [2004]では、企業規模別にみた資産相関は、米企業で信用度が低いほど小さいが、日･欧企業では明確な傾向は得られていない[17]。

このように、いくつかの既存研究と、本稿の推定結果を勘案すれば、資産相関を信用度の関数とするとき、資産相関は下に凸の関数形を持つ可能性があると考えられる。

図表 12 は、規模毎に評点別の企業数の割合を示した度数分布である。ここからは、大企業、中堅企業、中小企業、個人企業の順に、評点が低い企業の割合が増加していることがわかる。このことから、企業規模と信用度には正の相関がある（規模が相対的に大きいと信用度が相対的に高い傾向がある）と考えられる。

[図表 12] 企業規模と評点の関係（縦軸：頻度、横軸：評点）



16 補論 2 参照。

17 Düllmann and Scheule [2003]では、売上高が相対的に小さい企業を除き、資産相関は信用度が低いほど大きいという他の既存研究とは相異なる結果を示している。

この点、資産相関が信用度に関して下に凸の関数であることと、上述の「ロ．企業規模」でみた、資産相関が大･中堅企業では高く、中小企業および個人営業では低いこととは、企業規模と信用度に正の相関があることで一部説明が可能であると考えられる。

企業規模と信用度に正の相関があることを前提にすれば、資産相関が、信用度の高位の企業と低位の企業で大きく、信用度が中位の企業で小さいという結果からは、企業規模が十分に小さくなると資産相関は上昇する可能性が考えられる[18]。実際、Dietsch and Petey [2004]の仏データでの結果は、資産相関は企業規模（売上高）に関して下に凸の関数形を持つことを示している。しかし、図表 8、9 では、中小企業と個人営業では、後者が前者を若干上回る例がみられたが、有意な差が得られたとはいい難い。企業規模が十分に小さい場合の資産相関の傾向は、リスク管理上の重要な論点になり得るが、本稿では、データの制約[19]から、これ以上立ち入らず、今後の課題としたい。

ニ．地域

次に、分類の基準を地域とし、①都道府県別、②地方別にグループ化した（図表 13）[20]。

[**図表** 13] **各地方と都道府県の関係**

北海道･東北地方	**北海道 青森 岩手 宮城 秋田 山形 福島**
関東甲信越地方	**茨城 栃木 群馬 埼玉 千葉 東京 神奈川 新潟 山梨 長野**
北陸地方	**富山 石川 福井**
中部地方	**岐阜 静岡 愛知 三重**
近畿地方	**滋賀 京都 大阪 兵庫 奈良 和歌山**
中国地方	**鳥取 島根 岡山 広島 山口**
四国地方	**徳島 香川 愛媛 高知**
九州･沖縄地方	**福岡 佐賀 長崎 熊本 大分 宮崎 鹿児島 沖縄**

---

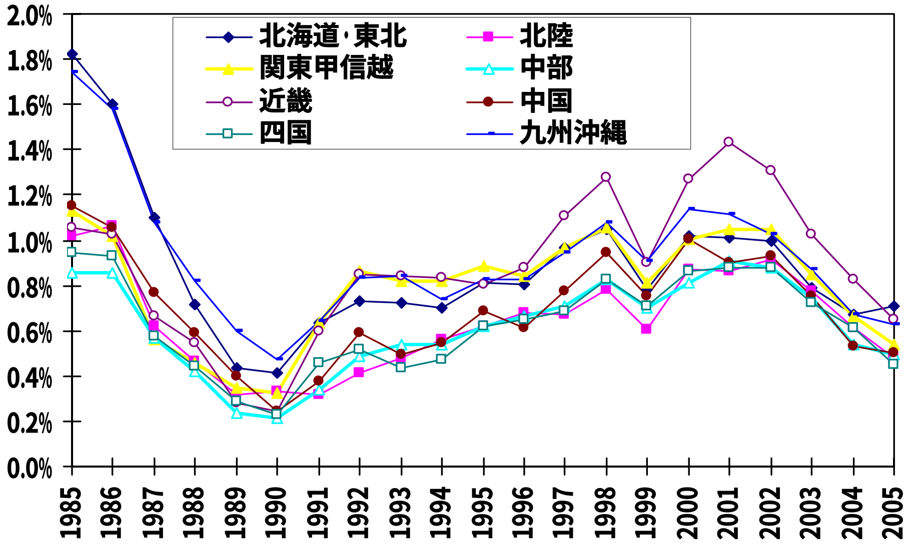
18 この点については、企業規模が十分に小さいと、企業の資産が相対的に分散されていないといった背景から、「システム」から影響を受けやすくなる、という仮説を設けることが可能であると考えられる。また、規模の小さい企業は、マクロの景気変動に伴う金融機関の貸出行動の変動というシステマティックな要因から相対的に影響を受けやすいことが背景にある、と考えることもできるように思われる。

19 本稿で使用したデータには、「大企業」、「中堅企業」、「中小企業」および「個人営業」という分類をさらに細かく規模別に分解する情報が含まれていない。

20 各グループの企業数、デフォルト数は、補論４の（４）参照。

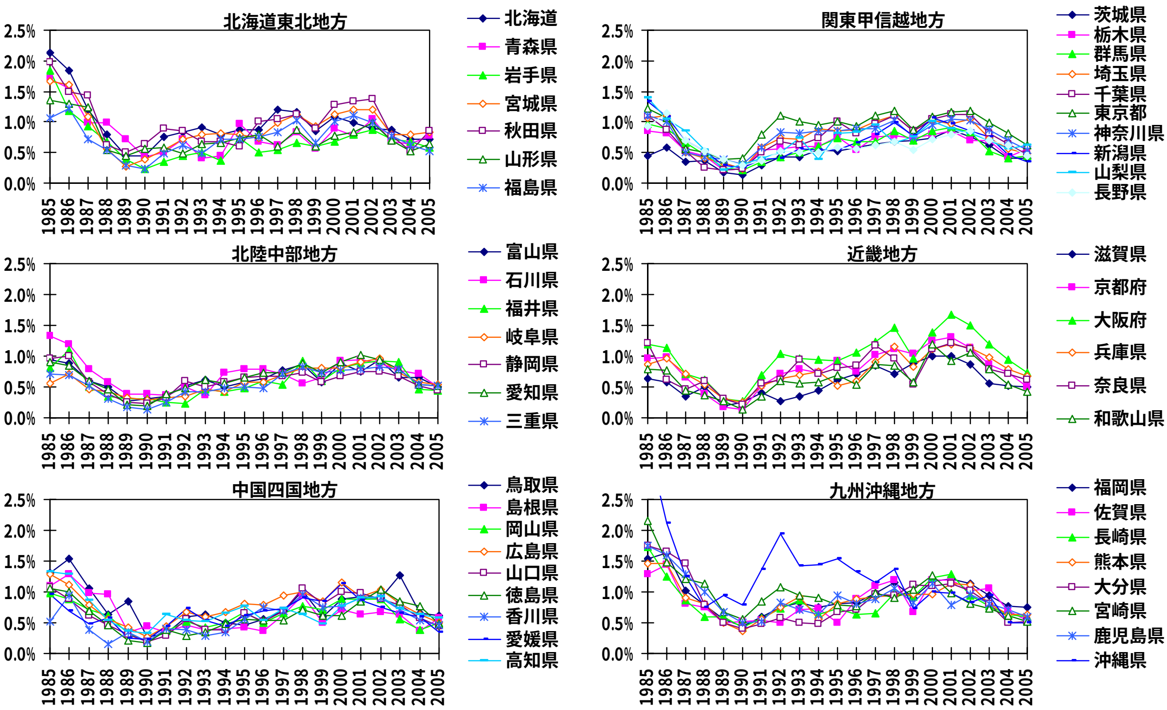
図表 14 は、デフォルト率の時系列を示したものである。デフォルト率は、①北海道･東北と九州･沖縄では 1989 年以前で高い、②近畿では 1997～2004 年で高い、③北陸、中部、四国では全期間を通じて低い、等の特徴が観察される。

