



日本銀行ワーキングペーパーシリーズ

長期金利変動のファクター分解

菊池健太郎*

kentarou.kikuchi@boj.or.jp

No.10-J-15
2010年12月

日本銀行
〒103-8660 郵便事業（株）日本橋支店私書箱第30号

* 金融市場局（現・金融研究所）

日本銀行ワーキングペーパーシリーズは、日本銀行員および外部研究者の研究成果をとりまとめたもので、内外の研究機関、研究者等の有識者から幅広くコメントを頂戴することを意図しています。ただし、論文の中で示された内容や意見は、日本銀行の公式見解を示すものではありません。

なお、ワーキングペーパーシリーズに対するご意見・ご質問や、掲載ファイルに関するお問い合わせは、執筆者までお寄せ下さい。

商用目的で転載・複製を行う場合は、予め日本銀行情報サービス局までご相談下さい。転載・複製を行う場合は、出所を明記して下さい。

長期金利変動のファクター分解*

菊池健太郎[†]

【要旨】

本稿では、長期金利を構成する期待短期金利成分とタームプレミアム成分のそれぞれを、主成分要因やマクロ経済変数要因に分解する方法を示す。具体的には、無裁定アフィン型ガウシアン期間構造モデルの下で、潜在変数を推定し、それを長期金利の主成分に変数変換することにより、期待短期金利成分とタームプレミアム成分それぞれを、各主成分の寄与に分解する。さらに、各主成分をマクロ経済変数の線形回帰モデルで表現することで、マクロ経済変数の期待短期金利成分やタームプレミアム成分に対する寄与を、主成分を介して捉える。このような長期金利変動をファクターに分解する方法を、1995年1月から2010年春までの約15年間における日米長期金利に対して適用することで、日米長期金利の特徴や過去の幾つかの時期における長期金利変動の背景の理解を試みる。

分析の結果、(1)日米長期金利のタームプレミアム成分の変動に寄与するイールドカーブの主成分要因が異なる点、(2)日本のタームプレミアム成分は、株価収益率の上昇(低下)に伴い上昇(低下)する傾向が幾つかの時期で見られる点、(3)米国の経済状況の強さを示す変数が改善(悪化)する時に、当該変数は、米国長期金利のタームプレミアム成分の低下圧力(上昇圧力)として作用する傾向が幾つかの時期で見られる点、等が明らかになった。

キーワード: 期待仮説、期待短期金利、タームプレミアム、アフィン型ガウシアン期間構造モデル、主成分、カルマン・フィルター

JEL 分類番号: C13, E43, E44, G12

*本稿の作成に当たっては、一橋大学・沖本竜義准教授、日本銀行のスタッフから有益なコメントを頂戴した。この場を借りて、深く感謝の意を表したい。ただし、あり得べき誤りは、全て筆者に帰属する。また、本稿の内容や意見は、筆者個人に属するものであり、日本銀行および金融市場局、金融研究所の公式見解を示すものではない。

[†]日本銀行金融市場局(現・金融研究所) Email:kentarou.kikuchi@boj.or.jp

1 はじめに

純粹期待仮説においては、長期金利は、将来の短期金利の期待値の期間平均値と一致する¹。しかし、この仮説が成立するならば、長期債で運用する場合の期待収益率と、同じ期間を短期債で再投資して運用する場合の期待収益率が一致することになるが、この仮説を実証的に支持する研究は多くはない。そこで、長期金利を、期待短期金利の期間平均値（以降、これを期待短期金利成分と呼ぶ）に、将来の短期金利変動の不確実性や期間中の流動性低下に対する期間のプレミアム（以降、これをタームプレミアム成分と呼ぶ）が上乘せされたものと解釈する考え方が支持されることが多い。本稿でもこの考え方にに基づき、長期金利を期待短期金利成分とタームプレミアム成分に分解し、両成分を変動させる要因を捉えることを試みる。

長期金利を期待短期金利成分とタームプレミアム成分に分解して、長期金利の変動を分析する試みは、先行研究でも数多くみられる。例えば、Kim and Wright (2005) は、観測不能な状態変数（潜在変数）のみからなる3ファクター無裁定アフィン型ガウシアン期間構造モデルを用いて、米国長期金利を期待短期金利成分とタームプレミアム成分に分解し、米国長期金利の“conundrum”の説明を試みた²。また、Rudebusch et al. (2006) は、Ang and Piazzessi (2003) で提唱された潜在変数とマクロ経済変数をモデルに取り込んだ「マクロファイナンス・アプローチ」に基づく2つのモデル（Bernanke et al. (2005) と Rudebusch and Wu (2008)³）を用いて、米国の長期金利を期待短期金利成分とタームプレミアム成分に分解し、conundrumの要因解明を試みている。また、日本の長期金利データを用いて、期待短期金利成分とタームプレミアム成分を計算し、その変動の背景を捉えようとした先行研究としては、小田、鈴木 (2007) や Ichiue and Ueno (2007) 等がある。

本稿では、金融危機以降のデータも観測期間に加えて、日米長期金利の期待短期金利成分とタームプレミアム成分を推定し、両国長期金利の変動要因の理解を目指す。マクロファイナンス・アプローチでみられるように、インフレ率やGDP成長率といったマクロ経済変数をあらかじめモデルに取り込んで推定を行う実証分析も考えられるが、Kim and Wright (2005) では、長期金利を決定するファクターを事前に特定しない潜在変数のみによるアプローチが、モデルの誤った特定化に陥りにくい点を指摘してい

¹本稿では、3か月金利のような満期までの期間が比較的短い年限の金利についても、瞬間スポットレートとは異なるという意味で、「長期金利」という用語を使用する場合がある。

²米国では、2004年半ばから2006年頃まで、政策金利の引き上げにもかかわらず、長期ゾーンの金利が横ばい、時期によっては低下する場面がみられた。当時のグリーンズパンFRB議長はこの現象をconundrum（謎）と呼んだ。

³Bernanke et al. (2005) はVARベースのモデルで、Rudebusch and Wu (2008) はDSGE (Dynamic Stochastic General Equilibrium) ベースのモデルである。両モデルとも、市場に裁定機会が存在しないことを仮定している。

る。誤ったモデルにより長期金利の推定自体に大きな誤差が生じると、長期金利を構成する期待短期金利成分やタームプレミアム成分の推定にも大きな誤差が生じる可能性が高くなる。そこで本稿では、Kim and Wright (2005) で用いられた潜在変数のみによるアプローチを採用し、長期金利、および、その期待短期金利成分、タームプレミアム成分の推定を行う。なお、本稿では、モデルの潜在変数の数を5変数とする。最近の金利の期間構造モデルにおける一つのトピックとして、イールドカーブの決定において説明力の相対的に劣るファクターが、長期金利のタームプレミアムや期待超過収益率の変動に説明力を有する可能性を検証するものがある (Cochrane and Piazzesi (2008)、Duffee (2010)、Joslin et al. (2010))。そこで通常、イールドカーブを説明するのに必要となる変数の数は3つで十分といわれているが、本稿では、5つのファクターを用いることによって、タームプレミアムの説明力の向上を試みる。

しかし、潜在変数のみによるモデルでは、推定される潜在変数の解釈が難しいという問題に直面する⁴。そこで本稿では、Duffee (2010) で用いられている、主成分分析を援用して潜在変数を主成分に変数変換するアプローチを採用する。当該アプローチによって、期待短期金利成分やタームプレミアム成分の変動が、どのような主成分の変動に因るものなのかを特定することが可能となる。さらに、潜在変数の変数変換により得られた主成分をマクロ経済変数で回帰することで、期待短期金利成分やタームプレミアム成分に対するマクロ経済変数の寄与を捉えることができるようになる。

本稿で提案する、長期金利の期待短期金利成分やタームプレミアム成分をイールドカーブの主成分やマクロ経済変数の寄与に分解する手法を用いた分析の結果、以下の点などが明らかになった。

- 日本の長期金利の期待短期金利成分とタームプレミアム成分の変動は、いずれもイールドカーブの第一主成分の変動の寄与が大きい。一方、米国については、期待短期金利成分の変動はイールドカーブの第一主成分の寄与が大きい一方、タームプレミアム成分の変動に対しては、第二主成分や第四主成分の寄与が大きい。
- 日本の長期金利のタームプレミアム成分は、株価収益率の上昇（低下）に伴い、上昇（低下）する傾向が幾つかの時期でみられる。
- 米国の経済状況の強さを示す変数が改善（悪化）すると、当該変数は米国長期金利のタームプレミアム成分の低下圧力（上昇圧力）として作用する傾向が幾つかの時期でみられる。

但し、上で示した最後の点については、04年半ばから05年半ばにかけての conundrum の時期には、経済状況の強さを示す変数が改善を示したものの、タームプレミアム成

⁴この点については、Kim and Wright (2005) でも指摘されている。

分低下における当該変数の説明力が、非常に弱いことも分かった。

本稿の構成をあらかじめ述べると次のようになる。まず、2節では、無裁定アフィン型ガウシアン期間構造モデルの概要について復習する。3節では、はじめに、長期金利を構成する期待短期金利成分とタームプレミアム成分を主成分要因に分解する方法を説明する。次に、主成分をマクロ経済変数で線形回帰することによって、主成分を介して、期待短期金利成分、タームプレミアム成分に対するマクロ経済変数の寄与を捉える方法を説明する。4節では、3節で説明した手法の推定方法を説明する。5節では推定結果を示し、日米長期金利変動を、主成分の寄与とマクロ経済変数の寄与のそれぞれの観点から解釈する。6節ではまとめを行う。

2 無裁定アフィン型ガウシアン期間構造モデル

本節では、無裁定アフィン型ガウシアン期間構造モデルの概要を述べる⁵。無裁定アフィン型ガウシアン期間構造モデルは、Duffie and Kan (1996) により導入されたもので、無リスクの瞬間スポットレートが、ガウシアン過程に従う複数の状態変数のアフィン型関数により表現されるものである⁶。

まず、無リスクの瞬間スポットレート r_t は、次のような状態変数 X_t のアフィン型関数として定まるとする。

$$r_t = \delta_0 + \delta_1' X_t \quad (1)$$

ここで、 X_t は複数の状態変数をまとめたベクトルである。また、 δ_1' の右肩のカンマは、 δ_1 の転置を表す。以後、 x' は x の転置を表すこととする。また、本稿では単位時間を1か月としている。したがって、式(1)で定義された r_t は厳密な意味での「瞬間」の金利ではなく、期間1か月の金利を表す。

次に、状態変数 X_t の変動をリスク中立測度 Q と現実測度 P の双方で記述する。いずれも以下のようなガウシアン過程に従うとする。

$$X_{t+1} = K^Q X_t + \Sigma_X \varepsilon_{t+1}^Q, \quad \varepsilon_{t+1}^Q \sim i.i.d.N(0, I) \quad (2)$$

$$X_{t+1} = a^P + K^P X_t + \Sigma_X \varepsilon_{t+1}^P, \quad \varepsilon_{t+1}^P \sim i.i.d.N(0, I) \quad (3)$$

ここで $N(\mu, \sigma^2)$ は、期待値 μ 、分散 σ^2 の正規分布を表し、 I は単位行列を表す。

式(2)では状態変数 X_t のリスク中立測度 Q 下での無条件期待値が0と等しくなっているが、これは一般性を失わない仮定である。但し、リスク中立測度 Q 下での状

⁵本節で説明するモデルの日本語でのサーベイは、例えば、紅林 (2007) を参照。

⁶Duffie and Kan (1996) では、状態変数の確率過程は連続形で記述されているが、本稿では、モデルの推定を行うことを踏まえて、離散形で議論を進める。

状態変数 X_t の無条件期待値が 0 でも、現実測度 P 下での期待値は一般的には 0 とはならない。したがって、式 (3) には定数項 a^P が存在するモデル設定となっている。

式 (2) と式 (3) を橋渡しするものは、リスクの市場価格である。リスクの市場価格とは、不確実性を持つ資産価格や状態変数に対して、(リスク中立的な投資家ではなく) リスク回避的な現実の投資家が要求する単位リスク当たりのプレミアムを表す。金利の期間構造モデルにおけるリスクの市場価格のモデル化は、Fisher and Gilles (1996) や Dai and Singleton (2000) により提唱された「コンプリート・アフィン型」と、Duffee (2002) により提唱された「エッセンシャル・アフィン型」の 2 つの型が主に知られているが、本稿ではエッセンシャル・アフィン型を採用する。これは、リスクの市場価格 Λ_t が、 $\Lambda_t = \lambda_0 + \Lambda_1 X_t$ と、状態変数のアフィン型関数の形で時間変動するようにモデル化されるものである。リスクの市場価格 Λ_t は、 $\varepsilon_t^P = \varepsilon_t^Q - \Lambda_t dt$ の関係式を満たすので、エッセンシャル・アフィン型におけるリスクの市場価格の仮定を式 (3) に代入し、式 (2) と比べることで、

$$a^P = \Sigma_X \lambda_0, \quad K^P = K^Q + \Sigma_X \Lambda_1 \quad (4)$$

が成立することが確かめられる。

さらに、式 (1) と式 (2) という、無リスク金利がガウシアン過程に従う状態変数のアフィン型関数として記述されている状況の下では、割引債の対数価格は状態変数のアフィン型関数の形で記述される。すなわち、 t 時点での残存期間 m か月の割引債価格 $p_t^{(m)}$ は以下のような形で記述される。

$$p_t^{(m)} = \exp \left(A_m + B_m' X_t \right) \quad (5)$$

以下では、式 (5) の係数 A_m と B_m が、 m についての漸化式により逐次的に計算できることを導こう。まず、市場に裁定機会が存在しないとの仮定の下、 t 時点での残存期間 m か月の割引債価格と、 $t+1$ 時点での残存期間 $m-1$ か月の割引債価格の間に次の関係が成立する。

$$p_t^{(m)} = E_t^Q [\exp(-r_t) p_{t+1}^{(m-1)}] \quad (6)$$

式 (6) の右辺は以下のように具体的に計算できる。

$$\begin{aligned} E_t^Q [\exp(-r_t) p_{t+1}^{(m-1)}] &= E_t^Q [\exp(-\delta_0 - \delta_1' X_t) \exp \left(A_{m-1} + B_{m-1}' X_{t+1} \right)] \quad (7) \\ &= E_t^Q [\exp(-\delta_0 + A_{m-1} + (-\delta_1' + B_{m-1}' K^Q) X_t + B_{m-1}' \Sigma_X \varepsilon_{t+1}^Q)] \\ &= \exp \left(-\delta_0 + A_{m-1} + \frac{1}{2} B_{m-1}' \Sigma_X \Sigma_X' B_{m-1} + (B_{m-1}' K^Q - \delta_1') X_t \right) \end{aligned}$$

式 (5) と式 (7) の係数を比べると、 A_m と B_m に関して次式が成立する。

$$B_m = -\delta_1 + (K^Q)' B_{m-1}, \quad B_0 = 0 \quad (8)$$

$$A_m = A_{m-1} - \delta_0 + \frac{1}{2} B_m' \Sigma_X \Sigma_X' B_m, \quad A_0 = 0 \quad (9)$$

なお、残存期間 m か月のゼロ・クーポン・レート $y_t^{(m)}$ は、式 (5) から、

$$y_t^{(m)} = -\frac{1}{m} \log p_t^{(m)} = -\frac{1}{m} A_m - \frac{1}{m} B_m' X_t \quad (10)$$

となるので、式 (8) や式 (9) を用いて具体的に計算することができる。

3 期待短期金利成分とタームプレミアム成分のファクター分解

前節では、無裁定アフィン型ガウシアン期間構造モデルの概要を解説した。当該モデルは状態変数 X_t により記述されるが、推定される状態変数の意味付けが判然としない場合がある（本稿のモデルでは、 X_t は観測不能なので、以降、 X_t を潜在変数と呼ぶ）。そこで本節では、潜在変数を主成分に変数変換することによって、潜在変数によるゼロ・クーポン・レートのアフィン型関数表現を、イールドカーブの主成分を用いた表現に変換する。これによって、長期金利を構成する期待短期金利成分とタームプレミアム成分の変動に対する各主成分の寄与度を計算することが可能となる。さらに本節では、主成分をマクロ経済変数で回帰することによって、主成分を介して、マクロ経済変数と期待短期金利成分やタームプレミアム成分を関連付ける。この方法により、期待短期金利成分やタームプレミアム成分に対するマクロ経済変数の寄与度を計算することが可能となる。

3.1 アフィン型モデルの主成分ファクター表現

複数の残存期間に対応するゼロ・クーポン・レートの理論値を並べたベクトル（但し、残存 j_i か月のゼロ・クーポン・レート $y_t^{(j_i)}$ の無条件期待値 $\overline{y^{(j_i)}}$ との差として表しておく）に、ゼロ・クーポン・レートの理論値の分散共分散行列の正規直交固有ベクトルを並べた直交行列 P （すなわち、主成分の結合係数からなるローディング行列）を乗じると、各主成分得点からなる縦ベクトル PC_t が得られる。すなわち、

$$PC_t = \begin{bmatrix} PC_{t,1} \\ PC_{t,2} \\ PC_{t,3} \\ \vdots \\ PC_{t,N} \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} y_t^{(j_1)} - \overline{y^{(j_1)}} \\ y_t^{(j_2)} - \overline{y^{(j_2)}} \\ \vdots \\ y_t^{(j_m)} - \overline{y^{(j_m)}} \end{bmatrix} \quad (11)$$

が成り立つ。ここでは、 N 個の主成分得点を考えており、 $PC_{t,k}$ は t 時点での第 k 主成分得点を表している。式 (11) に式 (10) を代入すると、

$$PC_t = \begin{bmatrix} PC_{t,1} \\ PC_{t,2} \\ PC_{t,3} \\ \vdots \\ PC_{t,N} \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} y_t^{(j_1)} - \overline{y^{(j_1)}} \\ y_t^{(j_2)} - \overline{y^{(j_2)}} \\ \vdots \\ y_t^{(j_m)} - \overline{y^{(j_m)}} \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} -\frac{1}{j_1} B'_{j_1} \\ -\frac{1}{j_2} B'_{j_2} \\ \vdots \\ -\frac{1}{j_m} B'_{j_m} \end{bmatrix} (X_t - \bar{X}) \quad (12)$$

が得られる（ここで、 \bar{X} は潜在変数 X_t の無条件期待値を表す）。ここで、

$$P \begin{bmatrix} -\frac{1}{j_1} B'_{j_1} \\ -\frac{1}{j_2} B'_{j_2} \\ \vdots \\ -\frac{1}{j_m} B'_{j_m} \end{bmatrix} \equiv \tilde{P}, \quad \tilde{P}(X_t - \bar{X}) \equiv Z_t \quad (13)$$

と置くと、式 (12) と式 (13) から、 Z_t はイーロドカーブの主成分得点であることが分かる。したがって、式 (13) を用いて潜在変数 X_t を Z_t に変数変換することによって、主成分得点を得られる（以下では、 Z_t を主成分ファクターと呼ぶ）。

ここで、期待短期金利成分とタームプレミアム成分を主成分ファクターで表現するために必要となる公式をあらかじめ用意しておく。そのために、式 (3) で設定した潜在変数 X_t の確率過程を、式 (13) を用いて Z_t に関する確率過程に書き直す。すると、

$$Z_{t+1} = \tilde{P} K^P \tilde{P}^{-1} Z_t + \tilde{P} \Sigma_X \varepsilon_{t+1}^P \quad (14)$$

が得られる。この式 (14) を用いると、次の 3.2 節で、期待短期金利成分とタームプレミアム成分の主成分表現の導出に頻繁に用いられる公式、

$$E_t^P[Z_{t+s}] = \tilde{P} (K^P)^s \tilde{P}^{-1} Z_t \quad (15)$$

が示される。

3.2 期待短期金利成分とタームプレミアム成分の主成分分解

長期債に投資する場合の期待収益は、短期債の再投資を繰り返す場合の期待収益に、短期金利の不確実性に伴うプレミアム（タームプレミアム）が上乗せされたものであるとの考え方が支持されることが多い。この考え方に則れば、長期金利は期待短期金利成分とプレミアム成分から構成されると解釈される。本節では、長期金利を構成するこれらの成分の変動要因を捉えるため、主成分ファクターにより両要素を表現する。

まず、短期金利の期待値の期間 m か月の平均値 $Exshort_t^{(m)}$ を、3.1 節で導入した主成分ファクター Z_t により表してみよう。これは、式 (15) を用いて以下のように計算される。

$$\begin{aligned}
Exshort_t^{(m)} &= \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} E_t^{\mathbf{P}}[r_{t+i}] = \delta_0 + \frac{\delta_1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} E_t^{\mathbf{P}}[X_{t+i}] \\
&= \delta_0 + \delta_1 \bar{X} + \frac{\delta_1}{m} \tilde{P}^{-1} \sum_{i=0}^{m-1} E_t^{\mathbf{P}}[Z_{t+i}] \\
&= \bar{r} + \frac{\delta_1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} (K^{\mathbf{P}})^i \tilde{P}^{-1} Z_t
\end{aligned} \tag{16}$$

ここで、1 行目 2 番目の等式は式 (1)、2 行目の等式は式 (13)、3 行目の等式は式 (15) を用いた。また、 $\bar{r} = \delta_0 + \delta_1 \bar{X}$ であり、短期金利 r_t の無条件期待値を表す。

式 (16) を用いると、期待短期金利成分に対する各主成分ファクターの寄与度と分散分解が計算できる。まず、式 (16) の期待短期金利成分における第 j 主成分に関する項は、

$$\left(\frac{\delta_1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} (K^{\mathbf{P}})^i \tilde{P}^{-1} \right)_j Z_{t,j} \equiv \Psi_j^{(m)} Z_{t,j} \tag{17}$$

