



日本銀行ワーキングペーパーシリーズ

ゼロ金利下におけるタームプレミアムの推計： 日米英の長期金利の分析

一上 響*

hibiki.ichiue@boj.or.jp

上野 陽一**

youichi.ueno@boj.or.jp

No.13-J-6
2013年5月

日本銀行
〒103-8660 日本郵便（株）日本橋郵便局私書箱 30号

* 企画局

** 企画局

日本銀行ワーキングペーパーシリーズは、日本銀行員および外部研究者の研究成果をとりまとめたもので、内外の研究機関、研究者等の有識者から幅広くコメントを頂戴することを意図しています。ただし、論文の中で示された内容や意見は、日本銀行の公式見解を示すものではありません。

なお、ワーキングペーパーシリーズに対するご意見・ご質問や、掲載ファイルに関するお問い合わせは、執筆者までお寄せ下さい。

商用目的で転載・複製を行う場合は、予め日本銀行情報サービス局 (post.prd8@boj.or.jp) までご相談下さい。転載・複製を行う場合は、出所を明記して下さい。

ゼロ金利下におけるタームプレミアムの推計： 日米英の長期金利の分析*

一上響[†] 上野陽一[§]

2013年5月

【要旨】

本稿では、アフィン期間構造モデルと潜在金利モデルを、日米英の2013年3月までのデータを用いて推計した。推計結果はモデルによって大きく異なり、これは、ゼロ金利制約を考慮していないアフィンモデルにおいて、推計バイアスが生じているためと考えられる。10年物金利のタームプレミアムの推計結果をみると、モデル間の差異が約2%ポイントにまで拡大するケースもみられる。また、米英では、この差異がここ数年拡大している。アフィンモデルには、短期金利の長期的水準を過大推計する強い傾向がみられるが、このことがタームプレミアムを過小推計する方向に寄与しているものと考えられる。

キーワード：アフィン期間構造モデル、潜在金利モデル、ゼロ金利制約、タームプレミアム、金融政策

* 本稿の執筆にあたり、日本銀行のスタッフから有益なコメントを頂き、とくに菊池健太郎氏からは詳細なコメントを頂いた。記して感謝の意を表したい。ただし、本稿の内容と意見は筆者ら個人に属するものであり、日本銀行の公式見解を示すものではない。

[†] 日本銀行 (hibiki.ichiue@boj.or.jp)

[§] 日本銀行 (youichi.ueno@boj.or.jp)

「ガウスモデルの望ましくない点は、短期金利、および、あらゆる満期の債券金利が、将来のどの時点においても、正の確率でマイナスとなり得ることである。・・・それにもかかわらず、ガウスモデルは有用であり、頻繁に用いられている。これは、比較的扱いやすいことに加えて、あまり長期でなければ金利がマイナスとなる可能性が低いと考えられるためである。」 (Duffie, 2001, p.140)

1. はじめに

Duffie and Kan (1996) によって考案されたアフィン期間構造モデルは、ファイナンス関連の研究だけでなく、金融政策関連の研究においても、長期金利の分析のために広く用いられている。とくに、米連邦準備理事会 (FRB) やイングランド銀行 (BOE) などの多くの中央銀行がゼロ金利制約に直面し、資産買入を通じて長期金利の低下を促すようになって以降、金融政策関連の研究は、アフィンモデルへの依存度を高めるようになっている。

先行研究では、資産買入が長期金利を引き下げる政策波及経路として、ポートフォリオバランス経路とシグナリング経路の2つが主に指摘されている。ポートフォリオバランス経路は、中央銀行による債券買入のアナウンスが、市場参加者に長期債の供給量の減少を予想させることで、タームプレミアムを引き下げる経路である。一方、シグナリング経路は、債券買入のアナウンスが、市場参加者に将来の短期金利に関する情報を与えることで、予想短期金利成分（現在の短期金利および将来の予想短期金利の平均値）を引き下げる経路である。たとえば、債券買入のアナウンスは、中央銀行が悲観的な見方を有していることを示す可能性がある。その場合、市場参加者が将来の短期金利の予想を下方修正する結果、長期金利が低下することになる。こうした異なる波及経路を識別するためには、長期金利を予想短期金利成分とタームプレミアムに分解することが極めて重要となる。そして、多くの先行研究は、そうした目的のために、アフィンモデルを用