[図表 14] 地方別デフォルト率の推移（全業種）



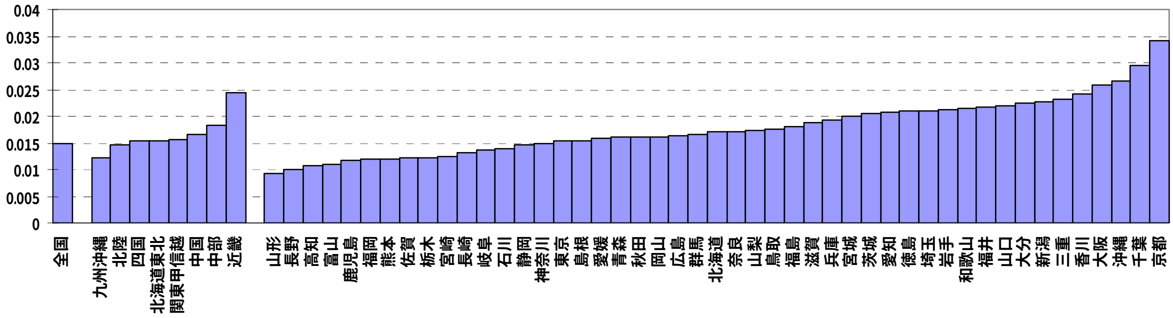
次に、図表 15 に、都道府県別のデフォルト率の時系列を示した。ここからは、デフォルト率は、①1997 年以前では、沖縄県が高いこと、②1997～2004 年の近畿、大阪府が高いこと、③北陸、中部では、県毎の差異が比較的小さいこと、等がみてとれる。

[図表 15] 都道府県別デフォルト率の推移（全業種）



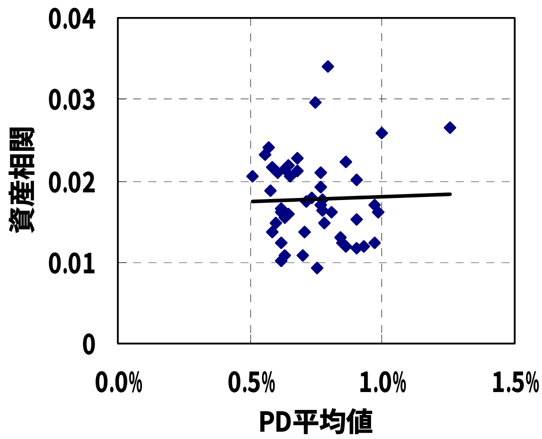
次に、都道府県別、地方別に資産相関を計算した結果が図表 16 である。都道府県毎の相違は大きく、資産相関の値が最小の山形県（0.0092）と最大の京都府（0.0340）では 3.7 倍程度の差となった。

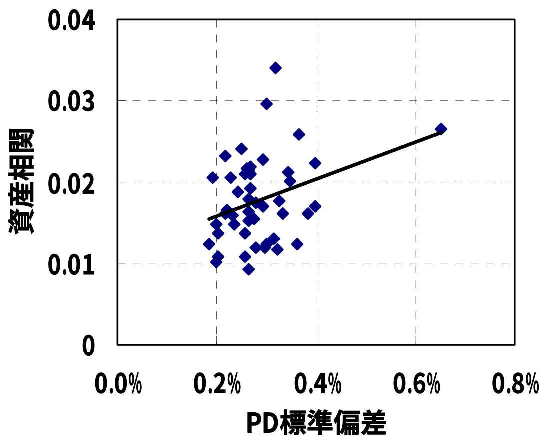
[**図表** 16] **都道府県別、地方別の資産相関**



図表 17 は、各都道府県の資産相関と、デフォルト率（PD）の平均値、同標準偏差との関係を示したものである。

[**図表** 17] **資産相関、デフォルト率の平均値、同標準偏差の関係**





資産相関を被説明変数、デフォルト率の標準偏差を説明変数とする単回帰分析を行ったところ、回帰係数は 2.266 と正値となり、t 値も 2.367 と、95%信頼水準で有意であることが確認された（図表 18）。

一方、資産相関を被説明変数、デフォルト率の平均値を説明変数として、単回帰分析を行ったところ、回帰係数は 0.1187 と正値となったが、t 値は 0.227 と低く、必ずしも有意ではないことが判明した（図表 18）。

[**図表** 18] **資産相関を被説明変数とする単回帰分析の結果**[21]

説明変数	**係数** (t **値**)	**切片** (t **値**)	**決定係数**
PD **平均値**	0.1187 (0.227)	0.01687 (4.234***)	0.00114
PD **標準偏差**	2.266 (2.367**)	0.01132 (4.017***)	0.1107

このように、デフォルト率の標準偏差と資産相関には正の相関があることが示された。この点、例えば、デフォルト率の標準偏差が最大の沖縄県は、資産相関の値でも 3 番目に高い値となっている。

４．おわりに

本稿では、本邦企業を業種、信用度、規模、地域でグループ化したうえで、実際のデフォルトの時系列データを基に資産相関を推定し、考察を行った。

本稿の主要な結果等は以下のとおりである。

① まず、デフォルト率の変動に関する主成分分析によれば、業種、企業規模、都道府県の累積寄与率は、第 1 主成分では相対的に低く、第 2 主成分までで概ね 9 割程度を確保すること、つまり、これらの場合は、少なくとも第 2 主成分までとらないと、デフォルト率の変動を説明することは困難であることを指摘することができる。このため、本稿では、マルチ･インデックス･モデルを採用した。

② 資産相関は、業種、信用度、規模、地域の各グループのなかで、ばらつきがあることが判明した。これは、与信ポートフォリオに一律の資産相関を適用することは必ずしも適当ではないことを示唆している。

---

21 ***、**は、それぞれ 99%、95%の各信頼水準で有意であることを示す。

③　企業規模でグループ分けしたとき、資産相関は規模の大きい企業で大きく、規模の小さい企業では小さい。これについては、以下のような仮説を立てることが可能であると考えられる。まず、企業規模が非常に大きいと仮定すると、その企業の業況は経済全体の「システム」（例えば、一国全体の景気、あるいはその企業が属する業種・地域等の業況）に近いことになる。このため、規模の大きな企業の業況は、共通要因の影響を受けやすくなり、資産相関が相対的に高くなる。一方、企業の企業規模が小さいと、その企業の業況は「システム」より個社毎の事情に左右される度合いが高まる。このため、中小企業や個人営業の資産相関は相対的に低くなる。

④　資産相関を信用度の関数とみるとき、資産相関は、信用度の高位の企業と低位の企業で大きく、信用度が中位の企業で小さいという傾向（下に凸の関数形）がみられた。

⑤　都道府県毎の資産相関は、相違が大きく、最大で 3.7 倍程度の差となった。資産相関とデフォルト率の標準偏差には正の相関がみられ、デフォルト率の変動が相対的に大きい都道府県では、概ね資産相関が大きい傾向がみられた。

今回の分析によって、与信ポートフォリオの信用リスク管理実務では、資産相関の扱いが重要であることが改めて浮き彫りとなった。資産相関の値は、個別金融機関の貸出ポートフォリオの性質等によって異なるため、本稿で推定した値をそのまま使用することは適当ではないが、本稿で示した推定手法等が、信用リスク管理の実務上でなにがしかの参考になれば幸いである。

以　上

補論１．1 ファクター･モデル

マートン型のファクター･モデルは、Merton [1974]におけるデフォルト発生の考え方をベースとしており、企業価値が確率的に変動する様子を表現したうえで、その企業価値が満期時点において一定の水準（「デフォルト･トリガー」）を下回った場合に当該企業がデフォルトする、と考える。

本稿では、マートン型のファクター･モデルのうち、1 ファクター･モデル[22]と呼ばれるモデルを扱う。

（1）基本形

基本形では、時刻をt（$t \geq 0$）として、企業a_iの資産価値$Z_i(t)$は、(6)式で表される。

$$Z_i(t) = \sqrt{r_i}\, X(t) + \sqrt{1-r_i}\, \varepsilon_i(t) \tag{6}$$
$$0 \leq r_i \leq 1,\ \ i = 1,2,\ldots,n$$