となる。上式各項の右下添え字 j は、それぞれのベクトルの第 j 成分を表す。式 (17) を、以下では簡単のために、期待短期金利成分に対する第 j 主成分の寄与度と呼ぶ。また、期待短期金利成分の主成分ファクターによる分散分解については次式が成立する。

$$Var \left(\frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} E_t^{\mathbf{P}}[r_{t+i}] \right) = Var \left(\sum_{j=0}^N \Psi_j^{(m)} Z_{t,j} \right) = \sum_{j=0}^N (\Psi_j^{(m)})^2 Var(Z_{t,j}) \tag{18}$$

ここで、 $Var(Z_{t,j})$ は、第 j 主成分ファクター $Z_{t,j}$ の時系列から計算される分散を表す。 N は考慮している主成分ファクターの数である。また、式 (18) の 2 番目の等号では、異なる主成分ファクターの間の相関係数は 0 であるとの事実を用いた。式 (18) から、期待短期金利成分の変動に対する第 j 主成分の変動の寄与は、

$$\frac{(\Psi_j^{(m)})^2 Var(Z_{t,j})}{\sum_{l=1}^N (\Psi_l^{(m)})^2 Var(Z_{t,l})} \tag{19}$$

となる。

次に、タームプレミアム成分について、主成分ファクターによる表現を導出しよう。まず、タームプレミアムには幾つか異なる定義が知られているが、本稿では、以下で定義するイールドプレミアムと呼ばれるものを扱う⁷。 t 時点での m か月のイールドプ

⁷タームプレミアムとして、本稿で扱うイールドプレミアム以外には、将来の $t+s$ 時点スタートのフォワードレート ($f_{t,t+s}$) と、 $t+s$ 時点での \mathbf{P} 測度下での短期金利の期待値 ($E_t^{\mathbf{P}}[r_{t+s}]$) との差として定義されるフォワードプレミアムが知られている (Kim and Orphanides (2007) 参照)。

レミアム $yp_t^{(m)}$ は、次のように、観測される期間 m か月の長期金利と将来の期待短期金利の期間平均値（期待短期金利成分 $Exshort_t^{(m)}$ ）の差として定義される。すなわち、

$$yp_t^{(m)} = y_t^{(m)} - \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} E_t^{\mathbf{P}} [r_{t+i}] + \eta_t^{(m)} \quad (20)$$

と定義される。ここで、 $y_t^{(m)}$ は理論イールド、 $\eta_t^{(m)}$ は観測誤差である。このように定義されるイールドプレミアム（以下、タームプレミアム）成分を主成分ファクター Z_t で表現するため、理論イールドに対する関係式を以下で用意しておく。すなわち、式 (13) と式 (16) を用いると、

$$\begin{aligned} y_t^{(m)} &= -\frac{1}{m} A_m - \frac{1}{m} B_m' X_t = -\frac{1}{m} A_m - \frac{1}{m} B_m' (\tilde{P}^{-1} Z_t + \bar{X}) \\ &= \left(-\frac{1}{m} A_m - \frac{1}{m} B_m' \bar{X}\right) - \frac{1}{m} B_m' \tilde{P}^{-1} Z_t \\ &= \bar{y}^{(m)} - \frac{1}{m} B_m' \tilde{P}^{-1} Z_t \end{aligned} \quad (21)$$

という、理論イールドに関する関係式が成り立つ。ここで、 $\bar{y}^{(m)}$ は $y_t^{(m)}$ の無条件期待値を表す。上の式 (21) と、式 (8)、式 (10)、式 (20)、を用いると、下式のようなタームプレミアム $yp_t^{(m)}$ の主成分ファクター表現が得られる。

$$yp_t^{(m)} = \bar{y}^{(m)} - \bar{r} - \frac{\delta_1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} ((K^{\mathbf{P}})^i - (K^{\mathbf{Q}})^i) \tilde{P}^{-1} Z_t + \eta_t^{(m)} \quad (22)$$

したがって、タームプレミアム成分に対する第 j 主成分の寄与度は、式 (22) から、

$$\left(-\frac{\delta_1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} ((K^{\mathbf{P}})^i - (K^{\mathbf{Q}})^i) \tilde{P}^{-1}\right)_j Z_{t,j} \equiv \Phi_j^{(m)} Z_{t,j} \quad (23)$$

と定義できる。また、タームプレミアム成分の主成分ファクターによる分散分解は、式 (18) と同様の計算によって、

$$Var\left(yp_t^{(m)}\right) = Var\left(\sum_{j=0}^N \Phi_j^{(m)} Z_{t,j} + \eta_t^{(m)}\right) \quad (24)$$

となるので、タームプレミアムの変動に対する第 j 主成分の変動の寄与は、

$$\frac{(\Phi_j^{(m)})^2 Var(Z_{t,j})}{Var\left(\sum_{l=0}^N \Phi_l^{(m)} Z_{t,l} + \eta_t^{(m)}\right)} \quad (25)$$

と計算される。

3.3 期待短期金利成分とタームプレミアム成分のマクロ経済変数分解

3.2節では、長期金利を構成する期待短期金利成分とタームプレミアム成分を主成分ファクターによって表現し、期待成分やプレミアム成分の変動に対する各主成分の寄与を表す式を導出した。これにより、主成分ファクターの変動の観点から、期待短期金利成分やタームプレミアム成分の変動を理解することが可能となった。さらに本節では、仔細に長期金利の変動を理解するため、主成分ファクターの変動をマクロ経済変数の変動で説明する。先行研究でも、イールドカーブの主成分の変動をマクロ経済変数の変動で説明するものが幾つかみられている。例えば、Diebold et al. (2006) は、イールドカーブの第一主成分である水準ファクターはインフレ率との相関が高く、第二主成分である傾きファクターは、設備稼働率といった景気循環を表す変数と相関が高いことを示した。また、Dewachter and Lyrio (2006) は、水準ファクターが長期のインフレ期待から影響を受ける一方、傾きファクターが短期の景気循環から影響を受けることを示した。藤井、高岡 (2008) は、Diebold et al. (2006) の手法を日本の長期金利データに応用して主成分を推定し、各主成分とマクロ経済変数の関連について分析した。彼らは、日本のイールドカーブの水準ファクターはインフレ率や公定歩合と正の相関があり、傾きファクターは株価収益率や米国金利の長短金利差との相関が高いこと等を示した。本稿でもこれらの先行研究を踏まえ、各主成分ファクターを被説明変数とし、マクロ経済変数を説明変数とする線形回帰モデルを推定することによって、主成分ファクターの変動をマクロ経済変数の変動で捉えることにする。さらに、長期金利の期待短期金利成分とタームプレミアム成分が、主成分ファクターの関数として表現されていたことに鑑みると、主成分ファクターをマクロ経済変数で回帰することで、長期金利を構成する両成分の変動を、主成分ファクターを介して、マクロ経済変数の変動で捉えることも可能となる。

本稿では、第 j 主成分ファクター $Z_{t,j}$ を被説明変数、 M 個のマクロ経済変数 ($macro_{t,i}$ ($i = 1, \dots, M$) とする) を説明変数とする線形回帰モデルを扱う。回帰係数の時間変化を捉えるため、ここでは、推定に用いる期間を 1 か月ずつずらしながら回帰分析を繰り返す⁸。具体的には、時点 t_n の後方 m か月の期間 (すなわち、時点 t_{n-m} から時点 t_n までの期間) について以下の回帰式を推定する。

$$Z_{t,j} = \beta_0^j + \sum_{i=1}^M \beta_i^j macro_{t,i} + u_t^j, \quad (26)$$

$$u_t^j = \rho^j u_{t-1}^j + \epsilon_t^j, \quad \epsilon_t^j \sim i.i.d.N(0, \sigma_j^2), \quad t \in [t_{n-m}, t_n].$$

⁸ここでは、回帰係数を状態変数とする可変係数モデルによるモデル化も考えられる。しかし、可変係数モデルを用いた分析を別途行ったところ、オーバーフィッティングに陥っている可能性が高かったことから、本稿ではローリング回帰分析を採用した。なお、可変係数モデルの推定結果がオーバーフィッティングに陥り易い点は大屋 (1992) で指摘されている。

式 (26) では、回帰式の残差 u_t が自己相関を有する可能性を考慮して、 u_t が AR(1) 過程に従うモデルとした。

式 (26) の係数の推定値を、

$$\begin{aligned}\beta_i^j &\equiv \beta_{t_n,i}^j \quad i = 0, 1, \dots, M \\ \rho^j &\equiv \rho_{t_n}^j\end{aligned}$$

と置く。すると、 $Z_{t_n,j}$ の推定値 $\widehat{Z}_{t_n,j}$ は、

$$\widehat{Z}_{t_n,j} = \beta_{t_n,0}^j + \sum_{i=1}^M \beta_{t_n,i}^j macro_{t,i} \quad (27)$$

となる。式 (27) から、時点 t における第 j 主成分ファクター $Z_{t,j}$ に対する説明変数 $macro_{t,i}$ の寄与度を、

$$\beta_{t,i}^j macro_{t,i} \quad (28)$$

と定義する。

ここで、期待短期金利成分とタームプレミアム成分が各主成分ファクターのアフィン型関数として記述されていたこと（式 (17)、式 (23) 参照）に鑑みると、主成分ファクターをマクロ経済変数によって説明する式 (26) を用いて、期待短期金利成分とタームプレミアム成分のそれぞれに対する、マクロ経済変数の寄与を表す式を導出できる。

まず、 t 時点での期間 m か月の期待短期金利成分 $Exshort_t^{(m)}$ については、式 (16)、式 (17)、式 (26) から、

$$\begin{aligned}Exshort_t^{(m)} &= \bar{r} + \sum_{j=1}^N \Psi_j^{(m)} Z_{t,j} = \bar{r} + \sum_{j=1}^N \Psi_j^{(m)} (\beta_{t,0}^j + \sum_{i=1}^M \beta_{t,i}^j macro_{t,i} + u_t^j) \\ &= \bar{r} + \sum_{j=1}^N \Psi_j^{(m)} \beta_{t,0}^j + \sum_{i=1}^M \left(\sum_{j=1}^N \Psi_j^{(m)} \beta_{t,i}^j \right) macro_{t,i} + \sum_{j=1}^N \Psi_j^{(m)} u_t^j \quad (29)\end{aligned}$$

が成立する。したがって、式 (29) から期待短期金利成分に対するマクロ経済変数 $macro_{t,i}$ の寄与度を、

$$\left(\sum_{j=1}^N \Psi_j^{(m)} \beta_{t,i}^j \right) macro_{t,i} \equiv \tilde{\beta}_{t,i}^{(m)} macro_{t,i} \quad (30)$$

と定義できる。ここで、式 (30) の $\tilde{\beta}_{t,i}^{(m)}$ を、期待短期金利成分のマクロ経済変数 $macro_{t,i}$ に対する感応度と呼ぶことにする。また、マクロ経済変数以外の「其他要因」については、式 (29) から、

$$\sum_{j=1}^N \Psi_j^{(m)} (\beta_{t,0}^j + u_t^j) = \sum_{j=1}^N \Psi_j^{(m)} (\beta_{t,0}^j + Z_{t,j} - \widehat{Z}_{t,j})$$

と定義する。

一方、 t 時点での期間 m か月のタームプレミアム成分 $yp_t^{(m)}$ についても、式 (22)、式 (23)、式 (26) を用いて式 (29) と同様の式が導出可能である。すなわち、

$$\begin{aligned} yp_t^{(m)} &= \bar{y}^{(m)} - \bar{r} + \sum_{j=1}^N \Phi_j^{(m)} Z_{t,j} + \eta_t^{(m)} \\ &= \bar{y}^{(m)} - \bar{r} + \sum_{j=1}^N \Phi_j^{(m)} \beta_{t,0}^j + \sum_{i=1}^M \left(\sum_{j=1}^N \Phi_j^{(m)} \beta_{t,i}^j \right) macro_{t,i} + \sum_{j=1}^N \Phi_j^{(m)} u_t^j + \eta_t^{(m)} \end{aligned} \quad (31)$$

が成立する。ここで $\eta_t^{(m)}$ はイールド $y_t^{(m)}$ の観測誤差を表す。式 (31) から、タームプレミアム成分に対するマクロ経済変数 $macro_{t,i}$ の寄与度を、

$$\left(\sum_{j=1}^N \Phi_j^{(m)} \beta_{t,i}^j \right) macro_{t,i} \equiv \check{\beta}_{t,i}^{(m)} macro_{t,i} \quad (32)$$

と定義できる。ここで、式 (32) の $\check{\beta}_{t,i}^{(m)}$ を、タームプレミアム成分のマクロ経済変数 $macro_{t,i}$ に対する感応度と呼ぶことにする。また、タームプレミアム成分に対するマクロ経済変数以外の「その他要因」については、

$$\sum_{j=1}^N \Phi_j^{(m)} (\beta_{t,0}^j + u_t^j) = \sum_{j=1}^N \Phi_j^{(m)} (\beta_{t,0}^j + Z_{t,j} - \widehat{Z}_{t,j})$$

と定義する。

4 モデルの推定

本節では、無裁定アフィン型ガウシアン期間構造モデルの潜在変数とモデルパラメータの推定方法を示す。また、3.3 節では、期待短期金利成分とタームプレミアム成分のマクロ経済変数分解を示したが、本節では、マクロ経済変数分解に必要となる主成分ファクターをマクロ経済変数によって回帰推定する方法を説明する。

4.1 無裁定アフィン型ガウシアン期間構造モデルの推定

無裁定アフィン型ガウシアン期間構造モデルは、状態変数モデルの一種である。このモデルにおける潜在変数とモデル・パラメータは、カルマン・フィルターと最尤法により推定することができる。ここでは、その手法について説明する。

4.1.1 カルマン・フィルター

無裁定アフィン型ガウシアン期間構造モデルは、潜在変数の変動を表す遷移方程式と潜在変数と観測値を関係づける観測方程式から構成される状態変数モデルである。遷移方程式は式(3)として記述され、潜在変数のファクター数は、1節でも述べたように、イールドカーブの説明力が相対的に低いファクターが、タームプレミアム成分の決定に影響を与える可能性を考慮して5変数とする。観測方程式は式(10)であり、6か月、2年、5年、10年、20年のゼロ・クーポン・レートを観測値として用いる。但し、いずれの年限のゼロ・クーポン・レートとも観測誤差を伴うと仮定する。観測方程式を具体的に記述すると下式となる。

$$y_t = \begin{bmatrix} y_t^{(6)} \\ y_t^{(24)} \\ y_t^{(60)} \\ y_t^{(120)} \\ y_t^{(240)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{1}{6}A_6 \\ \frac{1}{24}A_{24} \\ \frac{1}{60}A_{60} \\ \frac{1}{120}A_{120} \\ \frac{1}{240}A_{240} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{6}B'_6 \\ \frac{1}{24}B'_{24} \\ \frac{1}{60}B'_{60} \\ \frac{1}{120}B'_{120} \\ \frac{1}{240}B'_{240} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{t,1} \\ X_{t,2} \\ \vdots \\ X_{t,5} \end{bmatrix} + \eta_t \quad (33)$$

$$\equiv A + B'X_t + \eta_t$$

ここで、観測誤差を表す項 $\eta_t = (\eta_{t,1}, \eta_{t,2}, \dots, \eta_{t,5})'$ は $i.i.d.N(0, hI_5)$ に従うとする (I_5 は 5×5 の単位行列を表す)。

次に、カルマン・フィルターのアルゴリズムを示す。時刻 t までに得られる情報集合を \mathcal{I}_t とし、 \mathcal{I}_t を条件とする潜在変数の条件付期待値と条件付分散を考える。記号の簡略化のため、 $E[X_t|\mathcal{I}_{t-1}] \equiv X_{t|t-1}$ 、 $Var[X_t|\mathcal{I}_{t-1}] \equiv P_{t|t-1}$ 、 $E[X_t|\mathcal{I}_t] \equiv X_{t|t}$ 、 $Var[X_t|\mathcal{I}_t] \equiv P_{t|t}$ とあらかじめ記号を定義しておく ($X_{t|t}$ はフィルター、 $X_{t|t-1}$ は予測値と呼ばれる)。カルマン・フィルターを用いると、時刻 t について、逐次的に $X_{t|t-1}$ 、 $P_{t|t-1}$ 、 $X_{t|t}$ 、 $P_{t|t}$ を推定することが可能となる。カルマン・フィルターは、以下で示すように、潜在変数の条件付期待値と条件付分散共分散行列の初期化、予測、更新の3つのプロセスからなる。

まず、初期化とは $X_{0|0}$ と $P_{0|0}$ を与えるものである。

$$X_{0|0} := \bar{X} = (I - K^P)^{-1}a^P, \quad P_{0|0} := Var(X_t)$$

と、無条件期待値と無条件分散を置く場合が一般的である⁹。

⁹ X_t の無条件分散共分散行列 $Var(X_t)$ の具体的な計算方法については、例えば、Hamilton (1994) の第13章を参照のこと。

次に、時刻 $t-1$ から時刻 t への予測を示す。 $X_{t-1|t-1}$ と $P_{t-1|t-1}$ が与えられた下、

$$\begin{aligned} X_{t|t-1} &= a^{\mathbf{P}} + K^{\mathbf{P}} X_{t-1|t-1} \\ P_{t|t-1} &= K^{\mathbf{P}} P_{t-1|t-1} K^{\mathbf{P}'} + \Sigma_X \Sigma_X' \\ \hat{y}_{t|t-1} &:= A + B' X_{t-1|t-1} \\ F_t &:= B' P_{t|t-1} B + H \end{aligned}$$

と、 $X_{t-1|t-1}$ 、 $P_{t-1|t-1}$ から、 $X_{t|t-1}$ 、 $P_{t|t-1}$ を計算することができる。また、 $\hat{y}_{t|t-1}$ は、 \mathcal{I}_{t-1} が与えられた下での y_t の条件付期待値、 F_t は条件付分散となっている。

さらに、時刻 t での更新は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} K_t &= \Sigma_{t|t-1} B F_t^{-1} \\ X_{t|t} &= X_{t|t-1} + K_t (y_t - \hat{y}_{t|t-1}) \\ P_{t|t} &= P_{t|t-1} - B' P_{t|t-1} \end{aligned}$$

$t=0$ からデータ観測期間の最終時点 T まで、上述の予測と更新を繰り返す。このようにして得られた $X_{t|t}$ は、時刻 t までの情報 \mathcal{I}_t が与えられた下での X_t の最小分散推定量となっている。

4.1.2 最尤法

カルマン・フィルターの議論を用いると、時刻 $t-1$ までの情報 \mathcal{I}_{t-1} に基づく t 時点でのゼロ・クーポン・レート y_t の条件付分布が、平均 $\hat{y}_{t|t-1}$ 、分散 F_t の正規分布に従うことが証明される。したがって、 \mathcal{I}_{t-1} での y_t の条件付密度関数 $f_{t|t-1}(y_t)$ は、

$$f_{t|t-1}(y_t) = \left((2\pi)^{5/2} \sqrt{|F_t|} \right)^{-1} \exp \left(-\frac{1}{2} (y_t - \hat{y}_{t|t-1})' F_t^{-1} (y_t - \hat{y}_{t|t-1}) \right)$$

となる。さらに、パラメータ Θ が与えられた下では、対数尤度 $\log L(\Theta)$ は、

$$\begin{aligned} \log L(\Theta) &= \sum_{t=1}^T \log f_{t|t-1}(y_t) \\ &= -\frac{5T}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left(\log |F_t| + (y_t - \hat{y}_{t|t-1})' F_t^{-1} (y_t - \hat{y}_{t|t-1}) \right) \end{aligned}$$

となる。最後に、モデルパラメータの推定値を求めるためには、対数尤度関数 $\log L(\Theta)$ を最大化するような Θ を探すことになる。すなわち、

$$\Theta^* = \arg \max_{\Theta} \log(L(\Theta))$$

が、最適なモデルパラメータとなる。

4.1.3 モデルパラメータの設定

ここでは、本稿におけるモデルパラメータの設定について説明する。まず、全てのモデルパラメータを自由パラメータとして扱くと、パラメータの過少識別を引き起こす点に注意する必要がある。Dai and Singleton (2000) では、同一の債券価格を導く状態変数とモデルパラメータの組の間の変数変換（不変変換と呼ばれる）を用いて、過剰識別にも過少識別にも陥らないパラメータ設定を示した。そこで本稿のモデルでも、以下で示すような不変変換に基づくパラメータ設定とする。

まず、式 (3) の攪乱項のボラティリティ行列 Σ_X については、不変変換により、 5×5 の単位行列 I_5 を用いて、

$$\Sigma_X = 0.001I_5$$

とする。

また、式 (3) の K^P については、不変変換により下三角行列とする。すなわち、

$$K^P = \begin{bmatrix} K_{1,1}^P & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{2,1}^P & K_{2,2}^P & 0 & 0 & 0 \\ K_{3,1}^P & K_{3,2}^P & K_{3,3}^P & 0 & 0 \\ K_{4,1}^P & K_{4,2}^P & K_{4,3}^P & K_{4,4}^P & 0 \\ K_{5,1}^P & K_{5,2}^P & K_{5,3}^P & K_{5,4}^P & K_{5,5}^P \end{bmatrix}$$

とする。さらに、潜在変数の確率過程が弱定常過程に従うことを保証するため、 K^P の固有値がすべて単位円内に存在するような制約を加える。今、 K^P は下三角行列なので、当該行列の固有値は行列の対角成分と等しくなる。したがって、 K^P の全ての固有値が単位円内に存在する十分条件は、 $K_{i,i}^P$ に対してある実数 κ_i が存在して、

$$K_{i,i}^P = \frac{\kappa_i^2}{1 + \kappa_i^2}$$

が成立することとなる。そこで、 $K_{i,i}^P$ を上式のように κ_i の式で表しておく。

不変変換により、推定すべきパラメータの数は全てのモデルパラメータを自由パラメータとして扱う場合と比べて減少するが、それでも本稿のような潜在変数の数が5つの場合には、推定すべきパラメータ数が多くなる。そこで、本稿の分析では、推定パラメータ数を減らすため、リスクの市場価格に関するパラメータについて、式 (4) の Λ_1 が対角行列との制約を置くことにする。すなわち、