いている¹。

もっとも、短期金利がガウス過程に従う一般的なアフィンモデルには、マイナス金利を許容しており、ゼロ金利制約を考慮していないという重大な欠点がある²。アフィンモデルは、金利がゼロから大きく離れていれば、現実の一次近似として優れたものといえるかもしれない。しかし、こうした前提条件は、主要先進国ではもはや満たされなくなっている。皮肉なことに、金融政策に関する研究は、金利がゼロ近傍まで低下し、アフィンモデルの信頼性が弱まったまさにそのときに、アフィンモデルに対する依存度を高め始めたことになる。これについては、アフィンモデルの性質や推計方法が精力的に研究されてきた一方で、代替的なモデルについては限られた研究しかなされてこなかったことが一因となっているものと考えられる。また、有用な代替モデルが存在しないもとでは、アフィンモデルの結果に、ゼロ金利制約を無視することによってどれほどバイアスが生じて

¹ 多くの研究が、様々なアフィンモデルを用いて、米英の中央銀行による資産買入の効果や波及経路を分析している。米国についての先駆的な研究としては、Gagnon et al. (2011)がある。彼らは、2008～2009年の資産買入に関する8つのアナウンスのあと、10年債金利が合計で91bps低下したとのイベントスタディの結果を示した。一方、FRBのホームページで公表されている、Kim and Wright (2005)のアフィンモデルの推計を更新することで算出されたタームプレミアムは、同じイベント日に合計で71bps低下した。こうした結果に基づいて、Gagnon et al. (2011)は、資産買入は主にポートフォリオバランス効果を通じて長期金利を引き下げたと主張している。これに対し、D'Amico et al. (2012)は、D'Amico et al. (2010)のアフィンモデルに基づいて推計されたプレミアムを用いて回帰分析を行い、資産買入の波及経路を識別した。Bernanke (2013)も、D'Amico et al. (2010)のアフィンモデルを用いて推計したプレミアムを使い、FRBの政策も含めた長期金利の決定要因について議論した。アフィンモデルを用いてFRBの資産買入の効果や波及経路を分析したその他の研究としては、Bauer and Rudebusch (2011)、Hamilton and Wu (2012)、Li and Wei (2013)、Ihrig et al. (2012)などがある。この間、Joyce et al. (2011)は、Joyce et al. (2010)のアフィンモデルを用いて推計したタームプレミアムに基づき、英国の資産買入の波及経路を識別した。また、Christensen and Rudebusch (2012)は、アフィンモデルを用い、米英の資産買入の波及経路の違いを分析した。さらに、Bauer and Neely (2012)は、米英も含む6か国についてアフィンモデルを推計し、これらの国の長期金利に対して米国の資産買入が及ぼした影響の波及経路を分析した。

² Cox et al. (1985)など、短期金利が平方根過程に従うアフィンモデルでは、金利がマイナスとならないようになっている。もっとも、こうしたモデルは、ガウス型のアフィンモデルと異なり、あまり利用されていない。実際、脚注1で言及したすべての研究は、ガウス型モデルを用いている。この背景には、平方根過程を持つアフィンモデルが、短期金利の変動特性(Black 1995)や債券金利の分布(Kim and Singleton 2012)を再現できないと批判されていることもあると考えられる。こうした点を踏まえ、本稿でアフィンモデルと言及する場合は、ガウス型のことを指すこととする。