ここで、nは企業数である。資産価値を表す確率変数$Z_i(t)$は、すべての企業に影響を与える共通要因を表す確率変数$X(t)$と、企業a_iに固有の個別要因を表す確率変数$\varepsilon_i(t)$の 2 つの確率的要素から構成される。$X(t)$と$\varepsilon_i(t)$は、それぞれ互いに独立な標準正規分布に従うと仮定する。したがって、それらの線形結合も正規分布に従い、(6)式右辺の線形結合では、$Z_i(t)$は標準正規分布に従う。r_iは資産相関と呼ばれ、$\sqrt{r_i}$ は資産価値$Z_i(t)$の共通要因$X(t)$に対する感応度を表す。

資産価値を表す$Z_i(t)$が、デフォルト･トリガーγ_iを下回るときに、企業a_iはデフォルトすると仮定する。したがって、企業a_iのデフォルト確率PD_iは、(7)式のように、$Z_i(t)$がγ_iを下回る確率として表現される。

---

[22] 1 ファクター･モデルのほかにマルチ･ファクター･モデルがある。マルチ･ファクター･モデルでは、例えばF ファクター･モデルの場合、$Y_1(t), Y_2(t), \cdots, Y_F(t)$ というF 個の異なる動きをするすべての企業に影響を与える共通要因が導入される。具体的には、以下の式で表されるモデルである。

$$Z_i(t) = \sqrt{r_{i,1}}\, Y_1(t) + \sqrt{r_{i,2}}\, Y_2(t) + \cdots + \sqrt{r_{i,F}}\, Y_F(t) + \sqrt{1-\sum_{j=1}^{F} r_{i,j}}\, \varepsilon_i(t) \tag{a}$$

$0 \leq r_{i,1} \leq 1$, $0 \leq r_{i,2} \leq 1$, ..., $0 \leq r_{i,F} \leq 1$, $i = 1,2,\ldots,n$であり、$Y_1(t), Y_2(t), \cdots, Y_F(t)$, ε_iは、互いに独立な標準正規分布に従う。

$$
\begin{aligned}
PD_i &= \Pr\left(Z_i(t) < \gamma_i\right) \\
&= \Phi(\gamma_i)
\end{aligned}
\tag{7}
$$

$$
\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp(-u^2/2)\,du
$$

（2）シングル･インデックス･モデル

シングル･インデックス･モデルは､1ファクター･モデルの1つの類型である。（1）の基本形のモデルでは、企業a_i毎に異なる資産相関r_iを設定しているが、シングル･インデックス･モデルでは、企業をある基準で分類し、基準毎にグループを作成する。

企業a_i $(i=1,\cdots,n)$全体が作る集合A に対して、企業をある基準の下でグループ化し、これを$S^{(l)}=\{S_1^{(l)},\cdots\cdots,S_{m_l}^{(l)}\}$で表す。$m_l$はグループ数である。各$S^{(l)}$は、企業$a_i$を要素に持つ$A$ の部分集合$S_k^{(l)}$ $(k=1,\cdots,m_l)$で構成されるとする。ここで、lはグループ化の基準、kはグループの種類を表す。例えば、lが“ 業種 ”であれば、kには､“ 製造業 ”､“ 建設業 ”等が該当する。

なお、任意のlに対して、各$S^{(l)}$は、次の関係を満たす。

$$
A=\bigcup_{k=1}^{m_l} S_k^{(l)} \quad , \quad S_i^{(l)} \cap S_j^{(l)} = \phi, \quad i \neq j, \quad S^{(l)}=\{S_1^{(l)},\cdots\cdots,S_{m_l}^{(l)}\}
$$

以下では、簡単化のため、$S^{(l)}$のlを 1 つ選択して固定し（すなわち、グループ化の基準を 1 つに定める)、これを改めて、$S=\{S_1,\cdots,S_m\}$と表記する。

ここで､同一グループS_kに属する企業は､すべて同じ資産相関ρ_k（$r_i = r_j = \rho_k$, $a_i, a_j \in S_k$, $i \neq j$）、すべて同じデフォルト･トリガーC_kをとると仮定する（$\gamma_i = \gamma_j = C_k$, $a_i, a_j \in S_k$, $i \neq j$）[23]。つまり、$a_i \in S_k$のとき、(6)、(7)式は、それぞれ(1)式（再掲)、(8)式にそれぞれ書き換えられる。

$$
Z_i(t) = \sqrt{\rho_k}\,X(t) + \sqrt{1-\rho_k}\,\varepsilon_i(t) \tag{1}
$$

[23] 資産相関ρ_kとデフォルト･トリガーC_kは同じ属性内では同一であるという仮定がある。仮に、同じグループの中に、複数のデフォルト･トリガーを設定する必要がある場合には、異なるグループに属するものとして定式化する必要がある。ここでは、各グループにおいて代表的なデフォルト･トリガーC_kが存在するものとして定式化しており､既存研究でもこのように定式化しているものが多い（補論 2 参照)。

$$
\begin{aligned}
PD_i &= \Pr\left(Z_i(t) < C_k\right) \\
&= \Phi\left(C_k\right)
\end{aligned} \tag{8}
$$

本稿で上記のような仮定を置く理由は、企業a_i毎の資産価値やその代理変数（株価、信用スコア等）が観測可能である場合には、企業a_i毎に異なる資産相関r_iやデフォルト・トリガーγ_iを設定することも可能になるが、それらのデータを入手することが不可能または困難であることが少なくないためである。

（3）マルチ･インデックス･モデル

シングル･インデックス･モデルでは、共通要因$X(t)$は 1 種類であり、すべての企業が同じ共通要因を持つという考え方が採用されている。一方、各企業の属するグループ毎にも共通要因が異なるという方法も十分考えられる。企業a_iはグループS_k毎に異なる共通要因を持っており、それらの共通要因が相互に相関を持って変動すると考えることも可能である。(1)式を(2)式（再掲）に置き換えたモデルを考え、本稿では、これをマルチ･インデックス･モデル[24]と呼称する。

$$
Z_i(t) = \sqrt{\rho_k}\, X_k(t) + \sqrt{1-\rho_k}\,\varepsilon_i(t) \tag{2}
$$

シングル･インデックス･モデル（(1)式）とマルチ･インデックス･モデル（(2)式）との差異は、共通要因が、全債務者に共通な$X(t)$ではなく、企業a_iが属するグループS_kに共通な$X_k(t)$であることである。

[24] マルチ･インデックス･モデルをマルチ･ファクター･モデルで表現することは、以下のように可能である。

まず、脚注 22 の(a)式を(2)式のようにグループ毎に定まるパラメータを持つマルチ･ファクター･モデルに書き換えると、

$$
Z_i(t) = \sqrt{r_{k,1}}\,Y_1(t) + \sqrt{r_{k,2}}\,Y_2(t) + \cdots + \sqrt{r_{k,F}}\,Y_F(t) + \sqrt{1-\sum_{j=1}^{F} r_{k,j}}\,\varepsilon_i(t) \tag{b}
$$

となる。

ここで、(2)式のρ_kと$X_k(t)$を

$$
\begin{aligned}
\rho_k &= \sum_{j=1}^{F} r_{i,j} \\
X_k(t) &= \left(\sqrt{r_{k,1}}\,Y_1(t) + \sqrt{r_{k,2}}\,Y_2(t) + \cdots + \sqrt{r_{k,F}}\,Y_F(t)\right) \Big/ \sqrt{\rho_k}
\end{aligned} \tag{c}
$$

と置き換えれば、(b)式と同式となる。

本稿では、各共通要因$X_k(t)$の間の相関は考慮に入れていないが、各共通要因$X_k(t)$の間の相関を表現する方法としては、例えば、以下が考えられる（Bluhm and Overbeck [2003]）。