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} \Lambda_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_{1,2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_{1,3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda_{1,4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Lambda_{1,5} \end{bmatrix}$$

と仮定する。

以上、本稿で推定すべきモデルパラメータを列挙すると、

$$\begin{aligned} & \delta_0, \delta_{1,1}, \delta_{1,2}, \delta_{1,3}, \delta_{1,4}, \delta_{1,5}, \kappa_1, K_{2,1}^P, \kappa_2, K_{3,1}^P, K_{3,2}^P, \kappa_3, \\ & K_{4,1}^P, K_{4,2}^P, K_{4,3}^P, \kappa_4, K_{5,1}^P, K_{5,2}^P, K_{5,3}^P, K_{5,4}^P, \kappa_5 \\ & \Lambda_{1,1}, \Lambda_{1,2}, \Lambda_{1,3}, \Lambda_{1,4}, \Lambda_{1,5}, \lambda_{0,1}, \lambda_{0,2}, \lambda_{0,3}, \lambda_{0,4}, \lambda_{0,5}, h \end{aligned}$$

となり、計 32 個のパラメータを推定することになる。

4.1.4 使用データ

無裁定アフィン型ガウシアン期間構造モデルの潜在変数とモデルパラメータの推定は、日米のイールドカーブについて、1995年1月から2010年4月までの月末データを用いる。金利データは、ゼロ・クーポン・レートを使用する。使用するゼロ・クーポン・レートの年限は、日米とも、0.5年、2年、5年、10年、20年とする。日本のゼロ・クーポン・レートはマカロフの方法 (McCulloch (1975)) により推定したものをを用いる。一方、米国については、Gurkaynak et al. (2006) により計算されたゼロ・クーポン・レートを使用する。

4.2 マクロ経済変数による主成分ファクターの線形回帰推定

3.3節ではイールドカーブの主成分ファクターを被説明変数とし、マクロ経済変数を説明変数とする線形回帰を用いて、期待短期金利成分とタームプレミアム成分に対するマクロ経済変数の寄与度を計算する方法を示した。ここでは、3.3節で示した線形回帰の推定方法を示す。線形回帰における説明変数が日米で異なることから、以下では、推定方法を日米で別々に説明する。

4.2.1 日本のイールドカーブの主成分ファクターの線形回帰推定

日本のイールドカーブの主成分ファクターを線形回帰する際の説明変数は、国庫短期証券3か月物利回り (09年1月以前は、政府短期証券3か月物利回り。以下では、簡単のため、短期国債利回りと呼ぶ)、CPIの前年同月比変化率、株価収益率 (日経平均

(月末値)の前年同月比変化率)の3系列とする¹⁰。回帰式を示すと、

$$\begin{aligned} Z_{t,j} &= \beta_0^j + \beta_1^j TB_t + \beta_2^j \Delta CPI_{t-1} + \beta_3^j \Delta S_t + u_t^j \\ u_t^j &= \rho^j u_{t-1}^j + \epsilon_t^j, \epsilon_t^j \sim i.i.d.N(0, \sigma_j^2), j = 1, 2, \dots, 5 \end{aligned} \quad (34)$$

となる。ここで、 $Z_{t,j}$ は日本のイールドカーブの第 j 主成分ファクター、 TB_t は t 時点での短期国債利回り、 ΔCPI_{t-1} は $t-1$ 時点でのCPIの前年同月比変化率、 ΔS_t は、 $t-12$ から t の期間の日経平均株価月末値の変化率としている。なお、 t 時点における主成分ファクターを説明するのに、 $t-1$ 時点でのCPI変化率を説明変数としている理由は、CPIが1か月のラグを伴って公表されることを考慮したものである。

説明変数の選択においては、イールドカーブの主成分ファクターに対するマクロ経済変数のより本源的なショックを捉えるために、マクロ経済変数の主成分得点を説明変数とすることも考えられる。実際、4.2.2節で後述する米国における線形回帰推定においては、FF金利、CPI変化率、鉱工業生産指数変化率の主成分得点を説明変数としている。しかし、日本の場合には、上述の3変数間の相関が米国ほど高くなかったことから、上述の3変数をそのまま説明変数として採用することとした¹¹。

既に3.3節でも触れたが、式(34)では、推定誤差 u_t がAR(1)過程に従うと仮定している。このような、誤差項がAR過程に従う場合の推定方法として、本稿では、コクラン=オーカット法を用いることにする¹²。本稿では、回帰係数の時間変化を捉えるため、回帰推定における観測期間を48か月とし、1998年12月から1か月ずつずらしながら2010年4月までローリング回帰を行う。例えば、1998年12月(1998年12月を1995年1月から47か月後という意味で t_{47} と置く)については、後方48か月間(1995年1月~1998年12月)について、式(34)に則り回帰係数を推定する。得られた回帰係数 $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ について、改めて $\beta_{t_{47}} = (\beta_{t_{47},0}, \beta_{t_{47},1}, \beta_{t_{47},2}, \beta_{t_{47},3})$ と置く。そして、1999年1月(すなわち、 t_{48})以降についても、同様の推定を繰り返していく。これにより、回帰係数の時系列 β_t を求めることができ、結果として、式(30)や式(32)を用いて、期待短期金利成分やタームプレミアム成分に対するマクロ経済変数の寄与度を計算することが可能となる。

¹⁰日本の鉱工業生産指数の前年同月比変化率を説明変数に加えてモデルの推定を行ったところ、当該指標の回帰係数が有意となる時期が限られていた。また、鉱工業生産指数変化率は、時期によっては(例えば、リーマンショック以降)、株価収益率との相関係数が70%近い高い相関を示した。以上を踏まえて、説明変数から鉱工業生産指数変化率を外すこととした。

¹¹1995年1月から2010年4月までの期間における、短期国債利回りとCPI変化率の相関係数は36.1%、短期国債利回りと株価収益率の相関係数は-16.3%、CPI変化率と株価収益率の相関係数は-20.1%だった。

¹²コクラン=オーカット法については、Hamilton(1994)等を参照のこと。

4.2.2 米国のイールドカーブの主成分ファクターの線形回帰推定

米国のイールドカーブの主成分ファクターを線形回帰する際の説明変数を、FF 金利、CPI の前年同月比変化率、鉱工業生産指数の前年同月比変化率の主成分得点とする。FF 金利、CPI、鉱工業生産指数はお互い相関が高いと一般的にいわれており、多重共線性の問題をあらかじめ回避するために、ここでは、3つのマクロ経済変数の主成分得点を説明変数とすることとした¹³。3つのマクロ経済変数の主成分分析におけるローディングと主成分得点は図1のようになった。第一主成分（以下、マクロ第一主成分と呼ぶ場合がある）は、FF 金利、CPI 変化率、鉱工業生産指数変化率の全てが同一方向に変動することを表すファクターである。第二主成分（以下、マクロ第二主成分と呼ぶ場合がある）は、CPI 変化率の大きな変動と同時に、FF 金利と CPI 変化率が逆方向に変動することを表すファクターである。第三主成分（マクロ第三主成分）は、鉱工業生産指数変化率の大きな変動と同時に、FF 金利と鉱工業生産指数が逆方向に変動することを表すファクターである。それぞれの主成分の説明力を計算すると、マクロ第一主成分は 67.3 %、マクロ第二主成分は 22.3 %、マクロ第三主成分は 10.4 % となった。

これらのマクロ経済変数の主成分得点を説明変数として、イールドカーブの主成分を線形回帰する。回帰式を示すと、

$$\begin{aligned} Z_{t,j} &= \beta_0^j + \beta_1^j PCmacro_{t,1} + \beta_2^j PCmacro_{t,2} + \beta_3^j PCmacro_{t,3} + u_t^j \\ u_t^j &= \rho^j u_{t-1}^j + \epsilon_t^j, \epsilon_t^j \sim i.i.d.N(0, \sigma_j^2), j = 1, 2, \dots, 5 \end{aligned} \quad (35)$$

となる。ここで、 $PCmacro_{t,i}$ はマクロ第 i 主成分得点を表す。式 (35) の推定は、日本の場合と同様にコ克蘭 = オーカット法により行う。また、日本の場合と同様に、回帰推定の観測期間を 48 か月とし、1998 年 12 月から 1 か月ずつずらしながら 2010 年 4 月までローリング回帰を行う¹⁴。これにより、回帰係数の時系列 β_t を求めることができ、期待短期金利成分やタームプレミアム成分に対するマクロ経済変数の寄与度を計算することが可能となる。

5 分析結果

本節ではまず、無裁定アフィン型ガウシアン期間構造モデルの推定結果と、マクロ経済変数によるイールドカーブの主成分ファクターに対する線形回帰の推定結果を示す。

¹³1995 年 1 月から 2010 年 4 月までの期間について FF 金利、CPI、鉱工業生産指数の前年同月比変化率の相関係数を計算したところ、FF 金利と CPI 変化率の相関係数 36.6 %、FF 金利と鉱工業生産指数変化率の相関係数は 67.8 %、CPI と鉱工業生産指数変化率については 46.7 % となった。

¹⁴回帰推定における観測期間を日米とも 48 か月としたが、幾つか観測期間を変えて推定しても、推定結果が大きく変わることは無かった。

そして、日米長期金利の期待短期金利成分とタームプレミアム成分のそれぞれに対して、主成分ファクター分解の観点から日米長期金利変動の特徴を明らかにする。さらに、期待短期金利成分やタームプレミアム成分のマクロ経済変数分解の観点から、幾つかの時期について、日米長期金利の変動要因を分析する。

5.1 無裁定アフィン型ガウシアン期間構造モデルの推定結果

日米長期金利の時系列データそれぞれに対して、無裁定アフィン型ガウシアン期間構造モデルの推定を行った。表 1 は、日米長期金利に対するモデルパラメータの推定値を示している。図 2 と図 3 は、日本の長期金利について、観測値とモデル推定値を並べたグラフと推定誤差を示したグラフである。図 4 と図 5 は、米国についての同様のグラフである。これらを見ると、日米長期金利に対する推定精度は良好である。日本については、どの年限においてもほとんどの時期で 4bp 以内の誤差に収まっている。米国については、概ね 8bp 以内の範囲に収まる結果となった。

但し、図 3 と図 5 をみると、誤差に自己相関が生じており、観測誤差が独立、同分布に従うとした仮定が成立していないことに注意する必要がある。そこで、式 (33) の観測誤差 η が AR 過程に従うとあらかじめ仮定して推定することが対処法の一つとして考えられるが、推定が複雑になるほか、本稿の推定でも観測誤差項が既に十分に小さく推定されており、誤差項が AR 過程に従うとの修正を行って得られる観測誤差項と大きな差異は生じないと考えられる。また、観測誤差が AR 過程に従うという修正を仮に行っても、その観測誤差項は状態変数の決定に影響を与えない。したがって、誤差項の修正の有無によらず、誤差項は、期待短期金利成分ではなく、タームプレミアム成分として必ず認識されることになる。以上を踏まえると、本稿のモデルによる観測誤差が自己相関を有することが、以下で示す期待短期金利成分とタームプレミアム成分の分析に与える影響は限定的である可能性が高いといえる。

また、本稿のようなガウシアン過程をベースとするモデルの場合、短期ゾーンの金利のモデルによる推定値がゼロを下回ってしまう可能性が懸念される。特に、日本のような、長期間低金利政策を採用してきた国については、この点が懸念される。実際、推定された日本の瞬間スポットレート（1 か月金利） r_t をみると、日本銀行によるゼロ金利政策、量的緩和政策期間中にゼロを下回るケースがみられた（図 6）。但し、推定された r_t はマイナス方向に最大で -0.1035% までの低下に留まり、大凡ゼロ近傍で推移する推定結果を得た。また、後節で期待短期金利成分を計算するが、その際、本稿のモデルでは、将来の短期金利がゼロを下回る可能性は排除されておらず、期待短期金利成分が低め（すなわち、タームプレミアム成分が高め）に推定されている可能性は否めない。この点については、本稿モデルの欠点といえ、後節で示す期待短期金利

成分とタームプレミアム成分の推定値を用いた分析においては、留意しなければならない点といえる。この点を克服するより精緻な分析のためには、金利の非負制約を考慮した発展的なモデルによる分析が必要となる¹⁵。

5.2 マクロ経済変数による線形回帰モデルの推定結果

本節では、4.2節で推定方法を説明した、主成分ファクターを被説明変数、マクロ経済変数を説明変数とする線形回帰モデルの推定結果を示す。

初めに、線形回帰モデルによる推定を行う前に、イールドカーブの主成分ファクターを求めた。図7は、変換に用いた日本のイールドカーブにおける主成分のローディング行列を表し、図8は、日本の主成分ファクターの推移を表している。また、図9、図10は、米国長期金利の主成分に関する同様の図である。図7、図9をみると、日米いずれにおいても、第一主成分はイールドカーブの水準、第二主成分は傾き、第三主成分は曲率を表すことが確認できる。

計算された主成分ファクター（第一主成分～第五主成分）に対して、4.2節に則り、線形回帰モデルを推定した。推定結果は、日本については表2、米国については表3に示した。また、日米の10年長期金利の期待短期金利成分とタームプレミアム成分のマクロ経済変数に対する感応度の推定結果を、日本については、表4（感応度の推定値の期間平均値等）、図11（期待短期金利成分の感応度の推移）、図12（タームプレミアム成分の感応度の推移）に、米国については、表5（感応度の推定値の期間平均値等）、図13（期待短期金利成分の感応度の推移）、図14（タームプレミアム成分の感応度の推移）に示した。

まず、日本の期待短期金利成分とタームプレミアム成分のマクロ経済変数に対する感応度の推定結果をみると、表4から、平均的には、株価収益率に対する両成分の感応度が有意な結果となっていることが分かる。期待短期金利成分の株価収益率に対する感応度の推定値は、図11から、05年半ばから10年初にかけて有意となっていることが確認できる。また、タームプレミアム成分の株価収益率に対する感応度の推定値は、図12から、殆どの時期で有意となっていることも分かる。短期国債利回りに対する期待短期金利成分、プレミアム成分の感応度についても、図11、図12から、04年半ばから06年半ばまでの時期を除けば、有意となっている。CPI変化率に対する両成

¹⁵金利の非負制約を考慮した金利の期間構造モデルが幾つか知られている。例えば、Black (1995)、Gorovoi and Linetsky (2004)、Ichiue and Ueno (2007) では、短期金利を定める潜在変数として『シャドーレート』という概念を導入したモデル化を行っており、金利は必ずゼロ以上となる。また、Ahn et al. (2002) や Leippold and Wu (2003) などでは、短期金利を潜在変数の2次関数としてモデル化することによって、金利が必ずゼロ以上となるモデル（2次期間構造モデル（Quadratic Term Structure Model）と呼ばれる）が扱われている。

分の感応度の推定値については、99 %信頼区間でみると、殆どの時期で有意にならなかったが、90 %信頼区間でみると、タームプレミアム成分の同変数に対する感応度は、06年半ばから10年初まで有意となった。

次に、米国長期金利の期待短期金利成分とタームプレミアム成分のマクロ経済変数に対する感応度の推定結果をみってみる。表5からは、平均的には、マクロ第一主成分ファクターに対する期待短期金利成分の感応度の推定値が有意となっていることが分かる。実際に、図13で期待短期金利成分の感応度の推移をみると、マクロ第一主成分ファクターに対する感応度の推定値は多くの時期で有意となっていることが確認できる。また、期待短期金利成分のマクロ第二主成分ファクターに対する感応度は、05年半ば以降は有意となった。しかし、マクロ第三主成分ファクターに対する同成分の感応度は、殆どの時期で有意とはならなかった。一方、タームプレミアム成分の感応度の推移を図14で確認すると、マクロ第一主成分ファクターに対する感応度の推定値は、05年春頃から07年末にかけて有意となった。マクロ第二主成分ファクターに対する同成分の感応度は、05年夏以降の多くの時期で有意となった。マクロ第三主成分に対するタームプレミアム成分の感応度については、03年秋頃から05年半ばにかけての時期と、08年秋から09年末にかけての時期に有意となった。

以上、日米長期金利の期待成分、プレミアム成分のマクロ経済変数に対する感応度の推定結果をみてきたが、この結果を踏まえ、5.4.1節、5.4.2節では、幾つかの時期に焦点を当て、長期金利の期待短期金利成分とタームプレミアム成分の変動に対する各マクロ経済変数の寄与を調べることで、長期金利変動の背景を解釈することを試みる。

5.3 主成分ファクター分解の観点からみた日米長期金利の特徴

本節では、3.2節で説明した、長期金利の期待短期金利成分とタームプレミアム成分に対する主成分ファクター分解の観点から、日米長期金利の特徴を明らかにする。

まず、図15は、式(16)と式(22)を用いて、日本の長期金利を期待短期金利成分とタームプレミアム成分に分解した結果を示したものである。また、表6は、日米の期待短期金利成分とタームプレミアム成分について、平均値と標準偏差、期待短期金利成分とタームプレミアム成分の間の相関係数を年限毎に示したものである。表6をみると、まず、日本の長期金利の期待短期金利成分は米国と比べて低く推定されていることが分かる。例えば、10年の期待短期金利成分の95年1月～10年4月までの期間平均値は0.348%であり、10年長期金利に占める割合は小さい。これは、日本の政策金利が、ゼロ金利政策や量的緩和政策など、ゼロで推移していた期間が長かったことから、短期金利の期待値が低水準で推定された結果と考えられる。また、表6をみると、日本の期待短期金利成分とタームプレミアム成分の相関係数は80%を超える高い値を示

している。この理由については、以下で示すように、期待短期金利成分とタームプレミアム成分を主成分ファクターで分散分解することによって明らかになる。まず、期待短期金利成分の分散分解の結果を金利の年限を横軸にとってプロットしたのが図16である。これをみると、日本の期待短期金利成分については、金利の年限によらずに、第一主成分ファクター、すなわち、イールドカーブの水準ファクターの変動が全体の変動の60%~80%を占めていることが分かる。一方、タームプレミアム成分の分散分解については、いかなる年限においても、水準ファクターの寄与が一番大きいことが分かる(図17)。日本の期待短期金利成分とタームプレミアム成分の相関係数が高い値を示す点を上で指摘したが、これは水準ファクターの変動が期待短期金利成分とタームプレミアム成分双方の変動に大きく寄与している結果であることが分かった。

次に、米国の長期金利の特徴を主成分ファクター分解の観点から捉えてみる。図18では、米国の長期金利を期待短期金利成分とタームプレミアム成分に分解している。これをみると、日本の場合(図15)と比べて、米国の長期金利は期待短期金利成分の占める割合が大きいことがみてとれる。これは上述のように、観測期間(95/1月~10/4月)における平均的な日米政策金利の水準の差を反映した結果といえる。次に、期待短期金利成分やタームプレミアム成分の変動を、主成分ファクター分解の観点から捉えるため、主成分ファクターによる分散分解を行った。結果をみると、期待短期金利成分については、年限によらず第一主成分ファクター(水準ファクター)の変動が全体の9割を占めている(図19)。一方、タームプレミアム成分については、1年までの短期ゾーンは第四主成分の変動が比較的大きいが、1年以降の年限のタームプレミアムは、第二主成分(傾きファクター)が大きなウェイトを占めることがみてとれる(図20)。表6では、日米両国の期待短期金利成分とタームプレミアム成分の間の相関係数を示したが、米国の相関係数が日本の相関係数と比べて小さな値を示しているのは、米国の期待短期金利成分とタームプレミアム成分を変動させる主成分ファクターが異なることに起因していることが分かる。また、米国の第四主成分ファクターの変動が短期ゾーンのタームプレミアム成分の変動に強い影響を及ぼす結果となっている。これは、Duffee(2010)、Joslin et al.(2010)でも既に指摘されている、長期金利の決定には影響力が小さくても、タームプレミアムや期待超過収益率の変動に説明力を有するファクターの存在を示唆する結果と整合的といえよう。

5.4 日米長期金利のマクロ経済変数分解

本節では、幾つかの時期における日米長期金利の変動について仔細にみるために、長期金利の期待短期金利成分とタームプレミアム成分をマクロ経済変数の寄与度に分解し、その変動をみることにする。

5.4.1 長期金利のマクロ経済変数分解：日本の例

5.3節では、日本の期待短期金利成分とタームプレミアム成分の変動がイールドカーブの第一主成分で概ね説明されることが分かった。ここでは、日本の長期金利の変動をより詳しくみるため、2つの時期に焦点を当て、長期金利を構成する期待短期金利成分とタームプレミアム成分が、短期国債利回り、CPI変化率、株価収益率による要因とそれ以外の要因によってどのように変動していたのかをみることにする。

VaR ショック前後（02年9月～03年9月）（図21）

日本銀行による量的緩和政策下での低金利環境のなか、国内金融機関は運用難や余剰資金の積み上がりを背景に、国債への投資を積極化させた。しかし、03年6月中旬の金利上昇をきっかけに、多くの金融機関では国債ポジションが内部管理上のリスクリミットに抵触し、一斉にポジションを解消する動きをみせた。これによって、長期金利は03年6月末～9月初にかけて急上昇した（いわゆる“ VaR ショック ”）。例えば、10年国債金利（単利）は、0.4%台から1.6%台まで上昇した。

図21は、VaR ショックを挟む時期における、期待短期金利成分とタームプレミアム成分のマクロ経済変数分解の結果を示したものである。これをみると、期待短期金利成分の変動と比べて、タームプレミアム成分の変動が大きかったことが分かる。そこで、タームプレミアム成分の変動を以下では詳しくみていくことにする。