いるのか、分析することは困難である。このことが、アフィンモデルの問題に関する研究者の認識不足につながっている可能性もある。

ゼロ金利制約を考慮した期間構造モデルのうち、有望なものとしては、潜在金利モデルがある。一般に、潜在金利モデルでは、マイナスの値も取りうる潜在金利と呼ばれる変数が存在し、潜在金利が非負の場合は短期金利が潜在金利と一致し、そうでない場合は短期金利がゼロとなる。このモデルでは、実確率測度（P 測度）だけでなく、リスク中立測度（Q 測度）のもとでも短期金利が非負であるため、あらゆる満期の金利の非負性が保証される。また、潜在金利モデルでは、アフィンモデルとは異なり、ゼロ金利制約が粘着的となる。つまり、潜在金利のマイナス幅が拡大すると、ゼロ金利の予想期間が長期化するとともに、短期金利が長期間ゼロに維持されやすくなる。こうしたゼロ金利制約の粘着性は、主要先進国における最近の経験と合致している³。

Black (1995) が米国における 1930 年代の低金利環境を念頭に潜在金利モデルを考案したまさにそのころ、日本は低金利が長期にわたって継続する戦後初の事例となりつつあった。具体的には、日本銀行は、1995 年に公定歩合を 1.75% から 0.5% にまで引き下げた。その後、政策金利として位置づけられてきた翌日物の無担保コールレートは、概ね 0.0~0.5% の範囲で推移してきた。Ichiue and Ueno (2006, 2007, 2012)、Kim and Singleton (2012)、Christensen and Rudebusch (2013) は、この日本の低金利環境における金利データを、潜在金利モデルを用いて分析している⁴。これらのほかに、データの時系列面と横断面の双方の動きを同時に考慮し

³ Ahn et al. (2002) と Leippold and Wu (2003) によって提案された 2 次ガウスモデルや、Kikuchi (2012) によって考案された 2 次混合ガウスモデルも、金利の非負性を保証できる。もっとも、これらのモデルでは、ゼロ金利制約が粘着的ではなく反射的となる。つまり、短期金利がゼロに達した場合、すぐに上昇に転じると予想してしまう。一方、Koeda (2012) が用いたレジームスイッチ期間構造モデルでは、金利がマイナスとなる確率は完全にゼロではないものの、ゼロ金利制約は粘着的となる。

⁴ Christensen and Rudebusch (2013) は、Krippner (2012a) の擬似解析解を用いて、潜在金利モデルを推計した。この擬似解析解は、とくにマルチファクターモデルの計算負荷を削減するうえで有用とされている。もっとも、Krippner (2012b) が自身で指摘しているように、この解析解は、無裁定条件を満たしていないという問題がある。裁定機会の存在が実証結果に与える

たフル推計を、潜在金利モデルについて行った研究は、著者らの知る限り存在しない⁵。また、日本における 1995 年以降の低金利環境以外のデータを用いてフル推計を行った研究もみられない⁶。

本稿では、日米英のデータを用いて、潜在金利モデルのフル推計を行う。サンプル期間は 1990 年 1 月から 2013 年 3 月であり、金利が低い時期と高い時期の双方を含んでいる。上記のとおり、先行研究は、日本の低金利時のデータのみを分析対象としてきた。一方、今回のサンプル期間の選択は、低金利時の長期データを入手できない米英の実証結果と比較するうえで、適切なものと考えられる。本稿で用いる潜在金利モデルでは、先行研究と異なり、短期金利の下限がゼロではなく、小幅のプラスとなることも許容する。これは、多くの中央銀行が、政策金利を完全なゼロまでは引き下げなかったことを受けてのものである。また、本稿では、Ichiue and Ueno (2007) と Kim and Singleton (2012) に従い、2 ファクターモデルに焦点を当てる。これは、3 ファクター以上のモデルについては、計算負荷をはじめとした問題があるためである⁷。潜在金利モデルの推計結果は、アフィン