共通要因$X_k(t)$は、(5)式（再掲）を満たすとする。

$$X_k(t) = \sqrt{\rho} X(t) + \sqrt{1-\rho}\,\delta_k(t) \tag{5}$$

ここで、$X(t),\ \delta_k(t)$は互いに独立であるとし、さらに、これらは企業a_iの個別要因ε_iとも独立であるとする。

このとき、(2)式から、(4)式（再掲）を得る。

$$\begin{aligned} Z_i(t) &= \sqrt{\rho_k}(\sqrt{\rho} X(t) + \sqrt{1-\rho}\,\delta_k(t)) + \sqrt{1-\rho_k}\,\varepsilon_i(t) \\ &= \sqrt{\rho_k}\sqrt{\rho} X(t) + \sqrt{\rho_k}\sqrt{1-\rho}\,\delta_k(t) + \sqrt{1-\rho_k}\,\varepsilon_i(t) \end{aligned} \tag{4}$$

ここで、グループS_kに属する企業a_iの、$X_k(t) = x_k$の下での条件付デフォルト確率 $p_k(X_k(t) \mid X_k(t) = x_k)$（以下、$p_k(x_k)$と表示）は、資産価値$Z_i(t)$がある閾値$C_k$を下回る確率である。

$p_k(x_k)$は、(2)式から、

$$\begin{aligned} p_k(x_k) &= \Pr(Z_i < C_k \mid X_k(t) = x_k) \\ &= \Pr(\sqrt{\rho_k}\,x_k + \sqrt{1-\rho_k}\,\varepsilon_i < C_k) \\ &= \Pr\left(\varepsilon_i < \frac{C_k - \sqrt{\rho_k}\,x_k}{\sqrt{1-\rho_k}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{C_k - \sqrt{\rho_k}\,x_k}{\sqrt{1-\rho_k}}\right) \end{aligned}$$

となる。

このとき、$p_k(x_k)$と$p_l(x_l)$の共分散は、次式で表現される。

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}[p_k(x_k), p_l(x_l)] &= \mathrm{E}[p_k(x_k)p_l(x_l)] - \bar{p}_k\bar{p}_l \\ &= \Phi_2(C_k, C_l \mid \rho\sqrt{\rho_k\rho_l}) - \Phi(C_k)\Phi(C_l)\end{aligned} \tag{9}$$ [25]

---

[25] $\mathrm{E}[p_k(x_k)p_l(x_l)] = \Phi_2(C_k, C_l; \rho\sqrt{\rho_k\rho_l})$の証明

$$\mathrm{E}[p_k(x_k)p_l(x_l)]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi\left(\frac{C_k-\sqrt{\rho_k}x_k}{\sqrt{1-\rho_k}}\right)\Phi\left(\frac{C_l-\sqrt{\rho_l}x_l}{\sqrt{1-\rho_l}}\right)\phi\left(\frac{x_k-\rho x_l}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)\phi(x_l)\,dx_k dx_l \tag{d}$$

$y \equiv \dfrac{x_k-\rho x_l}{\sqrt{1-\rho^2}}$ と変数変換すると、(d)式の一部を以下のように書き直せる。

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi\left(\frac{C_k-\sqrt{\rho_k}x_k}{\sqrt{1-\rho_k}}\right)\phi\left(\frac{x_k-\rho x_l}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)dx_k \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\Phi\left(\frac{C_k-\sqrt{\rho_k}(\sqrt{1-\rho^2}\,y+\rho x_l)}{\sqrt{1-\rho_k}}\right)\phi(y)\,dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\Phi\left(\frac{\dfrac{C_k-\rho\sqrt{\rho_k}x_l}{\sqrt{1-\rho_k\rho^2}}-\sqrt{\dfrac{\rho_k-\rho_k\rho^2}{1-\rho_k\rho^2}}\,y}{\sqrt{\dfrac{1-\rho_k}{1-\rho_k\rho^2}}}\right)\phi(y)\,dy \\ &= \Phi\left(\frac{C_k-\rho\sqrt{\rho_k}x_l}{\sqrt{1-\rho_k\rho^2}}\right)\end{aligned}$$

したがって、(d)式は(e)式のようになる。

$$\mathrm{E}[p_k(x_k)p_l(x_l)] = \int_{-\infty}^{\infty}\Phi\left(\frac{C_k-\rho\sqrt{\rho_k}x_l}{\sqrt{1-\rho_k\rho^2}}\right)\Phi\left(\frac{C_l-\sqrt{\rho_l}x_l}{\sqrt{1-\rho_l}}\right)\phi(x_l)dx_l \tag{e}$$

ここで

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Phi\left(\frac{a-cx}{\sqrt{1-c^2}}\right)\Phi\left(\frac{b-dx}{\sqrt{1-d^2}}\right)\phi(x)dx = \Phi_2(a,b \mid cd) \tag{f}$$

の関係を用いると、

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Phi\left(\frac{C_k-\rho\sqrt{\rho_k}x_l}{\sqrt{1-\rho_k\rho^2}}\right)\Phi\left(\frac{C_l-\sqrt{\rho_l}x_l}{\sqrt{1-\rho_l}}\right)\phi(x_l)dx_l = \Phi_2(C_k, C_l \mid \rho\sqrt{\rho_k\rho_l}) \tag{e'}$$

となり、(d)式は(g)式のように 2 次元標準正規分布の分布関数を用いて表される。

$$\mathrm{E}[p_k(x_k)p_l(x_l)] = \Phi_2(C_k, C_l \mid \rho\sqrt{\rho_k\rho_l}) \tag{g}$$

ここで、$\overline{p}_k, \overline{p}_l$ は無条件デフォルト確率である。また $\Phi_2(x_k, x_l \mid \rho)$ は、次式で表される、2 次元正規分布の分布関数である。

$$\Phi_2(x_k, x_l \mid \rho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{x_k} \int_{-\infty}^{x_l} \exp(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(u^2 - 2\rho uv + v^2))\, du\, dv$$

$$\equiv \int_{-\infty}^{x_k} \int_{-\infty}^{x_l} \phi_2(u, v \mid \rho)\, du\, dv$$

ここで、$\phi_2(u,v \mid \rho)$ は 2 次元正規分布の密度関数である。

κ をデータの年数、$\tilde{p}_{k,j}$ をグループ S_k の j 年におけるデフォルト確率、$\tilde{\tilde{p}}_k$ をグループ S_k に属する企業のデフォルト確率の平均値とすると、共分散 $\mathrm{Cov}[p_k(x_k), p_l(x_l)]$ は、次の(10)式で表される。

$$\mathrm{Cov}[p_k(x_k), p_l(x_l)] = \frac{1}{\kappa}\sum_{j=1}^{\kappa}(\tilde{p}_{k,j} - \tilde{\tilde{p}}_k)(\tilde{p}_{l,j} - \tilde{\tilde{p}}_l) \qquad (10)$$

(10)式左辺の共分散は、デフォルト率の時系列データを用いて計算することができる。このため、(9)式とあわせて、

$$\frac{1}{\kappa}\sum_{j=1}^{\kappa}(\tilde{p}_{k,j} - \tilde{\tilde{p}}_k)(\tilde{p}_{l,j} - \tilde{\tilde{p}}_l) = \Phi_2(C_k, C_l \mid \rho\sqrt{\rho_k \rho_l}) - \Phi(C_k)\Phi(C_l)$$

を解くことによって ρ を求めることができる。

計算の結果、ρ の水準が 0 と有意に違わなければ、グループ毎の共通要因は、マクロ全体の共通要因には依存しないことを意味する。

【(f)式の証明】
$Y_1 = cX + \sqrt{1-c^2}Z_1$, $Y_2 = dX + \sqrt{1-d^2}Z_2$, $X, Z_1, Z_2 \sim N(0,1)$ i.i.d.（$-1 \le c, d \le 1$）とすると、(f) 式の左辺は $\Pr(Y_1 < a, Y_2 < b)$ という同時確率を示す式である。一方、$\mathrm{Cov}[Y_1, Y_2] = cd$ であり、(Y_1, Y_2) は構成から明らかなように2次元の標準正規分布に従い、相関は cd となる。よって、$\Pr(Y_1 < a, Y_2 < b) = \Phi_2(a, b \mid cd)$ となる。■