タームプレミアム成分は、02年中から03年5月にかけて低下した。これは、「その他」の寄与度の低下が最大の要因で、株価収益率要因の低下も幾分寄与していたことが、図21から確認できる。この株価収益率の寄与度の低下については、02年夏頃から始まった株価下落を背景に、安全資産としての国債を愛好する傾向が強まることで、国債需給に関するプレミアムが徐々に剥落していったこと等を反映していると考えられる。タームプレミアム成分に対する株価収益率の寄与度は、03年4月まで低下した後、03年5月に日経平均が上昇するとともに、上昇に転じた。これは、それまでの安全資産愛好の動きから、リスク資産に回帰する動きが今後急速に強まるのではないかとの懸念が、国債市場参加者の一部に意識された可能性が考えられる。一方、「その他」の寄与度については、03年5月まで大きく低下していったが、これは、上述の国債選好がファンダメンタルズから乖離した過熱気味な動きとなっていた可能性を示唆している。そして、03年6月～8月にかけて、「その他」の寄与度は大きく上昇し、タームプレミアム成分上昇の主因となったが、これは、それまでの過度な国債投資に対する巻き戻しがこの時期一気に生じたことの現れであると考えられる。

リーマンショック以降の動き（08年9月～10年4月）（図22）

08年9月に米国証券会社リーマンブラザーズが破綻し、国際的に金融市場は混乱し

た(いわゆる“リーマンショック”)。本邦国債市場でも、リーマンショック直後は、国債レポ市場で取引が成立しにくい状況に陥ったことを受け、国債市場の流動性が低下したとの声が市場から聞かれるなど、少なからず影響がみられた。ここでは、リーマンショック以降の本邦長期金利変動の背景を、期待短期金利成分、タームプレミアム成分に対するマクロ経済変数の寄与度の変動の観点から解釈する。

まず、期待短期金利成分のマクロ経済変数分解をみると、リーマンショック以降、利下げが08年10月と12月に実施されたこと等を背景に、短期国債利回りの寄与度が低下方向に作用したものの、09年春以降の株価回復の下で、株価収益率寄与度が上昇方向に作用したこと等から、期待短期金利成分に大きな変化は生じなかった。一方、タームプレミアム成分については、08年12月にかけて低下したが、これは主に、株価収益率の寄与度の低下に起因するものであった。この点については、08年末にかけての株価急落などにみられる景況感の急速な悪化によって、安全資産としての国債が選好され、国債需給に対するプレミアムが低下した可能性が考えられる。また、景況感の悪化に伴い、緩和的な金融政策が長期化するとの見方を持つ市場参加者が増え、市場参加者間の金融政策に対する見通しのばらつきが縮小した結果である可能性もある。09年入り後のタームプレミアム成分の動きについては、09年5月にかけて上昇した後、横ばい圏内で推移した。この間、株価収益率の寄与度はタームプレミアム成分の上昇圧力として作用した。日経平均株価が緩やかに上昇する中、国債からリスク資産へ回帰する動きが、今後、急速に強まり、国債価格が下落するリスクが意識されたほか、株価の回復とともに、緩和的な金融政策が継続される期間について、市場参加者間の今後の金融政策に対する見方にばらつきが生じた可能性が考えられる。また、CPI変化率の寄与度をみると、09年中に徐々にタームプレミアム成分の低下圧力として作用していったことがみてとれる。これは、CPI前年同月比変化率が低下していく中で、将来の物価水準が大きく下振れするリスクが意識された可能性がある¹⁶。また、09年5月と7月には「その他」の寄与度がタームプレミアム成分を押し上げている。これは、政府による大規模な経済対策を背景とした国債の増額発行について、09年5月に増発額が明らかになったことや、09年7月から実際に増額発行が開始されたこと等を受けて、国債需給に対する懸念が高まったことが背景にあると考えられる。

5.4.2 長期金利のマクロ経済変数分解：米国の例

5.3節では、米国の期待短期金利成分の変動が、イールドカーブの水準ファクターの変動によって説明される一方、タームプレミアム成分の変動が、短期ゾーンが第四主成分、中長期ゾーンが傾きファクターの変動によって説明されることを示した。ここ

¹⁶2009年11月、日本政府は月例経済報告の中で、「緩やかなデフレ状況にある」との認識を示した。

では、米国長期金利の変動要因を仔細にみるため、2つの時期に焦点を当て、米国の長期金利を構成する期待短期金利成分とタームプレミアム成分の変動が、マクロ経済変数やその他の要因によってどのように説明されるのかをみることにする。

Conundrum (長期金利の謎) と呼ばれる時期 (04年4月~06年3月) (図23)

04年半ばから、Fedは政策金利を継続的に引き上げたが、長期ゾーンの金利は、低下、もしくは、横ばい圏内での推移となった(図4)。この現象を当時のグリンспанFRB議長は、「conundrum (長期金利の謎)」と呼んだ。この時期の米国長期金利の変動を、期待短期金利成分とタームプレミアム成分に対するマクロ経済変数分解を用いて調べてみる(図23)。

まず、期待短期金利成分の動きをみると、05年7月まで上昇し、その後は横ばい圏内で推移した。マクロ第一主成分得点が、FF金利、CPI変化率、鉱工業生産指数変化率の全てを上昇させる方向に推移する中、当該ファクターの寄与度が、期待短期金利成分を押し上げる方向に作用した。

一方、タームプレミアム成分は05年6月にかけて低下した後、緩やかな上昇傾向を示した。05年6月にかけての低下は、マクロ第一主成分寄与度の若干の低下もあるが、主たる要因は「その他」の寄与度の低下であることがみてとれる。すなわち、この時期のタームプレミアム成分の低下は、本稿で用いた説明変数では十分に説明できていないことになる。この点に関連して、この時期、年金基金や海外中銀による米国債運用の拡大がみられていたと指摘する声があり、それが「その他」の寄与度の低下としてここに現れている可能性が考えられる。また、金融政策の不確実性の低下がタームプレミアム低下の一因となった可能性があるとの指摘もある¹⁷。

05年6月以降のタームプレミアム成分の緩やかな上昇については、マクロ第一主成分寄与度の低下を、マクロ第二主成分寄与度や「その他」の寄与度の上昇が上回ることによって引き起こされている。05年半ばから、マクロ第一主成分得点は、FF金利、CPI変化率、鉱工業生産変化率全てを上昇させる方向に推移したが、この間、マクロ第一主成分はタームプレミアム成分に低下圧力として作用していたことになる。この点については、Stambaugh (1988) や Ludvigson and Ng (2009) を初めとする様々な既存研究において、米国長期金利のタームプレミアムは、過去の多くの時期で、カウンターシクリカル(景気変動との逆相関性)な性質を有すると指摘されている点と関係がある。Ludvigson and Ng (2009) は、タームプレミアムがカウンターシクリカルな性

¹⁷久田ら(2005)は、「金融政策の不確実性」を表す指標として、実現した政策金利とテイラー・ルールから求められる政策金利の予測値との二乗誤差を計測し、04年半ばから当該指標の値が小さくなっていることを確認することによって、金融政策の不確実性の低下が、長期金利のタームプレミアムの低下を引き起こしていた可能性を指摘している。

質を有する理由として、景気後退局面では、国債の投資家は、リスク・アペタイトの低下とともにリスクの対価をより大きく要求するためタームプレミアムが上昇し、景気回復時には、投資家は、リスク・アペタイトの上昇とともにリスクの対価をそれほど要求しないためタームプレミアムが低下する、としている。上でみたように、04年半ばから05年半ばの時期は、マクロ第一主成分得点の上昇がタームプレミアム成分の低下を説明しておらず、米国の長期金利で通常いわれているタームプレミアムのカウンターシクリカリティに反する結果となったが、05年半ば以降は、通常の関係に戻ったことが分かる。次に、05年半ば以降のタームプレミアム成分の緩やかな上昇においては、マクロ第二主成分も相応に寄与している。特に、05年10月に当該変数の寄与度は大きな上昇を示している。これは、CPIの前年同月比変化率が05年10月に大幅に上昇したことで、将来のインフレ率が上振れる懸念が市場に拡がった可能性を示唆していると考えられる。

リーマンショック以降の動き（08年9月～10年4月）（図24）

ここでは、リーマンショック以降の米国長期金利の変動要因をみていこう。

まず、リーマンショック以降の期待短期金利成分をみると、リーマンショック発生前を下回る水準で推移した（図24）。この間、期待短期金利成分の低下圧力として作用したのが、マクロ第一主成分の寄与度である。マクロ第一主成分得点は、リーマンショック以降09年夏にかけて、FF金利、CPI変化率、鉱工業生産指数変化率を押し下げる方向に推移したが、経済環境の悪化が低金利政策の期間を長期化させるとの見方が市場で強まった結果、期待短期金利成分を低下させる方向に作用したと考えられる。マクロ第二主成分寄与度については、08年12月以降09年夏にかけて、期待短期金利成分への上昇圧力を強めた。マクロ第二主成分得点は、09年夏にかけて、CPI変化率が低下し政策金利が上昇する方向に推移したが、これは、同ファクターのインフレ率への低下圧力よりも、政策金利への上昇圧力が将来の短期金利の上昇につながると、市場で捉えられた可能性が考えられる。09年下期以降は、マクロ第一主成分得点、第二主成分得点とともに、09年上期までの動きと逆方向の動きをみせたことから、それぞれの期待短期金利成分への寄与度が緩和される格好となった。

一方、タームプレミアム成分は、08年10月に上昇した後、08年12月にかけて大幅に低下した。そして、09年入り後は横ばい圏内での動きとなった。08年10月は、リーマンショック後、投資家のリスクアペタイトの低下を背景とする安全資産選好の強まりから、短期国債を買って金利リスクが相対的に大きな長期ゾーンの国債を売却する動きが一部でみられたといわれており、そのことに伴って、08年10月に「その他」の寄与度が上昇した可能性がある¹⁸。その後、08年12月にタームプレミアム成分が大幅

¹⁸図24をみると、08年10月には、マクロ第一、第二、第三主成分の寄与度の上昇がタームプレミア

に低下したが、これは「その他」の寄与度の低下に起因している。これは、08年12月開催のFOMCにおいて、Fedによる国債買入のメリットが議論されたことが明らかになったことで、国債需給に関するプレミアムが剥落した結果である可能性が考えられる¹⁹。09年上期中は、マクロ第三主成分の寄与度が徐々に上昇していった。このマクロ第三主成分寄与度の上昇は、同主成分得点が、政策金利が引き上げられ、鉱工業生産指数変化率が低下する方向に推移するなかで生じたものである。これは、上述のように、タームプレミアムがカウンターシクリカルな性質を有することと矛盾しない動きとなっている。また、09年上期中の動きとして、同年3月に「その他」の寄与度がタームプレミアム成分の大幅な低下を引き起こしている。これは、同月中旬に、Fedが最大3,000億ドルの国債買入を決定したことによって、再び需給プレミアムが低下した可能性が背景にあると考えられる。09年下期以降の動きについては、まず、マクロ第三主成分のタームプレミアム成分への寄与度が低下方向に作用した。これは、景況感の悪化に歯止めがかかったことで、09年上期までのタームプレミアム成分上昇への寄与が反転したことにより生じたと考えられる。09年下期には、マクロ第二主成分の寄与度も上昇しているが、これは、CPI変化率がそれまでの低下傾向から上昇に転じることで、将来のインフレ率が上振れする懸念が高まったことが背景にあると思われる。また、09年12月頃からは、「その他」の寄与度がプレミアムの上昇圧力として作用しているが、この時期、ギリシャの財政悪化を初めとするソブリン・リスクへの注目度が市場で高まるなかで、大規模な経済対策を実施している米国についても、将来の財政悪化に伴う金利上昇リスクが市場参加者に意識された可能性がある。

6 まとめと今後の課題

本稿のモデルではまず、無裁定アフィン型ガウシアン期間構造モデルの下で、マクロ経済変数を一切考慮しない潜在変数のみからなるアプローチによって長期金利の推定を行った。その下で、潜在変数を主成分ファクターに変数変換することによって、期待短期金利成分とタームプレミアム成分の変動に対する主成分ファクターの寄与度を計算することが可能となり、長期金利の変動を、主成分ファクターの変動の観点からより明確に捉えることができるようになった。さらに、主成分ファクターを被説明変数とし、マクロ経済変数を説明変数とする線形回帰モデルを推定することで、主成分を

ムの上昇をもたらしていることが分かる。しかし、08年8月、9月ともこれらに対するタームプレミアムの感応度の推定値は統計的に有意ではなかったことから、08年10月のプレミアムの上昇をマクロ経済変数の寄与で説明することはしていない。

¹⁹2008年12月15、16日のFOMCで、やや長めの政府債務をFedが買入れるメリットが議論されたことが、声明により明らかになった。また、2009年3月17日、18日のFOMCにおいて、向こう6か月間で最大3,000億ドルの長期国債を買い入れることが決定された。

介して、マクロ経済変数の変動が期待短期金利成分やタームプレミアム成分の変動に与える影響を捉えることを可能にした。これらの手法を用いて、日米長期金利の変動の特徴を、期待短期金利成分とタームプレミアム成分の主成分ファクターの変動の観点から説明しただけでなく、過去の幾つかの時期に焦点を当て、マクロ経済変数の期待成分、プレミアム成分変動への寄与をみることによって、日米長期金利の変動の背景を分析した。分析の結果、(1)日米長期金利のタームプレミアム成分の変動に寄与するイールドカーブの主成分要因が異なる点、(2)日本のタームプレミアム成分は、株価収益率の上昇(低下)に伴い上昇(低下)する傾向が幾つかの時期でみられる点、(3)米国の経済状況の強さを示す変数が改善(悪化)する時に、当該変数は、米国長期金利のタームプレミアム成分の低下圧力(上昇圧力)として作用する傾向が幾つかの時期でみられる点、等が明らかになった。

本稿モデルの問題点は、本論中でも説明したように、将来の短期金利が負値となることを許容するモデルとなっているため、低金利環境下では、長期金利の期待短期金利成分を低く見積もってしまう可能性が高い点である。したがって、日米とも低金利政策が採られている現状においては、金利がゼロを下回らないより現実的なモデルを用いて、長期金利の期待短期金利成分とタームプレミアム成分を推定することが求められるだろう。また、マクロ経済変数と金利は、本来、相互依存関係が強いことが想像されるが、本稿のモデルでは、マクロ経済変数を外生的に扱っており、両者の依存関係をモデル化できていない問題を有している。この点を克服するため、マクロ経済変数の動学をモデルに取り入れて、期待短期金利成分やタームプレミアム成分のマクロ経済変数ショックに対する感応度分析を行うことなどが今後の課題として考えられよう。

参考文献

- Ahn, Dong-Hyun., Robert F. Ditter, and Ronald A. Gallant (2003) “Quadratic Term Structure Models: Theory and Evidence,” *Review of Financial Studies*, Vol. 15, No. 1, pp. 243–288.
- Ang, Andrew and Monika Piazzessi (2003) “A no-arbitrage vector autoregression of term structure dynamics with macroeconomic and latent variables,” *Journal of Monetary Economics*, Vol. 50, pp. 745–787.
- Bernanke, Ben, Vincent Reinhart, and Brian Sack (2005) “Monetary Policy Alternatives at the Zero Bound: An Empirical Assessment,” *Brookings Paper on Economic Activity*, Vol. 2, pp. 1–78.

- Black, Fischer S. (1995) "Interest Rates as Options," *Journal of Finance*, Vol. 50, pp. 1371–1376.
- Cochrane, John H. and Monika Piazzesi (2008) "Decomposing the Yield Curve," Working paper.
- Dai, Qiang and Kenneth J. Singleton (2000) "Specification Analysis of Affine Term Structure Models," *Journal of Finance*, Vol. 55, No. 5, pp. 1943–1978.
- Dewachter, Hans and Mario Lyrio (2006) "Macro Factors and the Term Structure of Interest Rates," *Journal of Money, Credit and Banking*, Vol. 38, pp. 119–140.
- Diebold, Francis X., Glenn D. Rudebusch, and S. Boragan Aruoba (2006) "The macro economy and the yield curve: a dynamic latent factor approach," *Journal of Econometrics*, Vol. 131, pp. 309–338.
- Duffee, Gregory R. (2002) "Term Premia and Interest Rate Forecasts in Affine Models," *Journal of Finance*, Vol. 57, pp. 405–443.
- Duffee, Gregory R. (2010) "Information in (and not in) the term structure," Working paper, John Hopkins University.
- Duffie, Darell and Rui Kan (1996) "A Yield-factor Model of Interest Rates," *Mathematical Finance*, Vol. 6, pp. 379–406.
- Fisher, Mark and Christian Gilles (1996) "Estimating Exponential-Affine Models of the Term Structure," Working paper.
- Gorovoi, Vitatcheslav and Vadim Linetsky (2004) "Black's Model of Interest Rates as Options, Eigenfunction Expansions and Japanese Interest Rates," *Mathematical Finance*, Vol. 14, pp. 49–78.
- Gurkaynak, Refet S., Brian Sack, and Jonathan H. Wright (2006) "The U.S. Treasury Yield Curve: 1961 to the Present," Finance and Economics Discussion Series, No.28, Washington: Board of Governors of the Federal Reserve System.
- Hamilton, James D. (1994) *Time Series Analysis*: Princeton University Press.
- Ichiue, Hibiki and Yoichi Ueno (2007) "Equilibrium Interest Rate and The Yield Curve in a Low Interest Rate Environment," Bank of Japan Working Paper Series, No.07-E-18.

- Joslin, Scott, Marcel Pribsch, and Kenneth J. Singleton (2010) “Risk Premiums in Dynamic Term Structure Models with Unspanned Macro Risks,” Working paper, Stanford University.
- Kim, Don H. and Athanasios Orphanides (2007) “The bond market term premium: what is it, and how can we measure it?,” *BIS Quarterly Review*, June, pp. 27–40.
- Kim, Don H. and Jonathan H. Wright (2005) “An Arbitrage-Free Three-Factor Term Structure Model and the Recent Behavior of Long-Term Yields and Distant-Horizon Forward Rates,” Finance and Economics Discussion Series, No.33, Washington: Board of Governors of the Federal Reserve System.
- Leippold, Markus and Wu Liuren. (2003) “Design and Estimation of Quadratic Term Structure Models,” *European Finance Review*, Vol. 7, pp. 47–73.
- Ludvigson, Sydney C. and Serena Ng (2009) “Macro Factors in Bond Risk Premia,” *The Review of Financial Studies*, Vol. 22, No.12, pp. 5027–5067.
- McCulloch, Huston J. (1975) “The Tax-Adjusted Yield Curve,” *Journal of Finance*, Vol. 30, No.3, pp. 811–830.
- Rudebusch, Glenn D., Eric T. Swanson, and Tao Wu (2006) “The Bond Yield ” Conundrum” from a Macro-Finance Perspective,” *Monetary and Economic Studies*, Vol. 24, No.S-1, pp. 83–109.
- Rudebusch, Glenn D. and Tao Wu (2008) “A Macro-Finance Model of the Term Structure, Monetary Policy and the Economy,” *Economic Journal*, Vol. 118, pp. 906–926.
- Stambaugh, Robert F. (1988) “The information in forward rates: Implication for models of term structure,” *Journal of Financial Economics*, Vol. 21, No. 1, pp. 41–70.
- 大屋幸輔 (1992) “可変係数回帰モデルの理論的側面と応用上の問題点,” 大蔵省財政金融研究所フィナンシャル・レビュー, No.23.
- 小田信之, 鈴木高志 (2007) “金利の期間構造と金融政策に関するマクロ ファイナンス分析 均衡実質金利・均衡インフレ率の可変性とゼロ金利制約を考慮した実証,” 日本銀行ワーキングペーパーシリーズ, No.07-J-2.
- 紅林孝彰 (2007) “近年のアフィン型イールド・カーブ・モデルの展開：マクロ・ファイナンスへの応用、ジャンプや信用リスクの取り込み,” 日本銀行金融研究所ディスカッション・ペーパー・シリーズ, No.2007-J-3.

久田祥史, 安藤裕康, 谷川純子, 加藤涼 (2005) “米国の長期金利の「謎」を考える：金融政策との関連を中心に,” 日銀レビューシリーズ, No.05-J-8.

藤井眞理子, 高岡慎 (2008) “金利の期間構造とマクロ経済：Nelson Siegel モデルを用いた実証分析,” FSA リサーチ・レビュー 2007, 第 4 号.