影響が定かでないことから、本稿ではこの解析解を使用しない。

⁵ 一般に、期間構造モデルは、ファクターの推移に関する動学モデル、ファクターと残存期間を独立変数、金利を従属変数とする関数、の 2 つから構成される。本稿では、de Jong (2000) に従って、前者をモデルの時系列面、後者を横断面と呼ぶ。こうした期間構造モデルの性質により、そのパラメーターは、ファクターの時系列変動とイールドカーブの形状の双方に影響を及ぼす。このため、データにおける時系列面と横断面の双方の変動を十分に考慮したフル推計でなければ、推計は非効率なものとなるが、多くの研究ではフル推計を行っていない。たとえば、Gorovoi and Linetsky (2004) は、1 ファクターの潜在金利モデルを、2002 年 2 月 3 日という一時点における日本のイールドカーブのデータだけを用いて推計した。また、Ueno et al. (2006) は、同じモデルを推計するのに、5 年間にわたる日次データを用いたものの、各日ごとのイールドカーブにフィットするように推計しており、金利データの時系列方向の動きは完全に無視した。このように、データの横断面だけを考慮した推計の結果は、Ichiue and Ueno (2006, 2012) で指摘しているように、推計バイアスが大きなものとなる。Krippner (2012b) は、非線形最少二乗法を用いて、パラメーターと彼の 1 ファクターモデルにおける唯一のファクターである潜在金利を同時に推計した。もっとも、これは、潜在金利の時系列過程に制約を課していないため、フル推計ではない。

⁶ Krippner (2012a) は、潜在金利モデルを用いて、米国の金利データを分析したが、フル推計は行っていない。

⁷ 短期金利がゼロに近い水準でほとんど変動しない場合は、ファクターを推計するために必要な情報のかなりの部分が失われることとなり、短期金利が高い水準にある場合と比べて、

モデルの結果と比較する。これにより、アフィンモデルが、ゼロ金利制約を無視することにより、長期金利の予想短期金利成分とタームプレミアムへの分解などにおいて、どのような推計バイアスを生じさせるのかを分析する。さらに、ゼロ金利制約の影響をみるため、米英については、2007年までのゼロ金利制約に直面する以前のサブサンプルも用いて、アフィンモデルを推計する。

推計結果によると、アフィンモデルと潜在金利モデルは、大きく異なる結果を示す。また、アフィンモデルは、10年物金利の予想短期金利成分をマイナスと推計するなど、しばしば非現実的な結果を示す。10年物のタームプレミアムをみると、推計結果のモデル間の差異が、約2%ポイントにまで拡大するケースもみられる。また、米英では、このかい離がここ数年拡大している。アフィンモデルには、短期金利の長期的水準を過大推計する強い傾向がみられ、このことがタームプレミアムを過小推計する方向に寄与しているものと考えられる。総じてみれば、全サンプルを用いてアフィンモデルを推計した場合、タームプレミアムは過小推計されることが多いが、米英について、ゼロ金利制約に直面する前のサブサンプルを用いると、この傾向は観測されなくなる。このことは、ゼロ金利環境下のデータを用いることが、アフィンモデルの推計バイアスにかなりの程度寄与していることを示している。

本稿の構成は以下のとおりである。第2節では、本稿で用いるアフィンモデルと潜在金利モデルを、それらの推計方法とともに説明する。続いて、第3節では、①推計誤差とパラメーター、②アフィンモデルの短期金利と潜在金利モデルの潜在金利、③期待短期金利成分とタームプレミアム、に関する結果を報告し、それ

適切と考えられるファクター数は少なくなる。実際、Christensen and Rudebusch's (2013)が日本のデータで分析した結果をみると、3ファクターモデルで推計した潜在金利は、6か月物金利のデータとほぼ完全に一致しており、2008年に日本銀行が政策金利を引き下げたあともプラスのままとなっている。プラスの潜在金利は、日本銀行が近い将来に利上げする可能性が高かったことを示しており、広く共有されてきた見方と大きく矛盾している。したがって、この結果からは、3ファクターの潜在金利モデルを用いると、データにオーバーフィットし、非現実的な推計結果が得られやすいことが示唆される。このことも、本稿が2ファクターモデルを採用する理由の一つである。

それぞれについて議論する。最後に、第4節は、結論である。

2. モデルと推計方法

ここでは、本稿で用いるアフィンモデルと潜在金利モデルを説明する。これらのモデルは、多くの共通点を持つ。まず、ファクターが従う確率過程とリスクの市場価格の定式化は、全く同じである。いずれのモデルでも、2つのファクターが、ガウス過程に従う。パラメーターの数も同じである。どちらのモデルも、Dai and Singleton (2000) が定義するところの最も制約の少ない (maximally flexible) モデルである。これらのモデルの本質的な違いは、ファクターによって直接的に変動させられる変数であり、アフィンモデルでは短期金利、潜在金利モデルでは潜在金利となっている。