補論２．資産相関の推定に関する既存研究の概要

図表 19 に、マートン型の 1 ファクター･モデルを採用し、過去のデフォルトのデータを基に、資産相関を推定した、主要な既存研究の概要を掲げる。

[図表 19] 1 ファクター･モデルを用いた資産相関推定の主要既存研究の概要[26]

既存研究	データの概要	分類の基準	資産相関の水準
Carlos and Cespedes [2002]	Moody's（1970-2000 年）	―――	約 0.1
Gordy and Heitfield [2002][27]	Moody's（1970-1998 年）	格付別	0.0551-0.1114
	S&P（1981-1997 年）		0.0494-0.0886
Hamerle, Liebig and Rösch [2003]	S&P（1982-99 年）	格付別	0.0391-0.0695[28]
Bluhm and Overbeck [2003]	Moody's（1970-2001 年）	格付別	0.1177-0.4251
Düllmann and Scheule [2003]	独 53,280 社（1991-2000 年）	信用度別、規模別	0.002-0.045[29]
Lopez [2004]	KMV CreditMonitor Database（米 6,909 社、欧 3,675 社、日 3,255 社＜-2000 年＞）	格付別、規模別、国別	0.1000-0.5500
Dietsch and Petey [2004]	仏 440,000 社（1995-2001 年）	信用度別、規模別、業種別	0-0.1072
	独 280,000 社（1997-2001 年）		0-0.0652
Jakubik [2006]	フィンランドの月次デフォルト率（1988/2-2004/1 月）	―――	0.0152, 0.0166[30]
北野 [2007]	日本の月次デフォルト率（東京商工リサーチ＋国税庁データ、1982/7-2002/7 月）	規模別	約 0.04〜0.15[31]

26 Chernih, Vanduffel and Henrard [2006]も、資産相関の推定の先行研究をサーベイしている。

27 同論文では、パラメータに制約条件を加える場合と加えない場合の両方で、資産相関を推定している。ここでは、本稿と基本的に同一の推定方法である、制約条件を加えない場合の結果を参照している。なお、同論文は、本稿で定義する資産相関の平方根で結果を算出しているため、ここでは同論文の結果の 2 乗値を掲げている。

28 ここでは同論文の結果の 2 乗値を挙げている。

29 同論文では、デフォルト率として、破綻実績から計算したデフォルト率と、貸出の引当額から計算したデフォルト率の両者を採用している。ここでは、前者で最尤法を用いた場合の結果を掲げている。

30 同論文では、デフォルトか否かを分ける資産価値の閾値を、①固定値にする場合と、②GDP 等の関数として表現する場合とで、それぞれ資産相関を推定している。ここでは、①に 1 ファクター･モデルを適用した結果を参照している。上記図表にある 2 つの数値はデータ期間の違いによるものである。なお、同論文では、②で業種別にも資産相関を算出しているが、②は本稿の手法とはアプローチがやや異なるため、ここでは記載していない。

31 同論文は、2 ファクター･モデルを扱っている（(4)式とほぼ同様）が、その特殊ケースとして、(2)式のマルチ･インデックス･モデルに相当するモデル（同論文内では「モデル１」と呼称）が定義されており、ここではその結果を挙げている。

次に、図表 20 に、上記既存研究のうち Carlos and Cespedes [2002]、Jakubik [2006]および北野 [2007][32]を除く各研究における、格付（信用度）別、規模別の資産相関の推定結果を掲げる。

[**図表** 20] **主要既存研究での格付（信用度）別、規模別の資産相関の推定結果**

・Gordy and Heitfield [2002]**（格付別）**

（S&P**）**

A	BBB	BB	B	CCC
0.075	0.061	0.089	0.049	0.065

（Moody’s**）**

A	Baa	Ba	B	Caa
0.055	0.084	0.111	0.067	0.063

・Hamerle, Liebig and Rösch [2003] **（格付＜**S&P**＞別）**

BB	B	CCC
0.060	0.045	0.069

・Bluhm and Overbeck [2003]**（格付＜**Moody’s**＞別）**

Aa	A	Baa	Ba	B	Caa
0.3150	0.2289	0.1595	0.1300	0.1177	0.4251

・Düllmann and Scheule [2003]**（信用度別、規模別）**

信用度（ハザード・レート＜HR**＞）**		**売上高**		
		Small <5M Euro	Medium 5-20M Euro	Large >20M Euro
A	(0 < HR ≤ 0.01)	0.002	0.007	0.013
B	(0.01 < HR ≤ 0.015)	0.010	0.011	0.016
C	(0.015 < HR)	0.005	0.016	0.045

・Lopez [2004]**（格付＜**S&P**＞別、規模別）**

（米）

信用度	**資産規模**		
	0~100M$	100~1000M$	1000M$~
AAA~BBB-	0.1375	0.1875	0.3250
BB+~B-	0.1250	0.1875	0.2750
CCC+~D	0.1250	0.1750	0.2250

[32] 北野 [2007]は、企業規模（資本金）別の資産相関の推定を時系列で行っている。そこでは、資産相関は資本金の増加関数であることが示されている。詳細は原論文を参照。

（日）

信用度	資産規模		
	0~200M$	200~1000M$	1000M$~
AAA~BBB-	0.2250	0.2500	0.4250
BB+~B-	0.2000	0.2500	0.4000
CCC+~D	0.2000	0.2750	0.5550

（欧）

信用度	資産規模		
	0~100M$	100~1000M$	1000M$~
AAA~BBB-	0.1250	0.1250	0.2000
BB+~B-	0.1250	0.1250	0.1750
CCC+~D	0.1250	0.1250	0.1750

・Dietsch and Petey [2004]（信用度別、規模別）

（仏）

信用度	売上高				Total SMEs
	Large firms >40M Euro	SMEs 7-40M Euro	SMEs 1-7M Euro	SMEs <1M Euro	
1（高）	0.015	0.0279	0.0295	0.0079	0.0219
2	0	0.0156	0.0195	0.0012	0.0229
3	0.0439	0.0071	0.0061	0.0155	0.0231
4	0.0279	0.0057	0.0095	0.0134	0.0267
5	0.0277	0.0037	0.0098	0.0153	0.0151
6	0	0.0082	0.0147	0.0178	0.0199
7	0	0.0207	0.0208	0.0267	0.0298
8（低）	0	0.1072	0.0279	0.0271	0.0307
Total	0.0221	0.0049	0.0097	0.0154	0.0128

（独）

信用度	売上高				Total SMEs
	Large firms >40M Euro	SMEs 7-40M Euro	SMEs 1-7M Euro	SMEs <1M Euro	
1（高）	0.0121	0	0	0	0.0011
2	0.0251	0.0057	0.0133	0.0186	0.0129
3	0	0.0024	0.0129	0.0152	0.0119
4	0.0161	0.0652	0.0142	0.0221	0.0201
5	0.0075	0.0025	0.0202	0.0318	0.0259
6	0.0049	0.0025	0.0062	0.0121	0.0079
7	0.0169	0.0057	0.0197	0.0397	0.0275
8（低）	0	0.0203	0.0262	0.0271	0.0259
Total	0.0145	0.0014	0.0079	0.0123	0.0093

補論３．資産相関の推定手法の概要、異なる推定手法による結果の異同

本補論では、資産相関の推定する手法を説明するとともに、異なる推定手法による資産相関の推定結果の異同を考察する。ここでは、推定手法として、最尤法とモーメント法を採用した。

以下の各手法の説明では、マルチ･インデックス･モデルを前提[33]とする。

（１）推定手法の概要

イ．モーメント法

モーメント法によって、グループS_kに属する企業のデフォルト率の平均$\tilde{\mu}_k$と分散$\tilde{\sigma}_k{}^2$に最もフィットする資産相関ρ_kを特定することができる。以下では、モーメント法によって資産相関を求める手続きを Gordy [2000]に基づいて説明する。