計表

表 1: モデルパラメータ推定値

日本の推定値					
δ_0	$\delta_{1,1}$	$\delta_{1,2}$	$\delta_{1,3}$	$\delta_{1,4}$	$\delta_{1,5}$
-0.0070471 (0.00057390)	-0.00011941 (0.00011230)	0.00077606 (5.1124E-06)	0.00014054 (1.05271E-06)	0.0018855 (5.2335E-06)	-4.5953E-05 (2.4288E-07)
κ_1	$K_{2,1}^P$	κ_2	$K_{3,1}^P$	$K_{3,2}^P$	κ_3
20.637 (2.7741)	0.037883 (0.0028166)	3.5066 (0.00000)	-0.0041422 (0.0013709)	0.016682 (0.00011805)	3.3152 (2.4912E-05)
$K_{4,1}^P$	$K_{4,2}^P$	$K_{4,3}^P$	κ_4	$K_{5,1}^P$	$K_{5,2}^P$
0.0093113 (0.0030838)	-0.24864 (0.0011830)	0.11370 (0.00074454)	4.0564 (0.00057361)	-0.61709 (0.16183)	-15.491 (0.086637)
$K_{5,3}^P$	$K_{5,4}^P$	κ_5			
7.3141 (0.030279)	-1.3618 (0.010021)	4.1725 (0.0089112)			
$\Lambda_{1,1}$	$\Lambda_{1,2}$	$\Lambda_{1,3}$	$\Lambda_{1,4}$	$\Lambda_{1,5}$	
29.008 (0.93856)	-113.22 (1.9781E-07)	-73.147 (0.0040191)	-36.292 (0.056289)	-28.626 (0.19187)	
$\lambda_{0,1}$	$\lambda_{0,2}$	$\lambda_{0,3}$	$\lambda_{0,4}$	$\lambda_{0,5}$	h
-0.26119 (0.98352)	110.80 (6.6441)	129.50 (5.4764)	182.06 (10.284)	3296.5 (89.649)	2.0366E-05 (9.8520E-07)

米国の推定値					
δ_0	$\delta_{1,1}$	$\delta_{1,2}$	$\delta_{1,3}$	$\delta_{1,4}$	$\delta_{1,5}$
0.0077967 (0.00025518)	-0.0013875 (0.00034105)	-0.00071168 (0.00037264)	0.00033024 (9.5700E-07)	-0.00072807 (0.0000E-07)	0.0046882 (4.0199E-05)
κ_1	$K_{2,1}^P$	κ_2	$K_{3,1}^P$	$K_{3,2}^P$	κ_3
3.2657 (0.14252)	0.0042161 (0.0026106)	4.3844 (0.016990)	-0.030534 (0.022158)	-0.0033390 (0.0040604)	4.5974 (0.020632)
$K_{4,1}^P$	$K_{4,2}^P$	$K_{4,3}^P$	κ_4	$K_{5,1}^P$	$K_{5,2}^P$
-25.890 (2.3025)	-21.664 (1.6820)	4.6256 (0.0000)	0.047945 (0.00096832)	-3.5113 (0.17706)	-3.2179 (0.21621)
$K_{5,3}^P$	$K_{5,4}^P$	κ_5			
0.66867 (0.0000E-07)	-0.14191 (0.00016071)	3.8215 (0.0041063)			
$\Lambda_{1,1}$	$\Lambda_{1,2}$	$\Lambda_{1,3}$	$\Lambda_{1,4}$	$\Lambda_{1,5}$	
-8.1564 (0.61460)	-44.944 (0.66655)	-74.678 (0.19692)	15.725 (0.0000)	-29.792 (0.24113)	
$\lambda_{0,1}$	$\lambda_{0,2}$	$\lambda_{0,3}$	$\lambda_{0,4}$	$\lambda_{0,5}$	h
0.34698 (0.0000)	17.139 (2.4464)	13.335 (3.8497)	-7.6236 (1.5148)	-87.402 (9.0106)	2.7413E-05 (1.8361E-06)

* 日米の推定値とも括弧内は推定パラメータの標準誤差を表す。

表 2: 主成分ファクターの線形回帰推定 日本

	PC1	PC2	PC3	PC4	PC5
短期国債利回り	1.959 (4.010)	-1.006 (5.024)	0.2003 (1.012)	-0.03584 (0.6859)	0.02557 (2.201)
CPI 変化率	0.1032 (1.655)	0.003901 (0.9783)	0.02302 (1.086)	-0.001371 (0.9159)	0.001355 (0.9981)
株価収益率	1.260 (3.776)	0.1897 (1.972)	0.1543 (1.878)	-0.02074 (1.337)	0.03441 (3.074)
定数項	-0.002558 (24.19)	0.0004522 (7.971)	-0.0001306 (3.786)	-4.348E-05 (3.563)	-2.001E-05 (4.258)
ρ	0.6596 (6.138)	0.9107 (6.511)	0.7599 (8.198)	0.7889 (9.526)	0.7199 (7.907)
ダービンワトソン統計量	1.597	1.524	1.617	1.536	1.386
自由度調整済み決定係数	0.5455	0.3571	0.1604	0.03651	0.1928

* 98年12月～10年4月までの推定値を単純平均したもの。 ** 括弧内は t 値の絶対値の期間平均値を表す。

表 3: 主成分ファクターの線形回帰推定 米国

	PC1	PC2	PC3	PC4	PC5
マクロ第一主成分	-0.001692 (5.557)	-0.0006453 (4.782)	3.162E-06 (1.316)	-9.328E-06 (2.154)	3.162E-08 (1.379)
マクロ第二主成分	0.0003750 (2.881)	0.0003411 (3.058)	-5.308E-05 (1.159)	2.327E-06 (1.341)	-1.257E-07 (1.166)
マクロ第三主成分	0.0004582 (3.076)	0.0001382 (1.291)	-4.651E-05 (1.643)	3.735E-05 (3.052)	-9.798E-08 (0.9632)
定数項	0.0001184 (2.532)	0.0002823 (4.894)	-1.605E-06 (1.000)	-2.841E-05 (2.123)	-2.417E-10 (1.094)
ρ	0.6728 (6.323)	0.5347 (4.296)	0.6798 (6.348)	0.6047 (5.336)	-0.08028 (0.8487)
ダービンワトソン統計量	1.568	1.575	1.587	1.505	1.973
自由度調整済み決定係数	0.7659	0.6666	0.1608	0.4829	0.03667

* 98年12月～10年4月までの推定値を単純平均したもの。 ** 括弧内は t 値の絶対値の期間平均値を表す。

表 4: 10 年金利の期待成分・プレミアム成分に対するマクロ変数感応度 日本

	期待短期金利成分	タームプレミアム成分
短期国債利回り	2.429 (1.764)	5.924 (2.841)
CPI 変化率	0.1981 (1.054)	0.14231 (1.726)
株価収益率	1.613 (2.261)	6.150 (4.288)

* 98 年 12 月～10 年 4 月までの推定値を単純平均したもの。 ** 括弧内は t 値の絶対値の期間平均値。

*** 実際の値を 10 倍して表示。

表 5: 10 年金利の期待成分・プレミアム成分に対するマクロ変数感応度 米国

	期待短期金利成分	タームプレミアム成分
マクロ第一主成分	-3.080 (4.145)	1.409 (1.937)
マクロ第二主成分	0.5902 (2.265)	1.180 (2.020)
マクロ第三主成分	0.03577 (1.669)	0.8480 (1.738)

* 98 年 12 月～10 年 4 月までの推定値を単純平均したもの。 ** 括弧内は t 値の絶対値の期間平均値。

*** 実際の値を 10,000 倍して表示。

表 6: 日米長期金利の期待短期金利とタームプレミアムの統計量

期待短期金利とタームプレミアムの期間平均と標準偏差

		日本		米国	
2年		期待短期金利	タームプレミアム	期待短期金利	タームプレミアム
平均値		0.205 %	0.292 %	3.370 %	0.629 %
標準偏差		0.240 %	0.219 %	1.687 %	0.422 %
5年		期待短期金利	タームプレミアム	期待短期金利	タームプレミアム
平均値		0.262 %	0.835 %	3.281 %	1.246 %
標準偏差		0.223 %	0.484 %	1.065 %	0.609 %
10年		期待短期金利	タームプレミアム	期待短期金利	タームプレミアム
平均値		0.348 %	1.478 %	3.238 %	1.931 %
標準偏差		0.236 %	0.513 %	0.584 %	0.659 %

期待短期金利とタームプレミアムの相関係数

相関	日本	米国
2年	84.9 %	15.1 %
5年	84.1 %	28.3 %
10年	86.1 %	24.7 %

*いずれの統計量も 95/1 月～10/4 月の期間の値を用いて計算されている。

グラフ

図 1: 米国の政策金利、CPI 変化率、鉱工業生産指数変化率の主成分分析

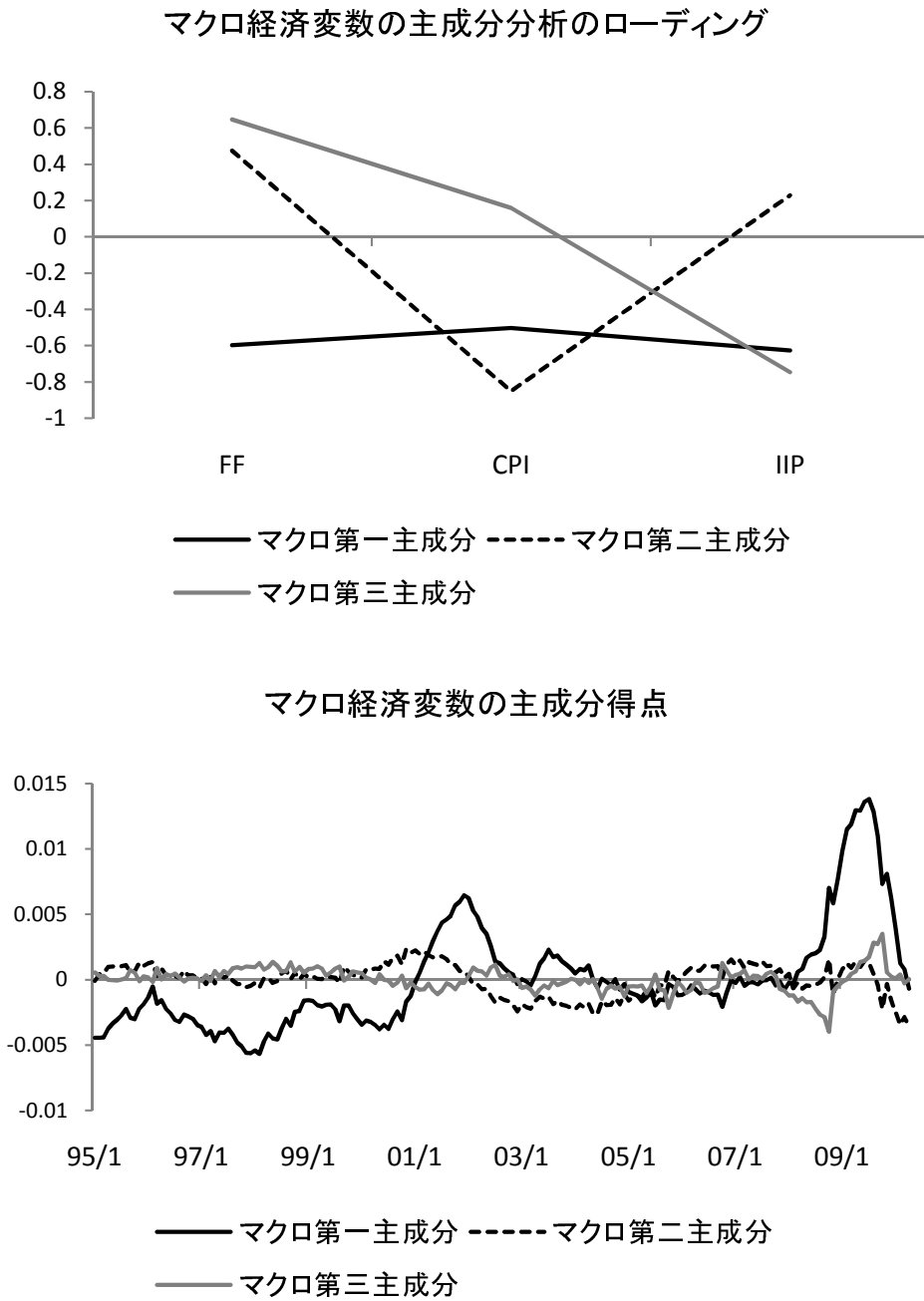


図 2: 日本の長期金利

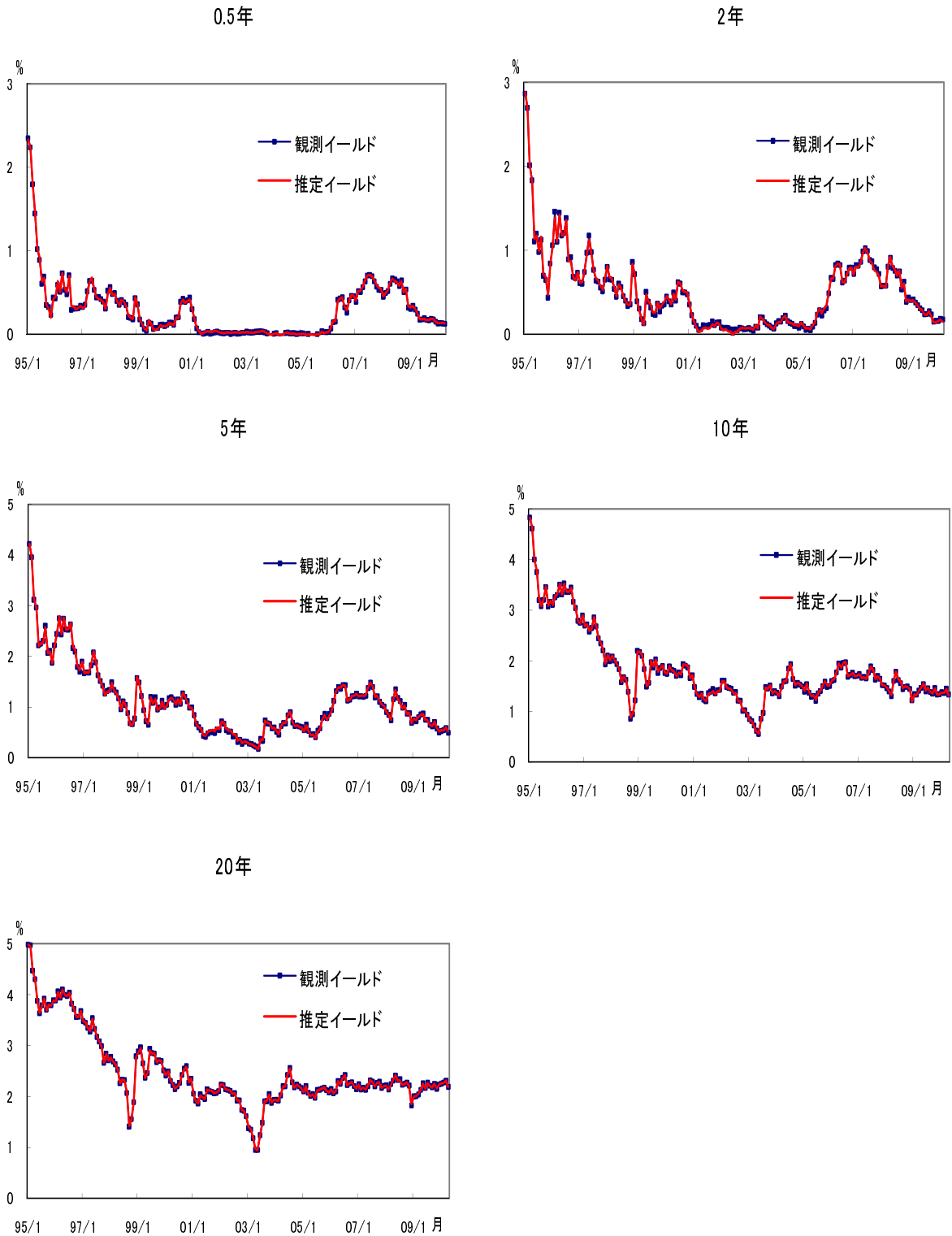


図 3: 日本の長期金利のモデル誤差 (観測値-推定値)

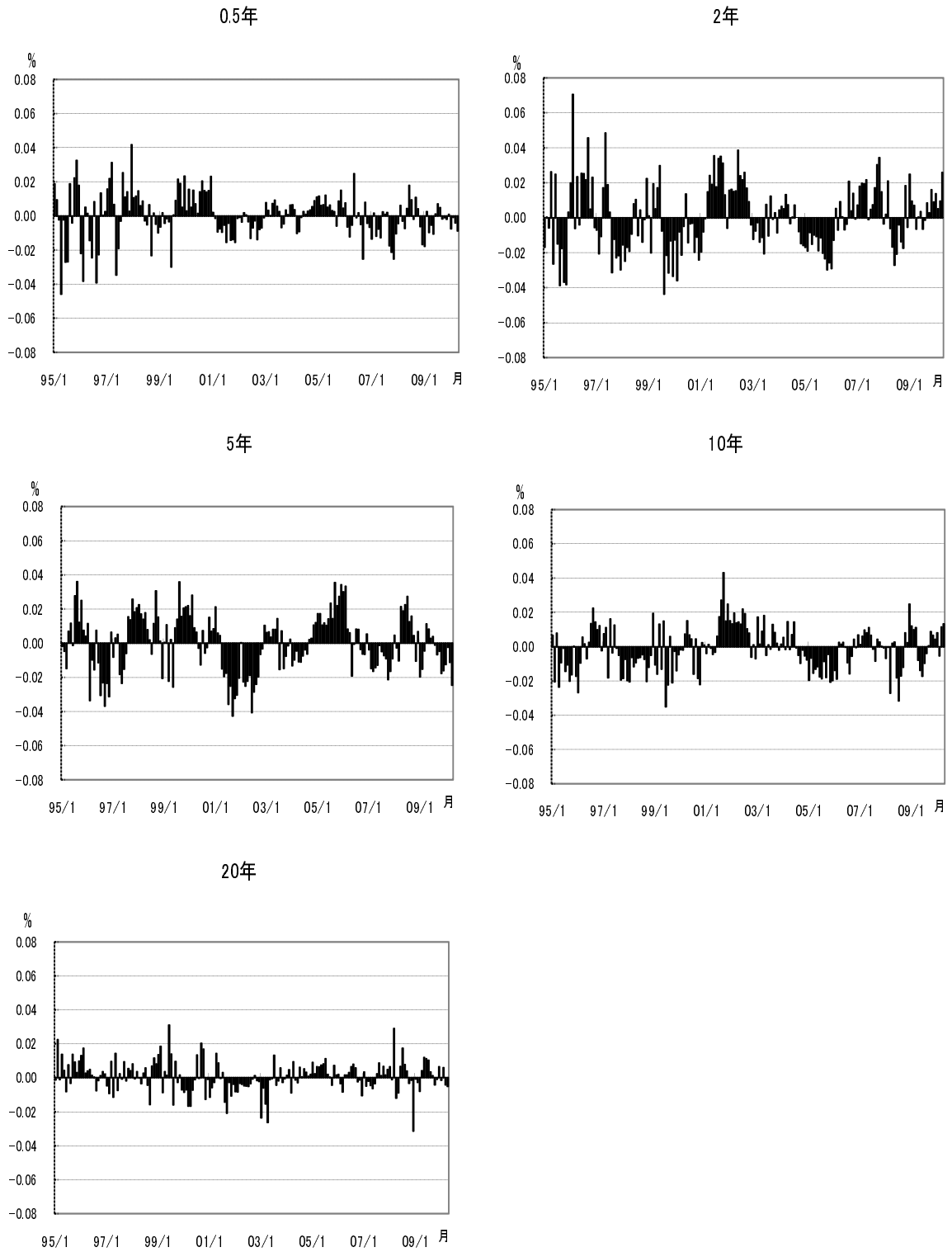


図 4: 米国の長期金利

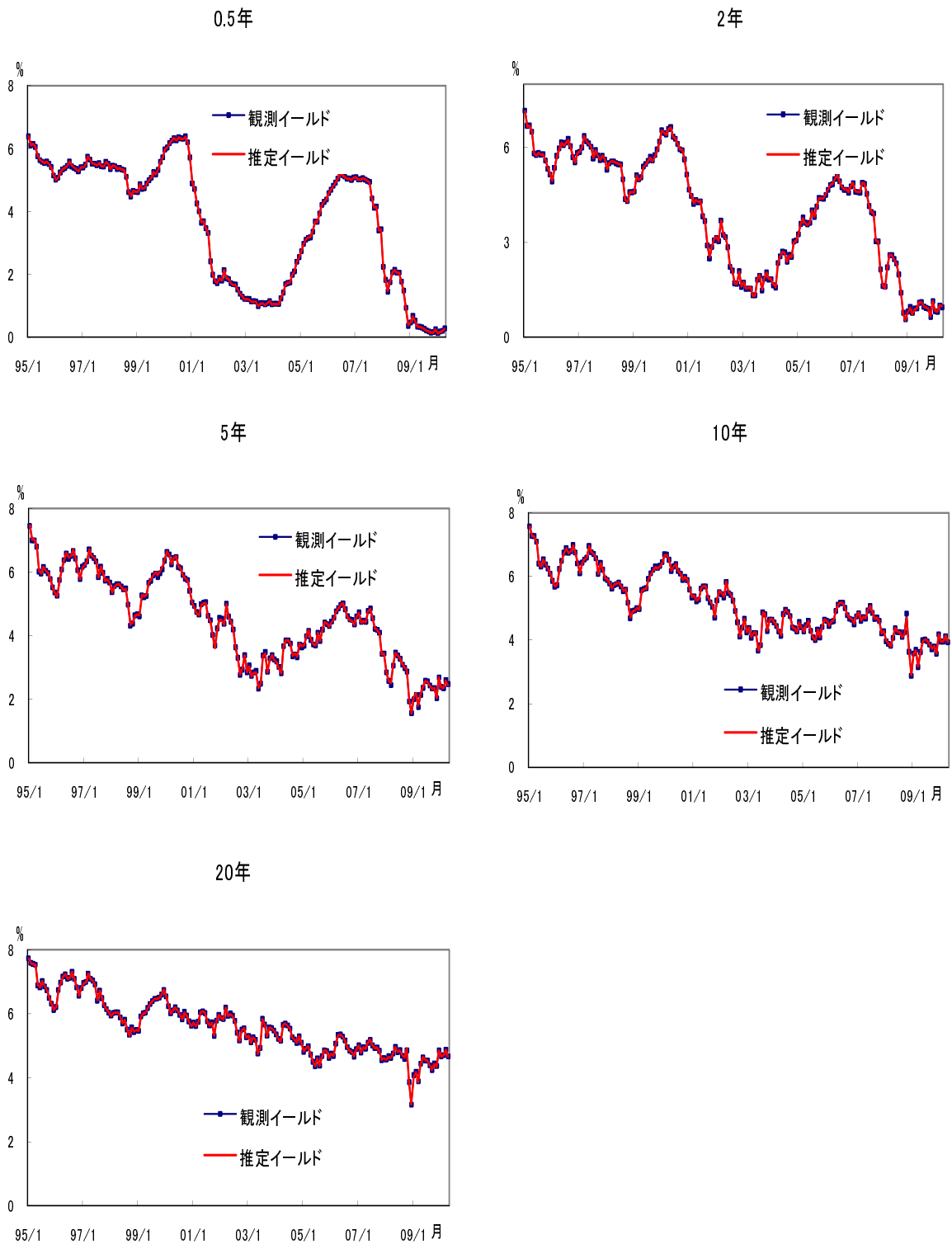


図 5: 米国の長期金利のモデル誤差 (観測値-推定値)