データについては、1990年1月から2013年3月までの月末時点における政策金利とゼロクーポンレートを使用する。また、ゼロ金利制約がアフィンモデルの推計結果に与える影響を分析するため、米英については、2007年12月までのサブサンプルを用いたアフィンモデルの推計も行う。政策金利のデータは、モデル上の短期金利（残存期間ゼロの金利）に対応する観測値として使用する⁸。一方、ゼロクーポンレートは、日本については0.5、2、5、10年物、米英については1、2、5、10年物のデータを用いる⁹。図1は、これらのデータのうち、政策金利、2年物金利、10年物金利の推移を示している。この図をみると、金利データの性質が、日米英で異なることがわかる。すなわち、日本のイールドカーブは、ほとんどの時期で、ステイプなものとなっている。一方、米国では、イールドカーブの slope が大きく変動している。これに対し、英国のイールドカーブは、2008

⁸ 日本については、1995年3月までは公定歩合、その後は無担保コールレート翌日物を用いる。米国についてはフェデラルファンド金利の翌日物、英国については公定歩合 (Official Bank rate) を使用する。

⁹ 日本のゼロクーポンレートは、McCulloch (1990) が提案した方法により算出した。米国については、Gürkaynak et al. (2007) のデータを、FRB のホームページからダウンロードした。英国についても、BOE のホームページより得た。

～2009 に政策金利がゼロ近くに引き下げられるまでは、フラットな時期が多かった。このように金利データが異なる特性を持つことは、様々な状況においてモデルの性質を分析することを可能とするため、望ましいものである。

推計手法については、アフィンモデルではカルマンフィルターを用いる。一方、潜在金利モデルは、非線形なモデルであるため、Ichiue and Ueno (2006, 2007, 2012) と Kim and Singleton (2012) と同様、拡張カルマンフィルターを使用する。

以下では、アフィンモデルと潜在金利モデルのそれぞれについて、より詳細に説明する。

2. 1. アフィンモデル

短期金利は、下式のように、2 つのファクター $\mathbf{x}_t = (x_{1t}, x_{2t})'$ のアフィン関数で表わせるとする。

$$r_t = \rho + x_{1t} + x_{2t} \quad (1)$$

ファクターは、P 測度のもとで平均がゼロとなるように標準化する。その結果、 ρ は、短期金利の長期的水準（中立金利水準）を示すことになる。2 つのファクターは、下式のガウス過程に従うとする。

$$\begin{pmatrix} dx_{1t} \\ dx_{2t} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \kappa_{11}^P & 0 \\ \kappa_{21}^P & \kappa_{22}^P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 \\ 0 & \sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dB_{1t}^P \\ dB_{2t}^P \end{pmatrix} \quad (2)$$

ここで、 $\mathbf{B}_t^P = (B_{1t}^P, B_{2t}^P)'$ は、P 測度のもとでの 2 次元標準ブラウン運動である。リスクの市場価格 $\boldsymbol{\lambda}_t = (\lambda_{1t}, \lambda_{2t})'$ は、下式のように、ファクターのアフィン関数として表わせるとする。

$$\begin{pmatrix} \lambda_{1t} \\ \lambda_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{10} \\ \lambda_{20} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{pmatrix} \quad (3)$$

以上の(1)～(3)式はアフィンモデルの重要な構成要素であり、これらの式で用い

る ρ 、 κ_{11}^P 、 κ_{21}^P 、 κ_{22}^P 、 σ_{11} 、 σ_{22} 、 λ_{10} 、 λ_{20} 、 λ_{11} 、 λ_{21} 、 λ_{12} 、 λ_{22} の 12 のパラメーターが、このアフィンモデルが持つパラメーターのすべてである。また、(1)～(3)式は、下式のように、ベクトル形式に書き換えることができる。

$$r_t = \rho + \mathbf{1}'\mathbf{x}_t \quad (4)$$

$$d\mathbf{x}_t = -\mathbf{K}^P \mathbf{x}_t dt + \Sigma d\mathbf{B}_t^P \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_t = \boldsymbol{\lambda} + \Lambda \mathbf{x}_t \quad (6)$$