ここで、グループS_kに属する企業a_iの、$X_k(t)=x$の下での条件付デフォルト確率 $p_k(X_k(t)\,|\,X_k(t)=x)$（以下、$p_k(x)$と表示）は、資産価値$Z_i(t)$がある閾値C_kを下回る確率である。

$$\begin{aligned}
p_k(x) &= \Pr(Z_i(t) < C_k \mid X_k(t)=x) \\
&= \Pr(\sqrt{\rho_k}X_k(t) + \sqrt{1-\rho_k}\varepsilon_i(t) < C_k \mid X_k(t)=x) \\
&= \Pr\left(\varepsilon_i < \frac{C_k - \sqrt{\rho_k}x}{\sqrt{1-\rho_k}}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{C_k - \sqrt{\rho_k}x}{\sqrt{1-\rho_k}}\right)
\end{aligned}$$

と表現することができる。

第t年（$t=1,2,...$）のグループS_kに属する$n_{k,t}$個の企業a_i（$a_i \in S_k$）のデフォルト･非デフォルトの状況を次式で表す。

$$\tilde{H}_j^k(t) = \begin{cases} 1 & \text{default} \\ 0 & \text{non - default} \end{cases} \quad (j=1,2,...,n_{k,t})$$

このとき、第t年にグループS_kで観測されたデフォルト率$\tilde{p}_k(t)$は、次式で表

---

[33] シングル･インデックス･モデルでも、$X_k(t)$を$X(t)$とみなして議論を進めれば、ほぼ同様の議論で説明することが可能である。

現される。

$$\tilde{p}_k(t)=\frac{1}{n_{k,t}}\sum_{j=1}^{n_{k,t}}\tilde{H}_j^k(t)$$

$\bar{n}_k$ を $n_{k,t}$ の時系列平均、

$$\bar{n}_k=\frac{1}{t}\sum_{\tau=1}^{t}n_{k,\tau}$$

とし、$\tilde{p}_k(t)$ の期待値と分散をそれぞれ $\mathrm{E}_{\varepsilon_i}[\cdot]$、$\mathrm{V}_{\varepsilon_i}[\cdot]$ と書くと、

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_{\varepsilon_i}[\tilde{p}_k(t)|X_k(t)=x]&\approx\frac{1}{\bar{n}_k}\sum_{j=1}^{n_{k,t}}\mathrm{E}[\tilde{H}_j^k(t)]\\&=p_k(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{V}_{\varepsilon_i}[\tilde{p}_k(t)|X_k(t)=x]&\approx\frac{1}{\bar{n}_k{}^2}\sum_{j=1}^{n_{k,t}}\mathrm{V}[\tilde{H}_j^k(t)]\\&=\frac{1}{\bar{n}_k{}^2}\left(\sum_{j=1}^{n_{k,t}}\mathrm{E}\left[\left(\tilde{H}_j^k(t)\right)^2\right]-\sum_{j=1}^{n_{k,t}}\mathrm{E}\left[\tilde{H}_j^k(t)\right]^2\right)\\&=\frac{1}{\bar{n}_k{}^2}\left(\sum_{j=1}^{n_{k,t}}\mathrm{E}\left[\tilde{H}_j^k(t)\right]-\sum_{j=1}^{n_{k,t}}\mathrm{E}\left[\tilde{H}_j^k(t)\right]^2\right)\\&=\frac{1}{\bar{n}_k{}^2}\left(\bar{n}_k p_k(x)-\bar{n}_k p_k(x)^2\right)\\&=\frac{p_k(x)(1-p_k(x))}{\bar{n}_k}\end{aligned}$$

となる。

各年の実績デフォルト率の平均と分散をそれぞれ $\tilde{\mu}_k$ と $\tilde{\sigma}_k{}^2$ とすると、それらは、

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}_k&=\mathrm{E}_{X_k,\varepsilon_i}[\tilde{p}_k(t)]\\&=\mathrm{E}_{X_k}[\mathrm{E}_{\varepsilon_i}[\tilde{p}_k(t)\mid X_k(t)=x]]\\&=\mathrm{E}_{X_k}[p_k(x)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_k{}^2&=\mathrm{V}_{X_k,\varepsilon_i}[\tilde{p}_k(t)]\\&=\mathrm{V}_{X_k}[\mathrm{E}_{\varepsilon_i}[\tilde{p}_k(t)\mid X_k(t)=x]]+\mathrm{E}_{X_k}[\mathrm{V}_{\varepsilon_i}[\tilde{p}_k(t)\mid X_k(t)=x]]\\&=\mathrm{V}_{X_k}[p_k(x)]+\mathrm{E}_{X_k}\left[\frac{p_k(x)(1-p_k(x))}{\bar{n}_k}\right]\end{aligned}\tag{11}$$

となる。

簡単な計算の結果、パラメータ推定に用いる分散$\mathrm{V}_{X_k}[p_k(x)]$は、以下のようになる。

$$\mathrm{V}_{X_k}[p_k(x)] = \frac{\mathrm{V}_{X_k,\varepsilon_i}[\tilde{p}_k(t)] - \frac{1}{\bar{n}_k}\mathrm{E}_{X_k}[p_k(x)]\left(1-\mathrm{E}_{X_k}[p_k(x)]\right)}{1-\frac{1}{\bar{n}_k}}$$
$$= \frac{\bar{n}_k\tilde{\sigma}_k{}^2 - \tilde{\mu}_k + \tilde{\mu}_k{}^2}{\bar{n}_k - 1}$$

したがって、 C_k と ρ_k は、以下の(12)、(13)式の連立方程式を解くことによって求めることができる。

$$\tilde{\mu}_k = \Phi(C_k) \tag{12}$$

$$\begin{aligned}\frac{\bar{n}_k\tilde{\sigma}_k{}^2 - \tilde{\mu}_k + \tilde{\mu}_k{}^2}{\bar{n}_k - 1} &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\Phi\left(\frac{C_k-\sqrt{\rho_k}\,x}{\sqrt{1-\rho_k}}\right)\right\}^2 d\Phi(x) - (\Phi(C_k))^2 \\ &= \Phi_2(C_k, C_k \mid \rho_k) - \Phi_2(C_k, C_k \mid 0)\end{aligned} \qquad (13)^{34}$$

(12)、(13)式に基づく計算手法を、以下では、有限モーメント法（Finite Moment Method）と呼ぶ。

さらに、$\bar{n}_k \to \infty$ とすると、(13)式は以下の(14)式になる。

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_k{}^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\Phi\left(\frac{C_k-\sqrt{\rho_k}\,x}{\sqrt{1-\rho_k}}\right)\right\}^2 d\Phi(x) - (\Phi(C_k))^2 \\ &= \Phi_2(C_k, C_k \mid \rho_k) - \Phi_2(C_k, C_k \mid 0)\end{aligned} \tag{14}$$

パラメータの推定には、(13)式に替えて(14)式を用いることもできる。ここでは、(12)、(14)式に基づく計算手法を、漸近的モーメント法（Asymptotic Moment Method）と呼ぶ。

[34] ここでは、脚注 25 内の(f)式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Phi\left(\frac{a-cx}{\sqrt{1-c^2}}\right)\Phi\left(\frac{b-dx}{\sqrt{1-d^2}}\right)\phi(x)\,dx = \Phi_2\left(a,b \mid cd\right)$$

の関係式を使用した。ここで、$a=b=C_k,\ c=d=\sqrt{\rho_k}$ とすれば、(13)式の 2 番目の等式における右辺第 1 項が、 $a=b=C_k,\ c=d=0$ とすれば、同第 2 項が、それぞれ計算される。