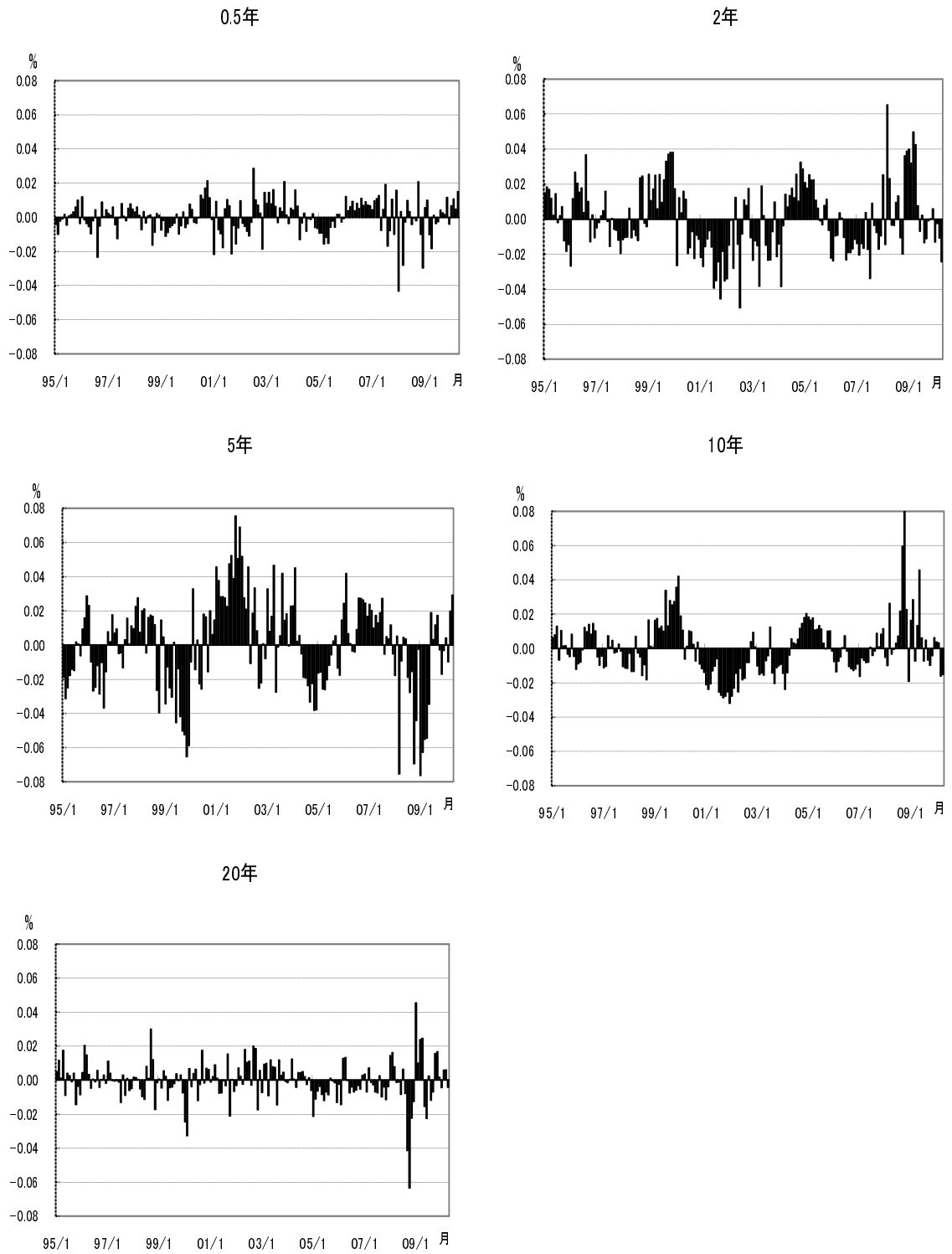


図 6: 日本の無担保コール翌日物金利と推定瞬間スポット金利

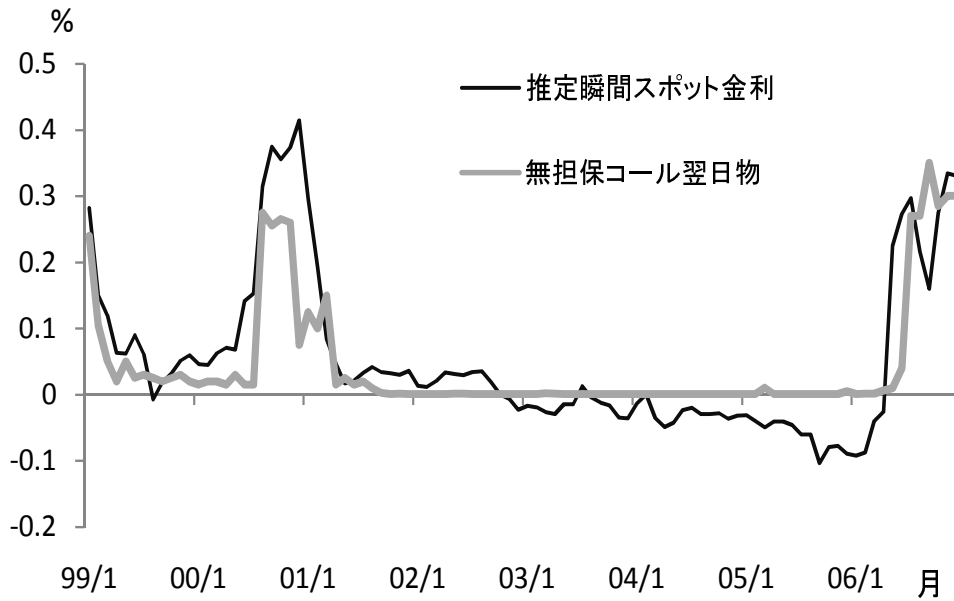


図 7: 主成分のローディング (日本)

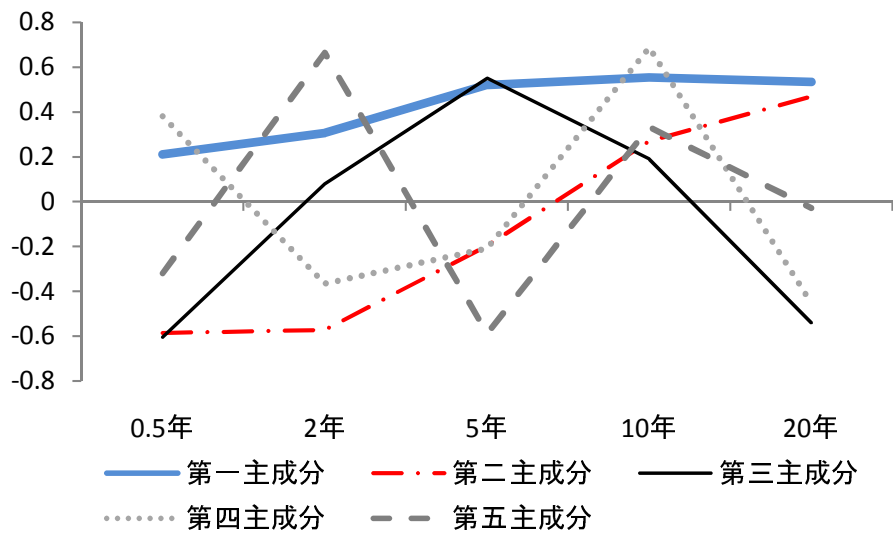


図 8: 主成分ファクターの推移 (日本)

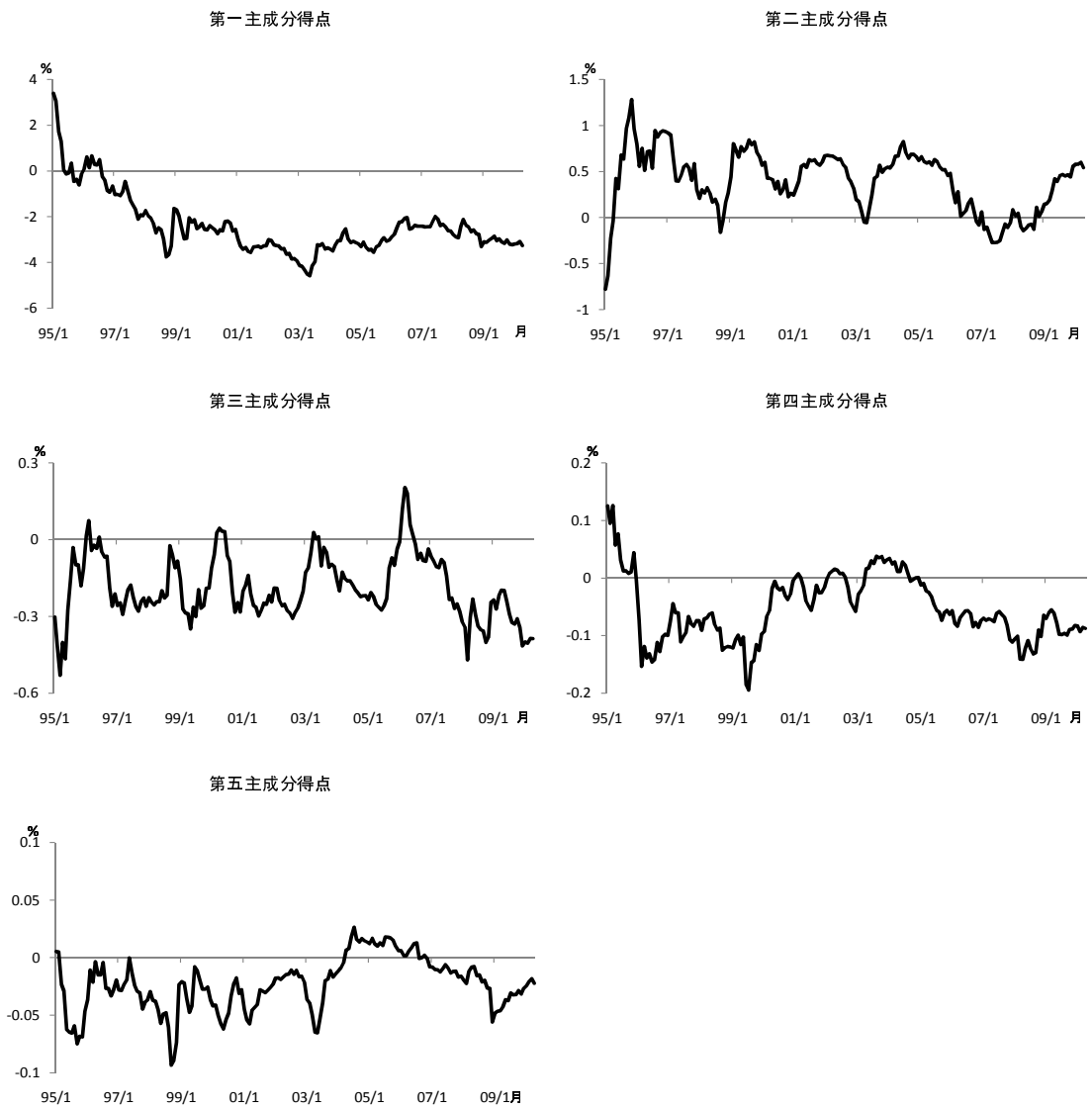


図 9: 主成分のローディング (米国)

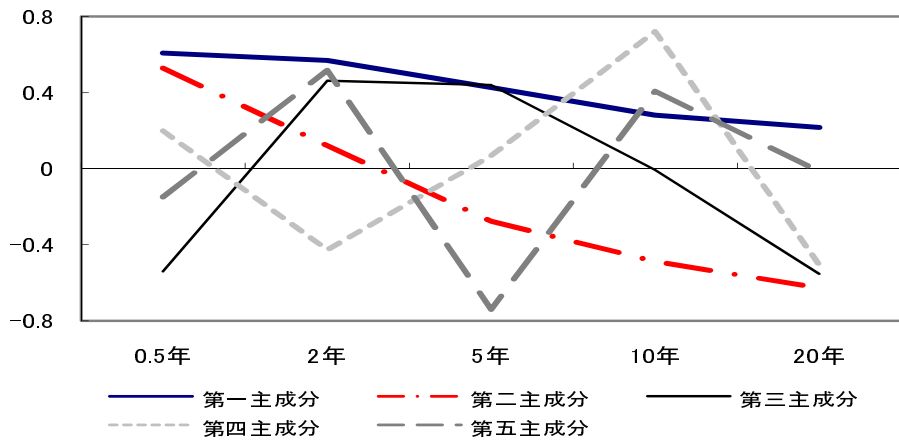


図 10: 主成分ファクターの推移 (米国)

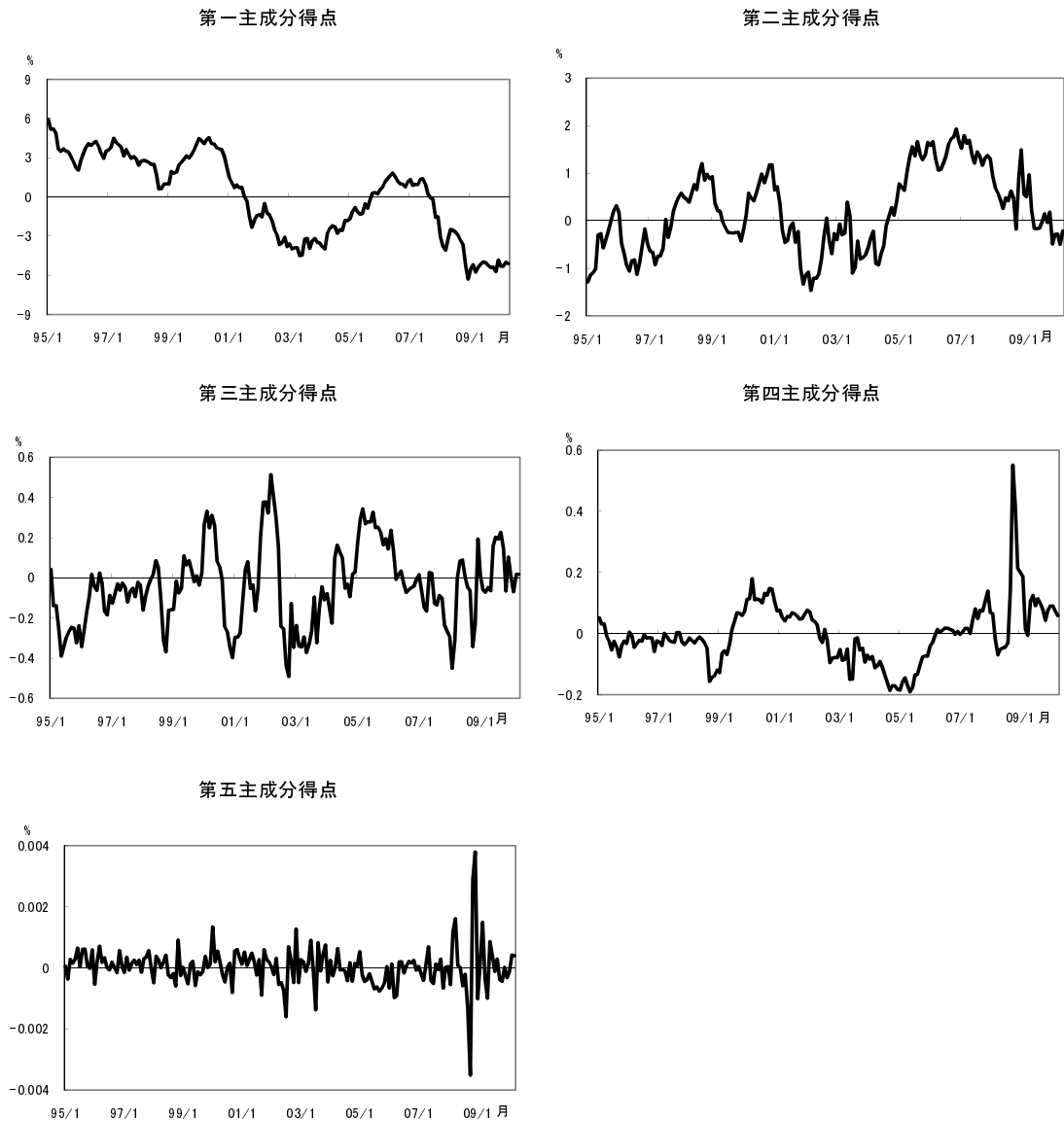
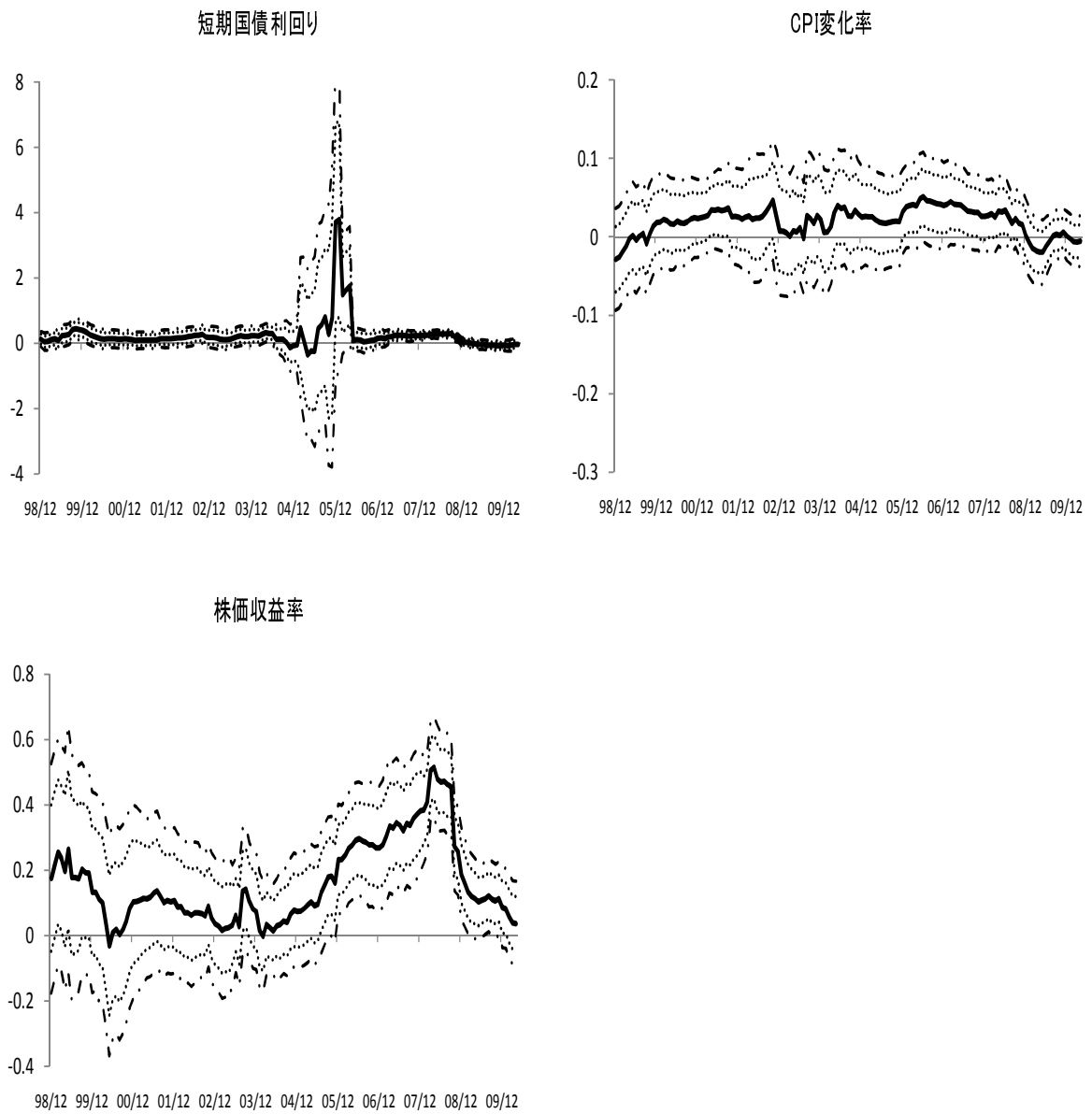
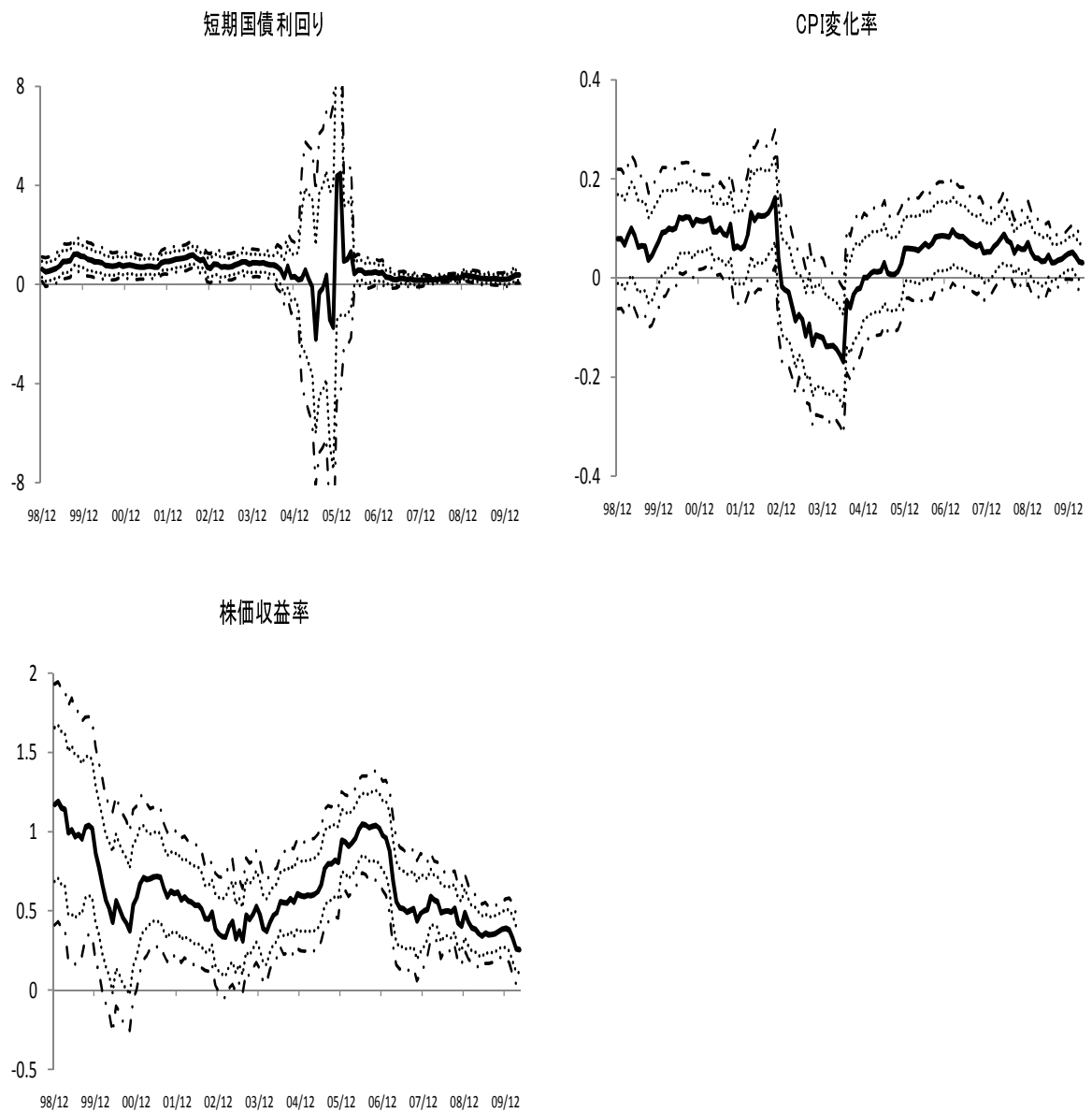