ここで、各種のベクトルと行列は、以下のように定義している。

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{K}^P = \begin{pmatrix} \kappa_{11}^P & 0 \\ \kappa_{21}^P & \kappa_{22}^P \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 \\ 0 & \sigma_{22} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_{10} \\ \lambda_{20} \end{pmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{pmatrix}$$

無裁定条件により、 T か月物のゼロクーポンレートは、 $T > 0$ の場合、下式のように表わすことができる。

$$y_{t,T}(\mathbf{x}_t) = -\frac{1}{T} \log \left(E_t^Q \left[\exp \left\{ -\int_t^{t+T} r_\tau d\tau \right\} \right] \right) \quad (7)$$

ここで、 $E_t^Q[\cdot]$ は、 Q 測度のもとでの条件付き期待オペレーターである。また、ファクターの確率過程(5)は、下式のように書き換えることができる。

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{K}^Q (\boldsymbol{\theta}^Q - \mathbf{x}_t) dt + \Sigma d\mathbf{B}_t^Q \quad (8)$$

ここでは、 $\mathbf{K}^Q \boldsymbol{\theta}^Q = -\Sigma \boldsymbol{\lambda}$ 、 $\mathbf{K}^Q = \mathbf{K}^P + \Sigma \Lambda$ 、 $d\mathbf{B}_t^Q = d\mathbf{B}_t^P + \boldsymbol{\lambda}_t dt$ と定義しており、 \mathbf{B}_t^Q は Q 測度のもとでの 2 次元標準ブラウン運動である。アフィンモデルでは、(7)式の解析解 (Duffie and Kan 1996) が知られており、 T か月物のゼロクーポンレートは、下式のように、ファクターのアフィン関数として表わすことができる。

$$y_{t,T}(\mathbf{x}_t) = a_T + \mathbf{b}_T' \mathbf{x}_t \quad (9)$$

ここで、 a_T と \mathbf{b}_T は、パラメーターと残存期間 T の関数である。したがって、パ

ラメーターとファクターが与えられれば、(9)式を使うことで、あらゆる残存期間の金利をモデルから算出することが可能である。なお、(9)式は、 $T = 0$ の場合にも適用可能であり、 $y_{t,0}(x_t) = r_t$ 、 $a_0 = \rho$ 、 $b_0 = \mathbf{1}$ とすることで、(4)式を包含することになる。

連続時間で定義された上記のアフィンモデルを、月次の金利データで推計するため、下式のように、(5)式と(8)式を離散化する。

$$x_t = \Phi^P x_{t-1} + \Gamma^P \varepsilon_t^P \quad (10)$$

$$x_t = (I - \Phi^Q)\theta^Q + \Phi^Q x_{t-1} + \Gamma^Q \varepsilon_t^Q \quad (11)$$

ここで、 Φ^P 、 Γ^P 、 Φ^Q 、 Γ^Q はパラメーターの関数であり、 ε_t^P と ε_t^Q はそれぞれP測度とQ測度のもとでi.i.d.の2次元標準正規分布に従う¹⁰。このうち(10)式は、カルマンフィルターの状態方程式となる。一方、観測方程式は、下式の通りである。

$$y_{t,T}^o = a_T + b_T' x_t + e_{t,T} \quad (12)$$

ここで、 $y_{t,T}^o$ は、残存期間 T か月の金利の観測値である。これに対し、右辺の第2項目までは、モデルから導出される同じ残存期間の金利である。そして、 $e_{t,T} \sim N(0, \delta_T^2)$ は、互いに独立な計測誤差である。推計に当たっては、(12)式を5つの異なる残存期間に対して用いる。具体的には、日本については $T = 0, 6, 24, 60, 120$ 、米英については $T = 0, 12, 24, 60, 120$ の場合の観測方程式を使用する。