ロ．最尤法

次に、最尤法によって資産相関ρ_kを求める手続きを、Gordy and Heitfield [2002]基づいて説明する。

グループS_kのデフォルト率を$p_k(x)$、t年における企業数を$n_{k,t}$、デフォルト件数を$d_{k,t}$とするとき、$X_k(t)=x$の下での条件付の尤度関数は次式となる。

$$L(d_{k,t} \mid X_k(t)=x)=\binom{n_{k,t}}{d_{k,t}} p_k(x)^{d_{k,t}}(1-p_k(x))^{(n_{k,t}-d_{k,t})}$$

$$p_k(x)=\Phi\left(\frac{C_k-\sqrt{\rho_k}\,x}{\sqrt{1-\rho_k}}\right)$$

データの各年を$t=1,2,...,T$、企業が属する各グループをS_k $(k=1,2,\ldots,m)$とすれば、無条件の尤度関数は、

$$L=\prod_{t=1}^{T}\int_{-\infty}^{+\infty}\prod_{k=1}^{m}\binom{n_{k,t}}{d_{k,t}} p_k(x)^{d_{k,t}}(1-p_k(x))^{(n_{k,t}-d_{k,t})}d\Phi(x) \qquad (15)$$

となる。最尤法では、(15)式の対数尤度関数$\log(L)$が最大となるようなC_kとρ_kを求める。

（２）モーメント法と最尤法による推定の比較

ここでは、仮想的なデフォルト･データにモーメント法と最尤法を適用してパラメータを推定することによって、両者の比較を行う。

具体的には、企業数、デフォルト確率、資産相関、年数を外生的に与えたうえで、(4)式を用いて乱数をセットし、設定した資産相関の値になるような各年のデフォルト企業の時系列を生成する。これらの仮想データから資産相関を再度推定し、その値と外生的に与えた資産相関の値を比較する。外生的に与えるパラメータは、図表21のとおりである。

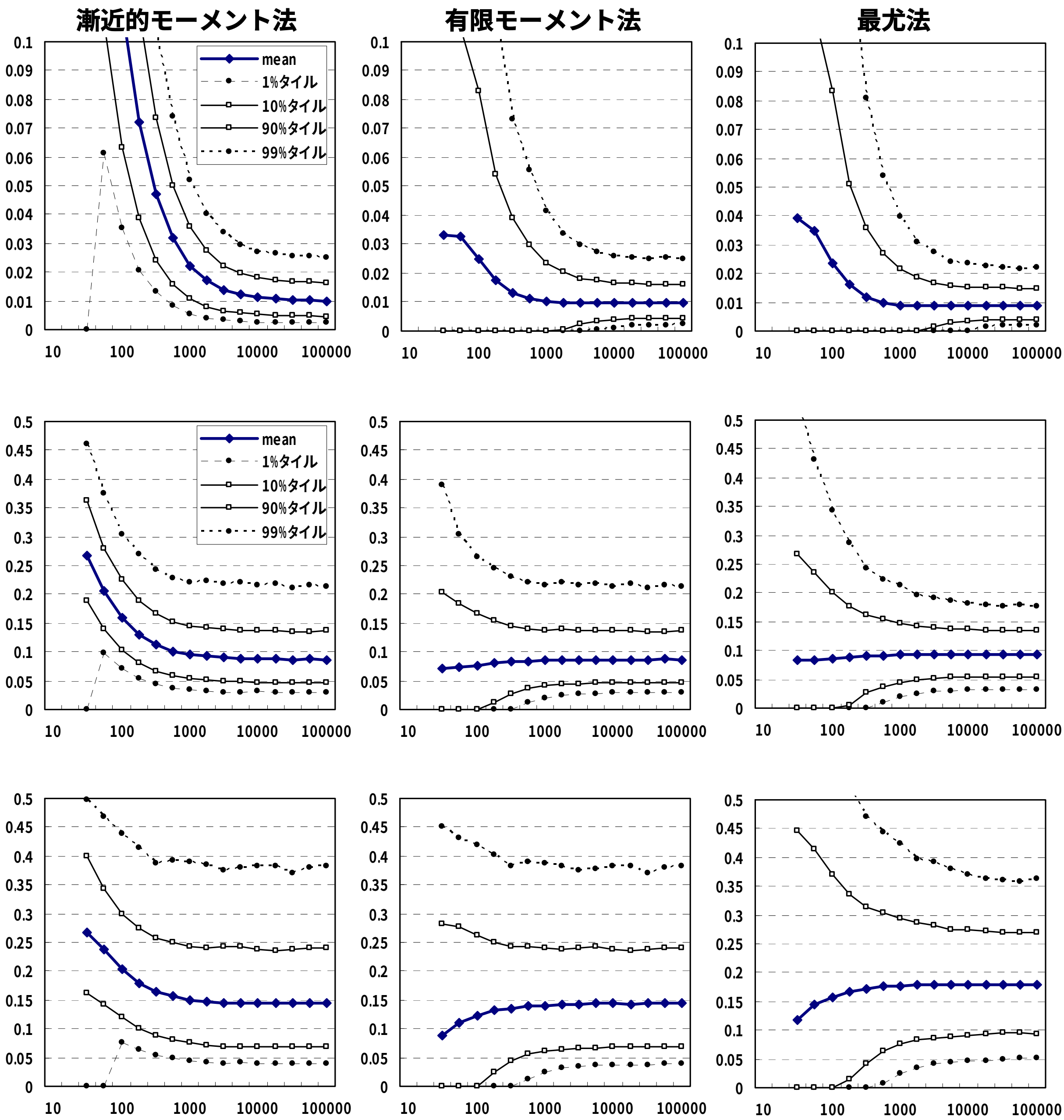
[**図表**21] **各パラメータの設定**

企業数	32(　$10^{1.5}$)～100,000(=10^5)**社**、$10^{0.25}$**社刻み**
デフォルト確率	1%
資産相関	0.01、0.10、0.20
年数	10 **期（互いに独立と仮定）**
実験回数	10,000

モンテカルロ法により発生させたデフォルト企業数と全体企業数のデータを基に、10 期分の資産相関の値を再度推定する。この作業を 10,000 回行い、それらの平均値と 99%点、90%点、10%点、1%点を示したものが図表 22 である[35]。

[図表 22] 各手法による資産相関の推定値（横軸；企業数）

—— **資産相関の真値は、上段、中段、下段で、それぞれ** 0.01、0.10、0.20



[35] 図表 22 の作成にあたり、(13)～(15)式の積分計算はガウス求積法（150 分割）で行っている。

これから、以下のことを指摘することが可能である。

① 企業数が少ないときに、漸近的モーメント法が、資産相関を特に過大推定する傾向を持つ。デフォルト率が 1%の場合には、企業数が概ね 1,000 以上になると、いずれの手法でも、資産相関の推定値は企業数に依存しなくなる傾向がある。

② 企業数が十分大きいときは、いずれの手法でも、推定値が真値を若干下回る。これは、特に資産相関の値が大きい場合に顕著である。

③ 推定値の平均値が真値により近い手法は最尤法である。

①については、$\bar{n}_k$ 社から観測されるデフォルト率を用いて分散を計算すると、有限モーメント法は、漸近的モーメント法に比べ $\mathrm{E}_X[p_k(x)(1-p_k(x))/\bar{n}_k]$ だけ差異を与える（(11)式参照）。特に、企業数が小さいと、資産相関を過大推定する傾向が生じる。なお、$\bar{n}_k$ が 1,000 以上になると推定値が真値に概ね一致するようになるという結果は Düllmann and Scheule [2003]の結果と整合的である。

②については、Gordy and Heitfield [2002]、Demey, Jouanin and Roget [2004]が、本稿と同様に、企業数が大きいときには推定値が真値を若干下回るという結果を得ている[36]。

次に、期間 t と推定値の関係を考察する。資産相関 0.1、デフォルト率 0.01 として、t を 10、15、20 および 30 年に設定して、漸近的モーメント法、有限モーメント法および最尤法で、資産相関を推定した。企業数は、1,000、10,000 および 100,000 の 3 通りである。その結果が図表 23 である。

[図表 23] 企業数とデータ期間の違いによる推定結果の違い

—— 資産相関 0.1 に設定、他のパラメータは図表 21 と同様

漸近的モーメント法

	10 年	15 年	20 年	30 年
1,000 社	0.0907	0.0947	0.0984	0.1006
10,000 社	0.0838	0.0879	0.0901	0.0930
100,000 社	0.0833	0.0870	0.0894	0.0930