図 11: マクロ経済変数に対する 10 年金利の期待短期金利成分の感応度推定値 (日本)



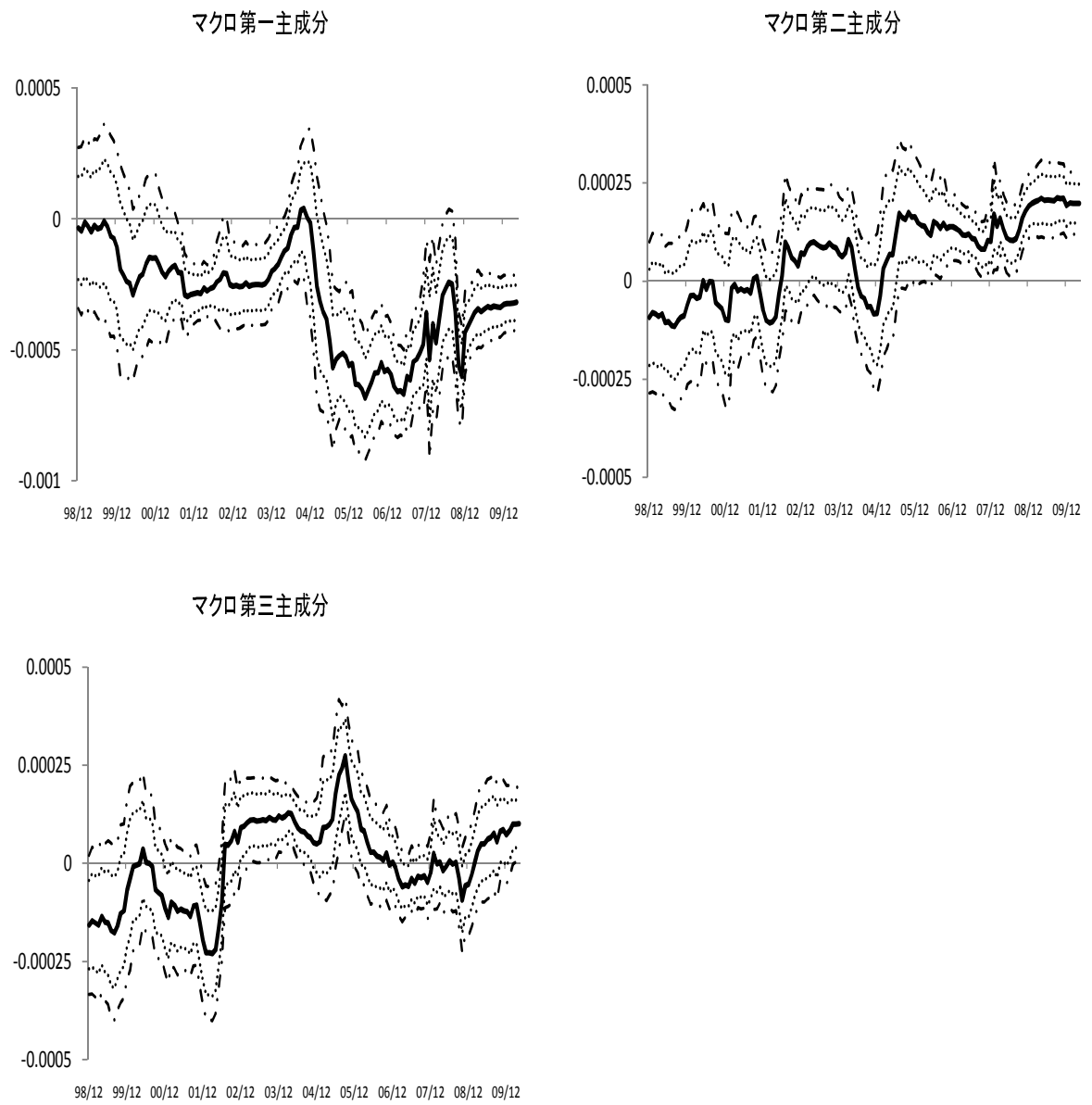
* 実線は推定値、点線は 90 % 信頼区間、一点鎖線は 99 % 信頼区間を表す。

図 12: マクロ経済変数に対する 10 年金利のタームプレミアム成分の感応度推定値(日本)



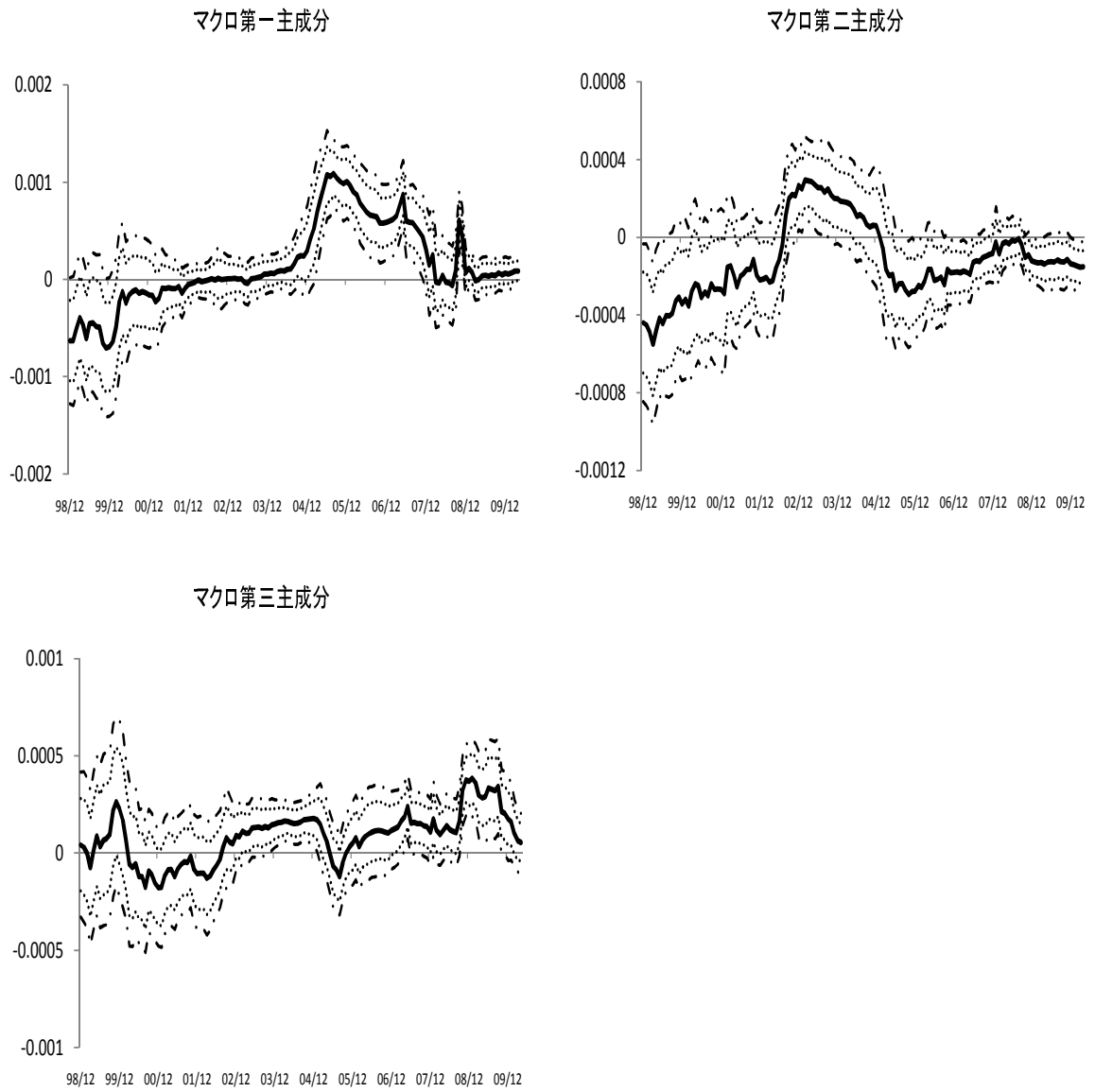
* 実線は推定値、点線は 90 % 信頼区間、一点鎖線は 99 % 信頼区間を表す。

図 13: マクロ経済変数に対する 10 年金利の期待短期金利成分の感応度推定値 (米国)



* 実線は推定値、点線は 90 % 信頼区間、一点鎖線は 99 % 信頼区間を表す。

図 14: マクロ経済変数に対する 10 年金利のタームプレミアム成分の感応度推定値 (米国)



* 実線は推定値、点線は 90 % 信頼区間、一点鎖線は 99 % 信頼区間を表す。

図 15: 日本の長期金利の分解

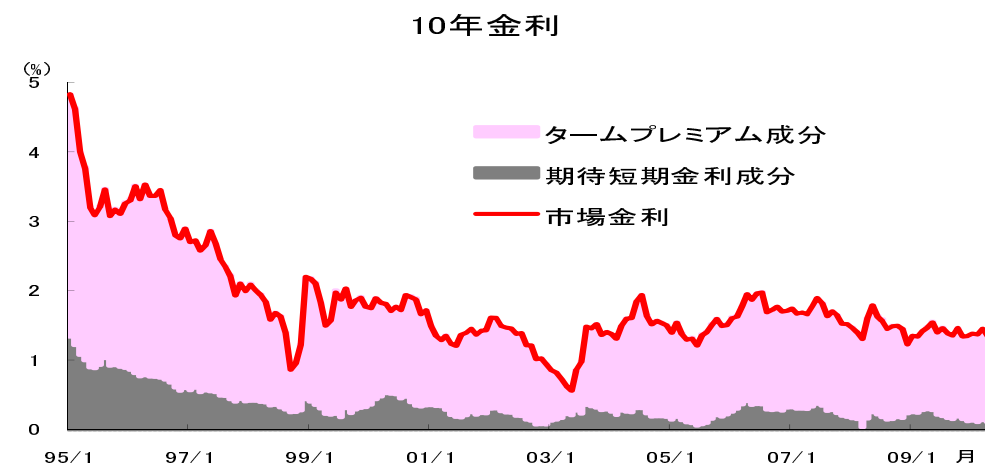
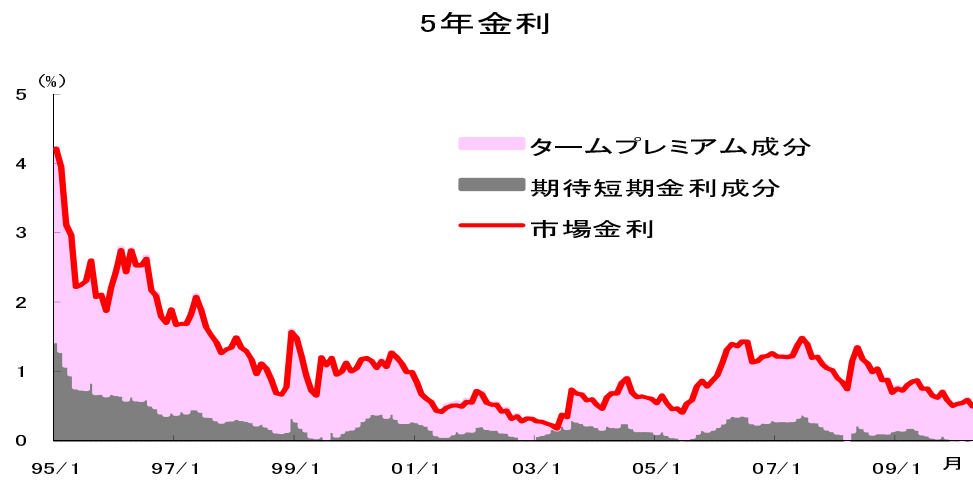
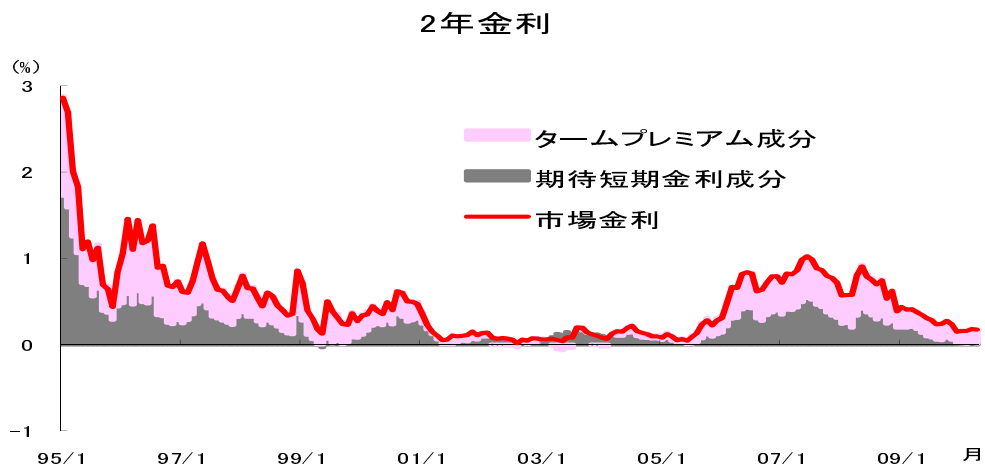
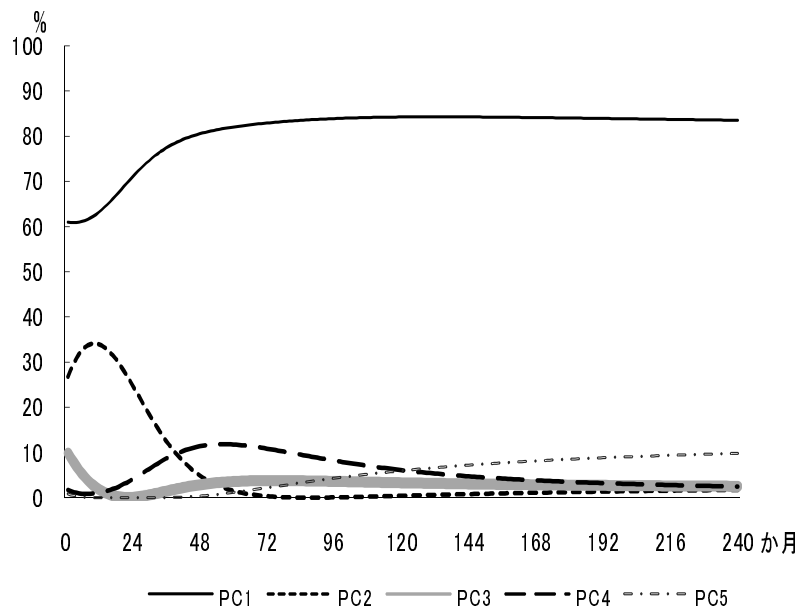
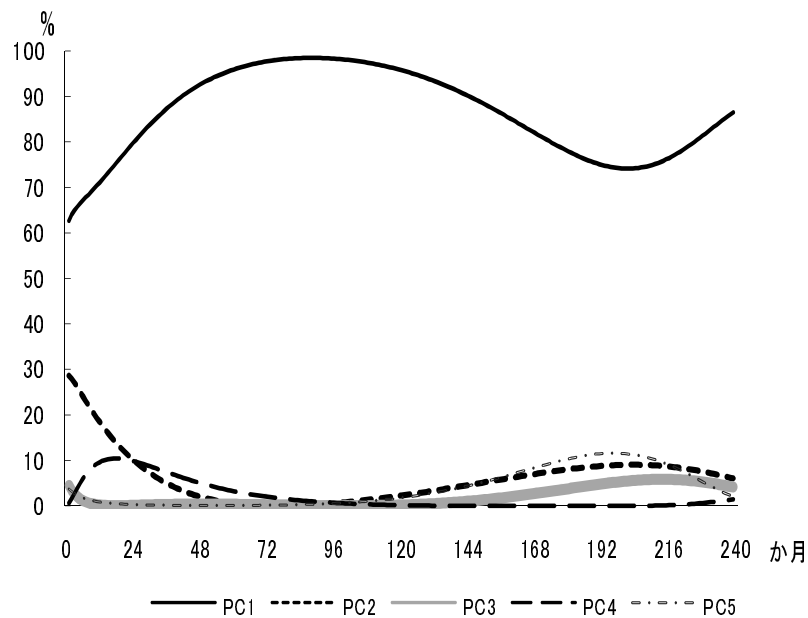