推計は、de Jong (2000)と同様に、カルマンフィルターを用いた最尤法によって行う。その際、先行研究で議論されているように、小標本バイアスを緩和するため、(10)式と(11)式の定常性を仮定する。具体的には、 Φ^P と Φ^Q の固有値のモジュラスが1未満となるように、パラメーター空間に制約を課すこととする。

¹⁰ Γ^P と Γ^Q は、一般性を失うことなく、下三角行列と仮定する。

2.2. 潜在金利モデル

短期金利は、下式のように、潜在金利 s_t の関数として表わす。

$$r_t = \max(s_t, \underline{r}_t) \quad (13)$$

ここで、 \underline{r}_t は短期金利の下限である。先行研究では、この下限はゼロとされてきた。もっとも、多くの中央銀行は、政策金利を完全にゼロまで引き下げたわけではない。これは、極端に低い金利が、重要な金融市場や金融機関に悪影響を与える可能性を懸念してのことである。具体的には、利回りがゼロに近くなるにつれ、投資家やマーケットメーカーが市場から退出してしまうといった問題が考えられる。そうしたもとの、日本銀行と FRB は、超過準備（準備預金制度に基づく所要準備を超える当座預金等）に対して金利を支払う制度を導入することで、政策金利が極端に低い水準にまで落ち込むことを回避しようとしてきた。このように、中央銀行が厳密な意味でのゼロ金利政策を採用しなかったことは、市場参加者にとってサプライズであったとみられる。こうしたことから、本稿では、短期金利の下限は時変ながらも、その変化は事前には予測不可能であると仮定する。また、下限 \underline{r}_t は、推計するのではなくカリブレートする。具体的には、日米英の中央銀行が 2008～2009 年に政策金利を現在の水準近くまで引き下げる前まではゼロ、その後は主に政策金利の実績の平均値を用いることとする¹¹。

潜在金利は、アフィンモデルにおける短期金利と同様に、下式のような 2 つのファクターのアフィン関数で表わせるとする。

¹¹ 日本の短期金利の下限は、2009 年 1 月から 2012 年 12 月にかけては、当時の政策金利実績の平均である 0.09% とした。その後は、多くの市場参加者が、日本銀行が超過準備に支払う金利を近い将来に引き下げるものと確信的に予想するようになり、これが比較的短期の金利の低下をもたらした。そこで、2013 年 1 月以降は、短期金利の下限を 0.05% というより低い水準とした。これは、その前の 0.09% から、この間の 6 か月先 6 か月物のゼロクーポンワードレートの下げ幅を差し引いて算出したものである。米国については、2009 年 11 月以降、下限を政策金利実績の平均である 0.14% とした。一方、英国については、全期間にわたって、下限をゼロとした。英国では、ゼロクーポンレートが政策金利を下回ることが多く、たとえば、2013 年 3 月時点では、政策金利が 0.50% のもとでも、2 年物金利が 0.16% まで低下していた。こうしたことから、英国では、政策金利の実績が短期金利の下限の代理変数として、適切ではない可能性が高いと考えられる。

$$s_t = \rho + \mathbf{1}'\mathbf{x}_t \quad (14)$$

ファクター \mathbf{x}_t が従う確率過程とリスクの市場価格は、アフィンモデルと同じく、それぞれ(5)式と(6)式で表わす。P 測度のもとでファクターの平均をゼロに標準化していることなどから、 ρ は中立金利水準として解釈可能である。これは、 $\rho > r_t$ という自然な仮定のもとでは、潜在金利の長期的水準は、短期金利のそれと一致するためである。なお、この仮定は、後段で示されるように、今回行ったすべての推計で成立している。(13)式と(14)式から、短期金利は、下式のように表わすことができる。

$$y_{t,0}(\mathbf{x}_t) = \max(\rho + \mathbf{1}'\mathbf{x}_t, r_t) \quad (15)$$

無裁定条件により、残存期間 T のゼロクーポンレートは、アフィンモデルと同様、(7)式で表わされる。もっとも、潜在金利モデルは、(13)式の存在により非線形であるため、(7)式は解析解を持たない。また、(7)式を解くための数値計算は、非常に負荷が大きい。これは、期待オペレーターと積分の双方で、数値計算が必要なためである。そこで、本稿では、計算負荷を削減するため、ジェンセン項が極めて小さいと仮定する。ジェンセン項は残存期間とともに非線形的に上昇するため、この仮定は、30年物などの超長期の金利を分析する際には、大きな問題となる可能性がある。もっとも、日本のデータを用いた分析によれば、この仮定は、10年程度のより短い残存期間の場合、あまり問題にはならないと考えられる¹²。