有限モーメント法

	10 年	15 年	20 年	30 年
1,000 社	0.0808	0.0852	0.0893	0.0917
10,000 社	0.0828	0.0869	0.0891	0.0921
100,000 社	0.0832	0.0869	0.0893	0.0929

最尤法

	10 年	15 年	20 年	30 年
1,000 社	0.0891	0.0928	0.0950	0.0968
10,000 社	0.0898	0.0933	0.0944	0.0963
100,000 社	0.0898	0.0926	0.0945	0.0964

図表 23 から、データ期間が相対的に短いと、資産相関は過小に推定されること、データ期間が長くなると、推定値は真値に近づくことがわかる。この点は、Demey, Jouanin and Roget [2004]も、t が大きいほど、資産相関の推定値が真値に

---

36 企業数が大きいときに推定値が真値を若干下回ることの背景の考察を試みたが、現時点では、残念ながら、具体的な背景は不明である。

近づくという結果を得ている。

③については、図表 22 から確認することができるほか、図表 24 から分布の分散は最尤法の場合が最も小さいことも確認される。

[**図表** 24] **シミュレーション結果の標準偏差**

――　企業数 10,000 **社の場合、他のパラメータは図表** 21 **と同様**

資産相関の設定値	**漸近的モーメント法**	**有限モーメント法**	**最尤法**
0.2	0.0722	0.0722	0.0682
0.1	0.0419	0.0420	0.0381
0.01	0.0048	0.0048	0.0043

補論４．資産相関の推定に用いたデータ数

ここでは、資産相関の推定に使用した帝国データバンクの「倒産確率算出用マトリクスデータ」のデータ数（1985～2005 年の平均値）を示す。

（１）業種別データ

[図表 25] 業種別企業数 (上段:全企業数、下段:デフォルト企業数)

全産業	農･林･漁･鉱業	建設業	製造業	卸売･小売業･飲食店	金融･保険業	不動産業	運輸･通信･電気･ｶﾞｽ等	サービス業
960,980	9,515	194,377	175,173	382,660	1,160	41,960	34,318	121,817
7,677	59	2,170	1,348	2,853	11	270	248	718

（２）企業規模別データ

[図表 26] 企業規模別企業数 (上段:全企業数、下段:デフォルト企業数)

大･中堅企業	中小企業	個人営業
22,384	792,900	145,697
74	6,843	759

[図表 27] 主な業種の企業規模別企業数 (上段:全企業数、下段:デフォルト企業数)

	大･中堅企業	中小企業	個人営業
製造業			
	2,589	157,260	15,324
	2	1,229	117
建設業			
	446	166,599	27,333
	2	2,011	157
卸売･小売業、飲食店			
	9,482	293,137	80,041
	36	2,407	410
サービス業			
	9,254	96,547	16,016
	33	641	44

（３）評点バンド別データ

[図表 28] 評点バンド別企業の平均数 (上段:全企業数、下段:デフォルト企業数)

96〜100	91〜95	86〜90	81〜85	76〜80	71〜75	66〜70	61〜65	56〜60	51〜55
1	13	86	276	1,334	5,674	16,031	39,936	112,844	321,609
0	0	0	0	0	1	4	28	200	1,431

46〜50	41〜45	36〜40	31〜35	26〜30	21〜25	16〜20	11〜15	6〜10	0〜5
227,151	137,333	65,689	20,591	5,585	1,021	196	29	6	5,577
2,112	1,894	1,254	490	171	36	7	1	0	47

（4）地方別、都道府県別データ

[図表 29] 地方別企業の平均数 (上段：全企業数、下段：デフォルト企業数)

全国	北海道・東北	北陸	関東甲信越	中部	近畿	中国	四国	九州・沖縄
960,980	112,308	28,655	381,471	100,924	150,549	62,410	31,914	92,748
7,677	964	184	3,067	637	1,354	434	202	835

[図表 30] 都道府県別企業の平均数 (上段：全企業数、下段：デフォルト企業数)

北海道	青森	岩手	宮城	秋田	山形	福島	茨城
47,609	10,537	8,854	15,049	7,953	8,007	14,298	18,237
447	82	59	136	76	59	105	96

栃木	群馬	埼玉	千葉	東京	神奈川	新潟	富山
14,351	14,342	39,073	27,986	173,982	48,529	20,159	9,406
90	89	305	217	1,589	385	137	60

石川	福井	山梨	長野	岐阜	静岡	愛知	三重
9,754	9,494	7,865	16,947	13,536	26,999	48,455	11,934
68	56	56	104	84	161	323	69

滋賀	京都	大阪	兵庫	奈良	和歌山	鳥取	島根
6,620	19,558	78,828	32,189	5,919	7,436	4,705	5,329
40	160	805	255	47	48	36	32

岡山	広島	山口	徳島	香川	愛媛	高知	福岡
16,483	24,386	11,507	6,501	8,434	10,963	6,016	33,756
101	189	75	39	50	71	41	310

佐賀	長崎	熊本	大分	宮崎	鹿児島	沖縄
5,546	9,606	11,033	8,725	7,942	9,968	6,172
47	80	94	72	73	88	71

参考文献

北野 利幸、「デフォルト実績データによるデフォルト依存関係の推定 ― 2 ファクターモデルによるアセット相関の最尤推定 ―」、日本オペレーションズ・リサーチ学会和文論文誌、vol. 50、2007 年、42～67 頁

Bluhm, C. and L. Overbeck, "Systematic Risk in Homogeneous Credit Portfolios," *Credit Risk; Measurement, Evaluation and Management; Contributions to Economics*, Physica-Verlag/Springer, Heidelberg, Germany, 2003.

Carlos, J. and G. Cespedes, "Credit Risk Modelling and Basel II," *ALGO RESEARCH QUARTERLY*, vol. 5, No. 1, 2002.

Chernih, A., S. Vanduffel and L. Henrard, "Asset Correlations: A Literature Review and Analysis of the Impact of Dependent Loss Given Defaults," 2006.
(http://www.econ.kuleuven.be/insurance/pdfs/CVH-AssetCorrelations_v12.pdf)

Demey, P., J. F. Jouanin and C. Roget, "Maximum likelihood estimate of default correlations," *Risk*, November, 2004, pp. 104-108.

Dietsch, M. and J. Petey, "Should SME exposures be treated as retail or corporate exposures? A comparative analysis of default probabilities and asset correlations in French and German SMEs," *Journal of Banking & Finance*, 28, 2004, pp. 773-788.

Düllmann, K. and H. Scheule, "Determinants of the Asset Correlations of German Corporations and Implications for Regulatory Capital," Presentation paper, 10th annual meeting of German Finance Association, 2003.

(http://www.cofar.uni-mainz.de/dgf2003/paper/paper53.pdf)

Gordy, M., "A comparative anatomy of credit risk models," *Journal of Banking and Finance*, 24, 2000, pp. 119–149.

―――― and E. Heitfield, "Estimating Default Correlations from Short Panels of Credit Rating Performance Data," working paper, Federal Reserve Board, 2002.
(http://elsa.berkeley.edu/~mcfadden/e242_f03/heitfield.pdf)

Hamerle, A., T. Liebig and D. Rösch, "Credit Risk Factor Modeling and the Basel II IRB Approach," DEUTSCHE BUNDESBANK Discussion Paper Series 2: Banking and Financial Studies, No. 02, 2003.

Jakubik, P., “Does Credit Risk Vary with The Economic Cycles? The Case of Finland,” Working Paper, Institute of Economic Studies, Faculty of Social Sciences, Charles University in Prague, 2006. (http://ies.fsv.cuni.cz/storage/sylab/133_2006ss_petrjakubik.pdf)

Lopez, J. A., “The Empirical Relationship between Average Asset Correlation, Firm Probability of Default and Asset Size,” *Journal of Financial Intermediation*, 13, 2004, pp. 265–283.

Merton, R., “On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates,” *Journal of Finance*, 29, 1974, pp. 449-470.