図 16: 日本の期待短期金利成分の分散分解



*ここで、PC1 はイールドカーブの第一主成分、PC2 は第二主成分、…(以下同様)の寄与を表すとする。

図 17: 日本のタームプレミアム成分の分散分解



*ここで、PC1 はイールドカーブの第一主成分、PC2 は第二主成分、…(以下同様)の寄与を表すとする。

図 18: 米国の長期金利の分解

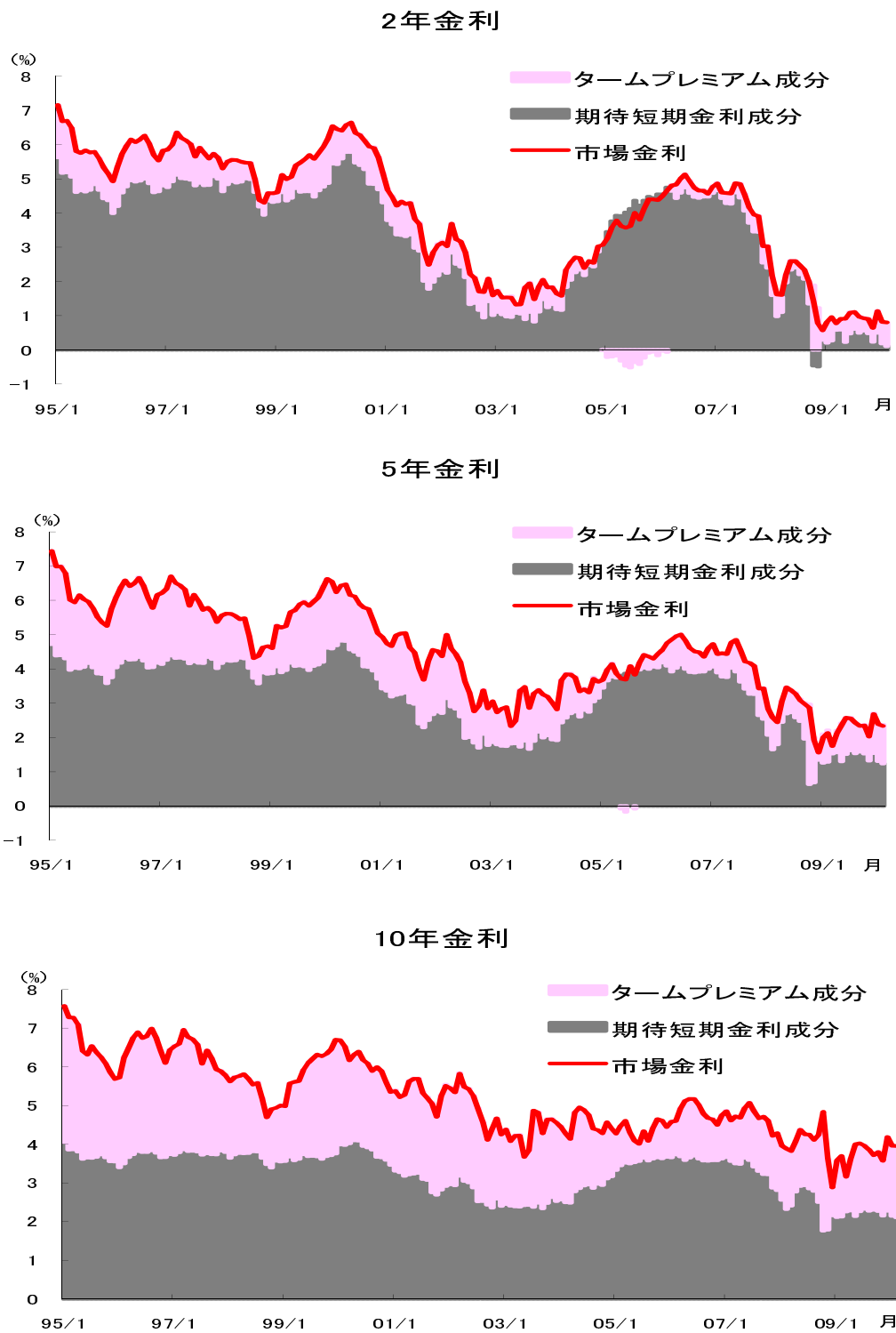
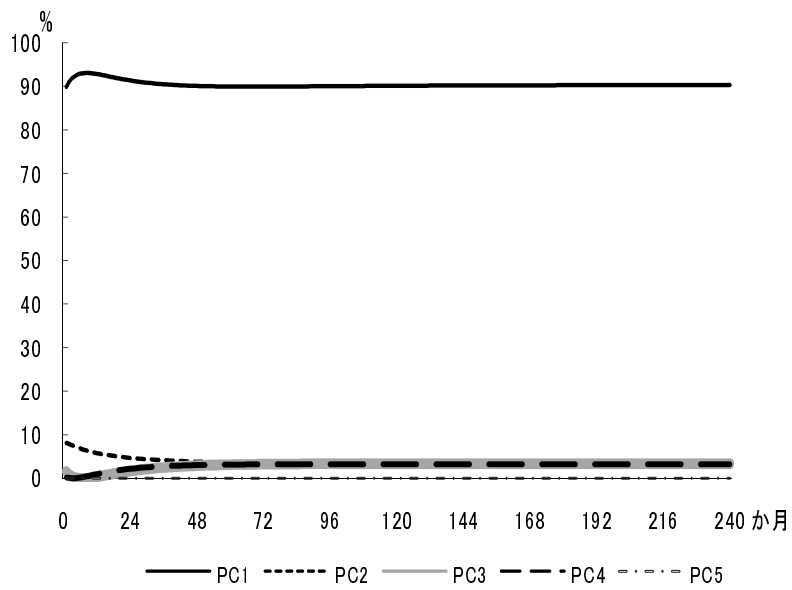
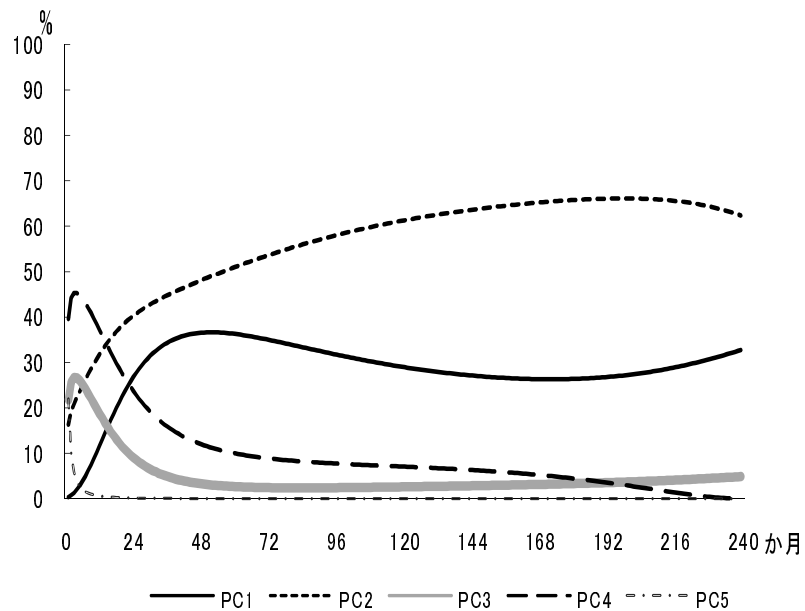


図 19: 米国の期待短期金利成分の分散分解



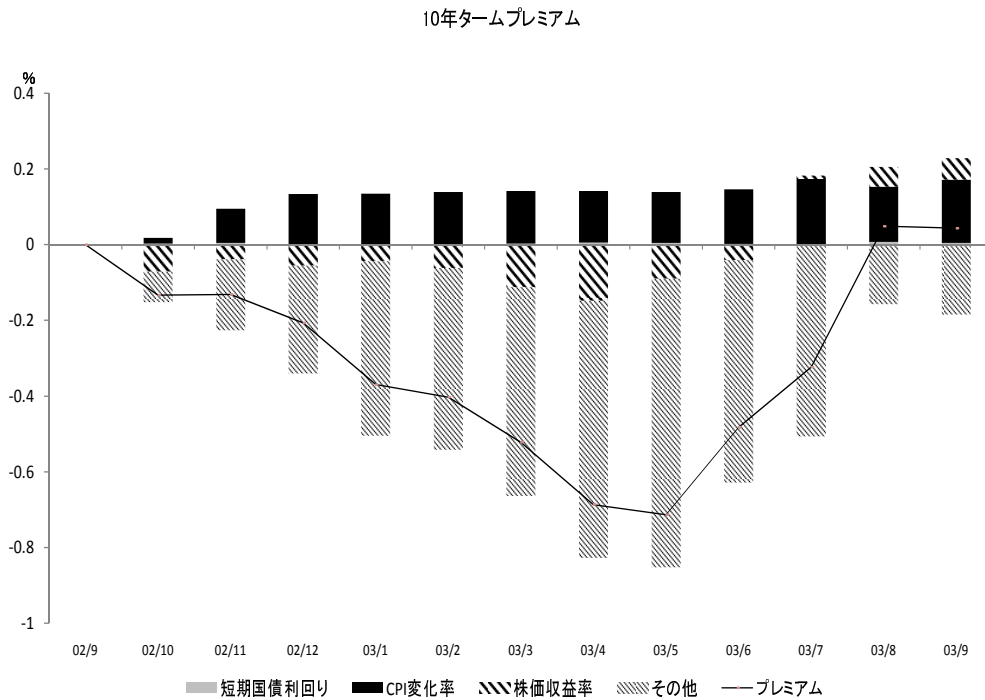
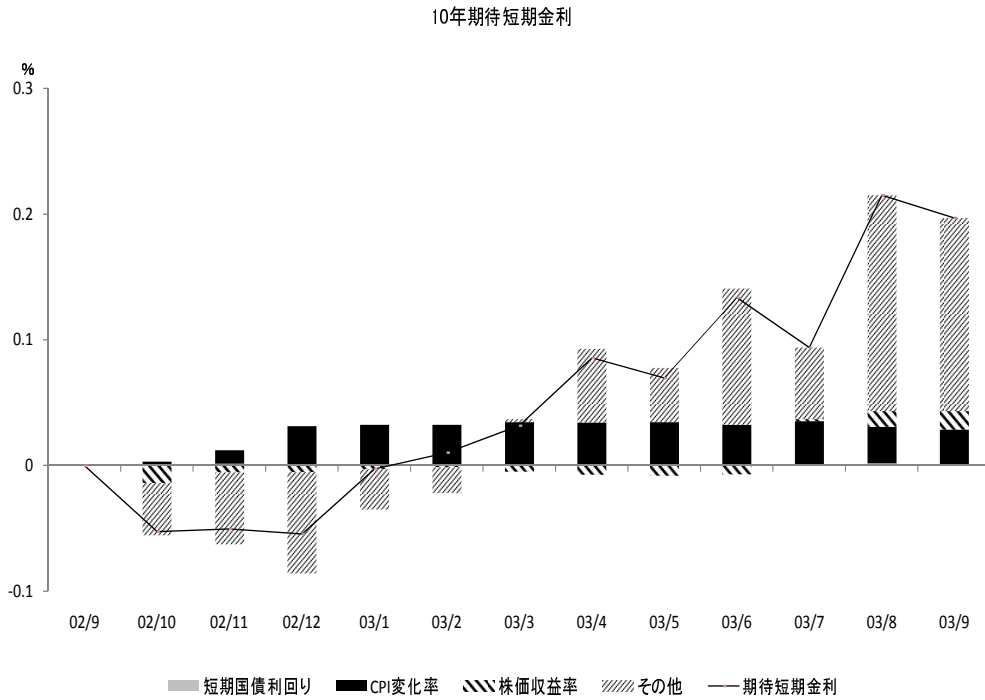
*ここで、PC1 はイールドカーブの第一主成分、PC2 は第二主成分、…(以下同様)の寄与を表すとする。

図 20: 米国のタームプレミアム成分の分散分解



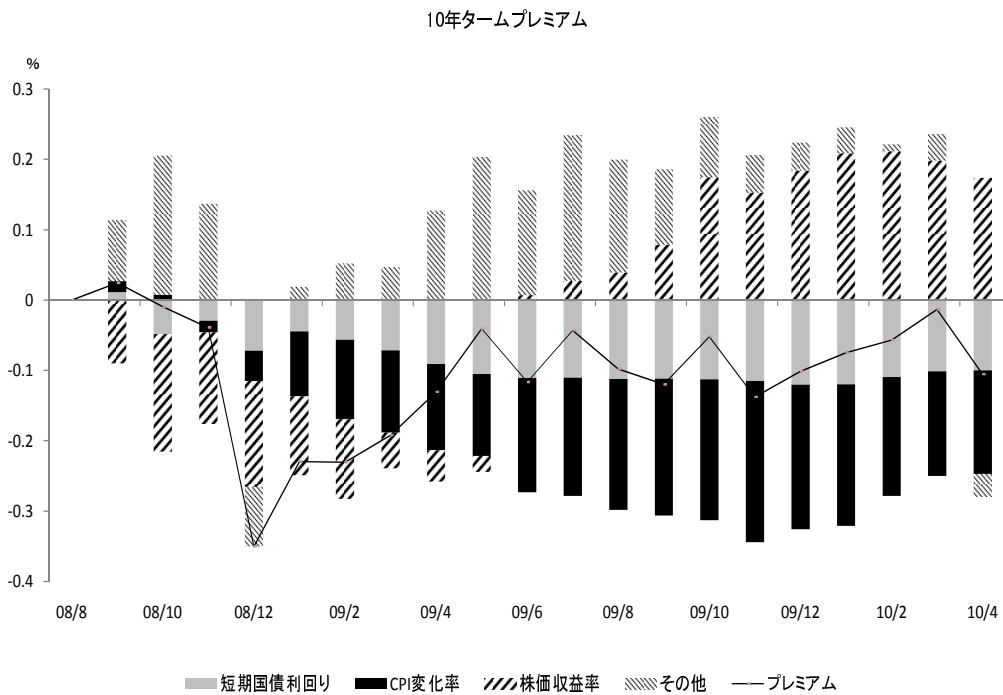
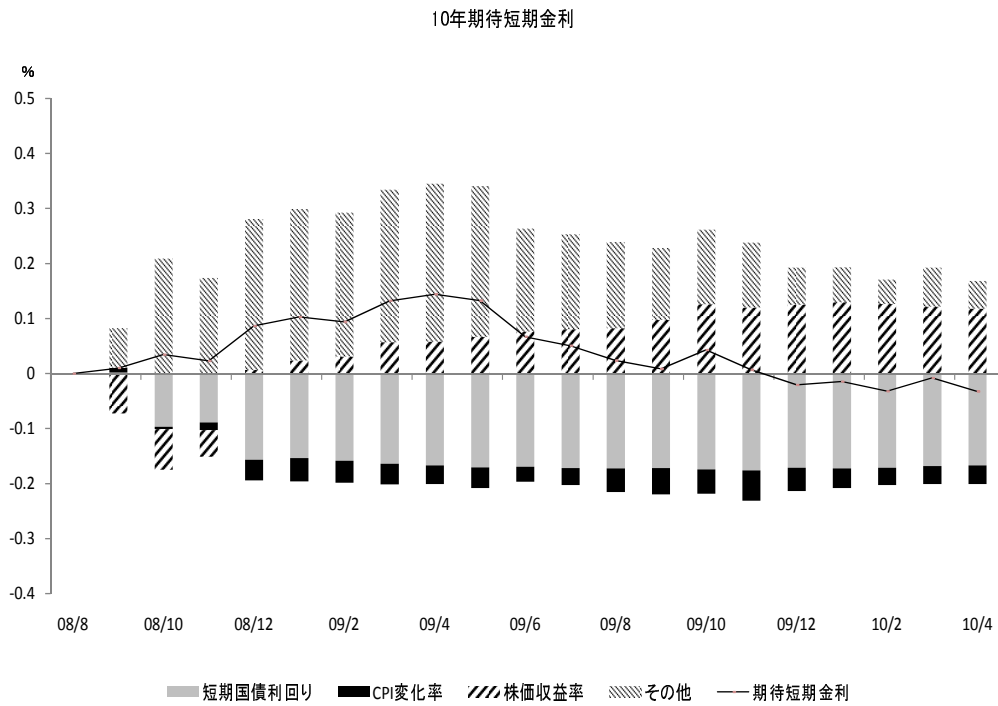
*ここで、PC1 はイールドカーブの第一主成分、PC2 は第二主成分、…(以下同様)の寄与を表すとする。

図 21: VaR ショック前後のマクロ経済変数分解



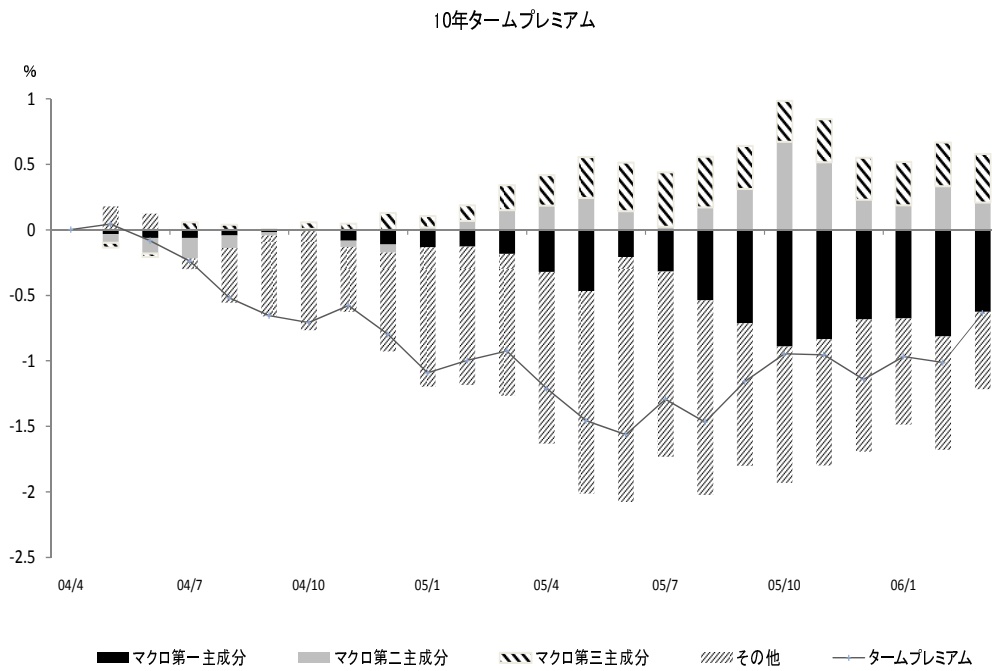
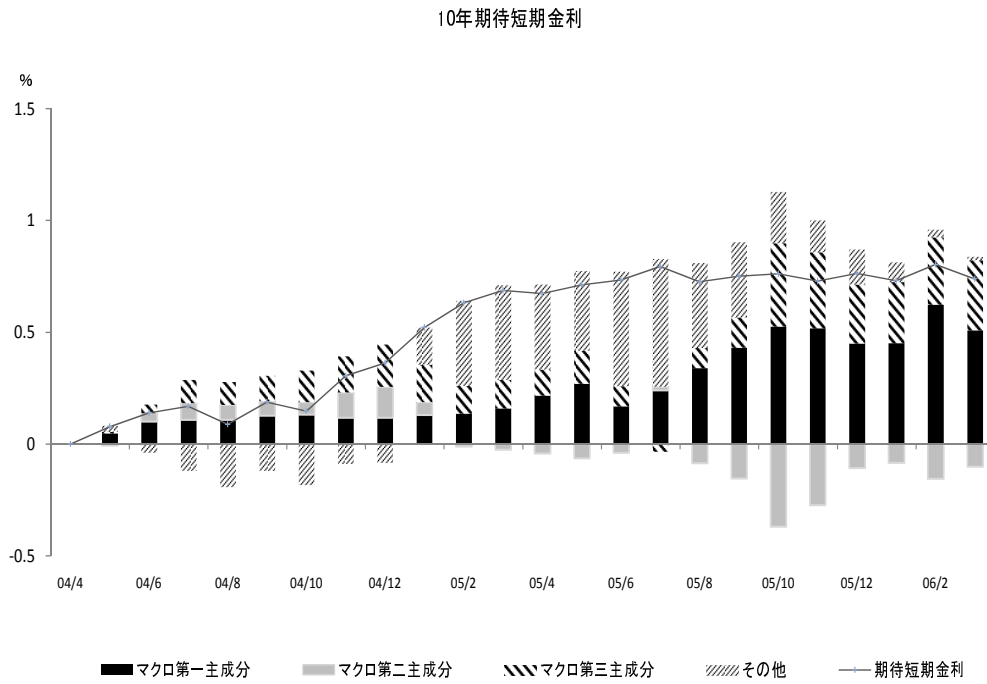
* 02年9月からの差分で表示している。

図 22: リーマンショック以降のマクロ経済変数分解 (日本)



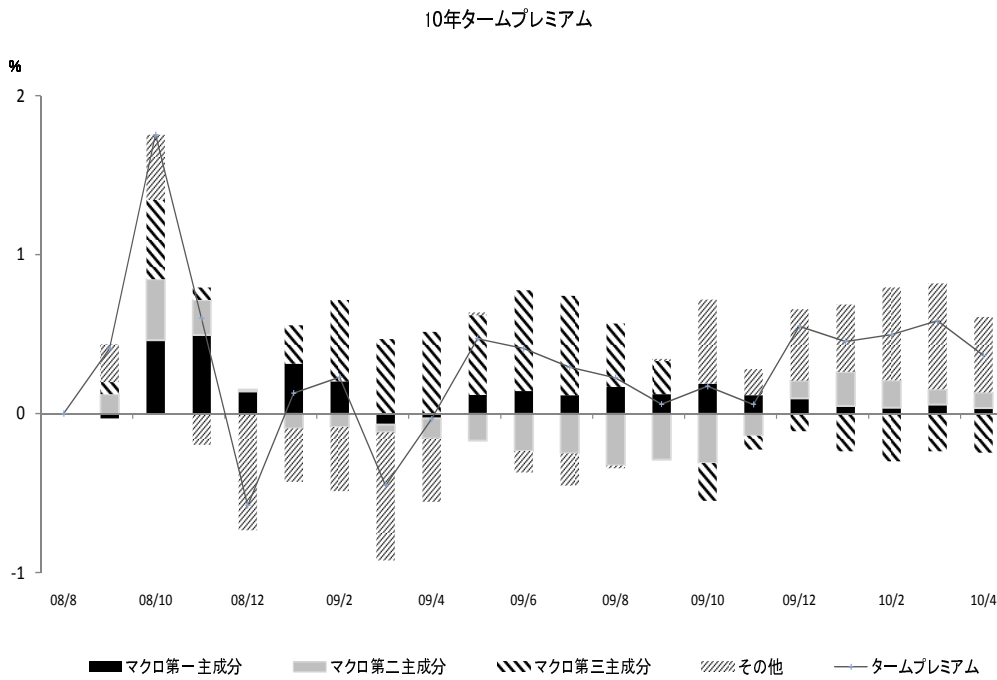
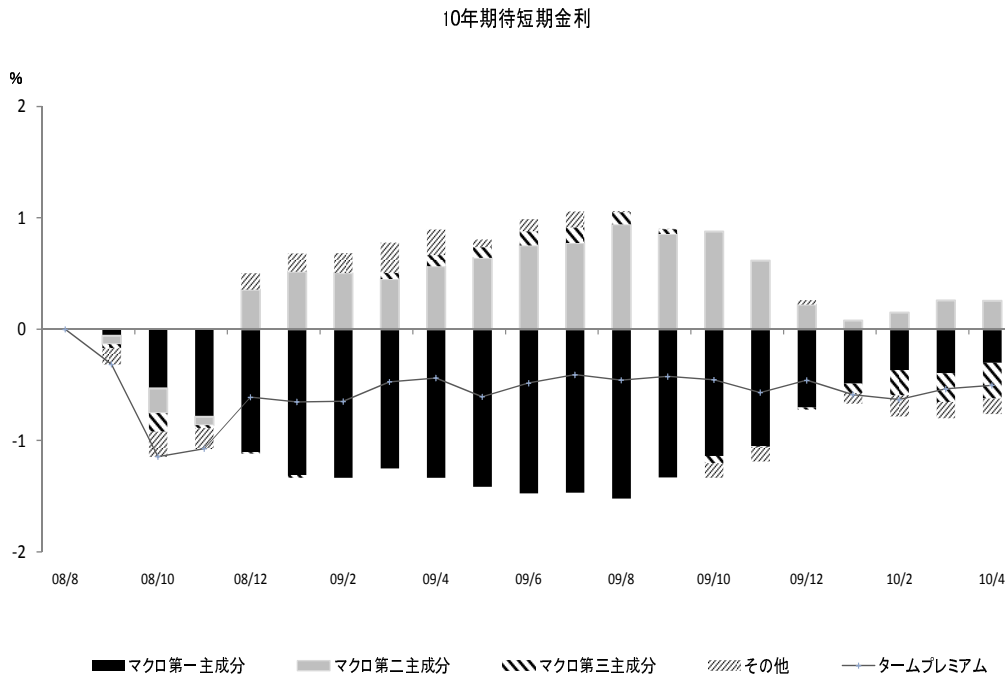
* 08年8月からの差分で表示している。

図 23: Conundrum (長期金利の謎) 期のマクロ経済変数分解



* 04年4月からの差分で表示している。

図 24: リーマンショック以降のマクロ経済変数分解 (米国)



* 08年8月からの差分で表示している。