ジェンセン項を無視すると、(7)式は下式のように書き換えることができる。

$$y_{t,T}(\mathbf{x}_t) = \frac{1}{T} \int_0^T E_t^Q[r_{t+\tau}] d\tau \quad (16)$$

このため、 $E_t^Q[r_{t+\tau}]$ の解析解が得られれば、数値計算が必要となるのは積分の部分だけとなり、計算負荷の削減につながる。Q 測度のもとでの潜在金利の条件付

¹² Ichiue and Ueno (2012) で用いた潜在金利モデルで、潜在金利の水準別にジェンセン項を算出したところ、10年物金利では 5bps ほどで安定しているとの結果が得られた。後述するように、アフィンモデルと潜在金利モデルによる 10年物のタームプレミアムの推計結果は、5bps を大きく上回ってかい離するため、この程度の推計誤差であれば、本稿の結論に影響を与えないと考えられる。

き分布は、ファクターがガウス過程に従い、潜在金利がファクターのアフィン関数で表されることから、下式のような正規分布となる。

$$s_{t+\tau|t}^0 \sim N(\mu_\tau(\mathbf{x}_t), \sigma_\tau^2) \quad (17)$$

ここで、条件付き平均 $\mu_\tau(\mathbf{x}_t)$ はファクター \mathbf{x}_t のアフィン関数となる一方、条件付き分散 σ_τ^2 はファクターには依存しない。短期金利の下限 \underline{r}_t が変化しないと予想されるもとでは、短期金利の条件付き分布は、打ち切り正規分布 (censored normal distribution) となる。したがって、短期金利の条件付き期待値は、下式のように計算できる。

$$E_t^Q[r_{t+\tau}] = \underline{r}_t + [\mu_\tau(\mathbf{x}_t) - \underline{r}_t][1 - \Phi(-v_\tau(\mathbf{x}_t))] + \sigma_\tau \phi(-v_\tau(\mathbf{x}_t)) \quad (18)$$

ここでは、 $v_\tau(\cdot) = [\mu_\tau(\cdot) - \underline{r}_t]/\sigma_\tau$ と定義している。また、 $\Phi(\cdot)$ と $\phi(\cdot)$ は、それぞれ標準正規累積分布関数と標準確率密度関数である。(18)式は、標準正規累積分布関数などに依存していることから、厳密な意味での解析解ではないが、計算負荷を削減するうえでは有用である。この擬似解析解を(16)式に適用すれば、任意のパラメーターとファクターに対し、あらゆる残存期間の金利を、比較的小さな計算負荷で算出することができる。

潜在金利モデルを推計するため、本稿では、拡張カルマンフィルターを用いる。このため、(15)式と(16)式について、線形最少二乗法を用いて計算される1か月前時点における1か月先のファクターの予測の周りで、条件付き線形近似を行う。この予測は、(10)式に基づいて、 $\mathbf{x}_{t|t-1} = \mathbf{\Phi}^P \mathbf{x}_{t-1}$ と計算できる。この条件付き線形近似により、政策金利に関する観測方程式は、下式のように表わすことができる。

$$y_{t,0}^o = \underline{r}_t + \mathbf{1}\{\rho + \mathbf{1}'\mathbf{x}_{t|t-1} \geq \underline{r}_{t-1}\} \cdot (\rho + \mathbf{1}'\mathbf{x}_t - \underline{r}_t) + e_{t,0} \quad (19)$$

ここで、 $\mathbf{1}\{\cdot\}$ は、括弧内の条件が満たされる場合に1、それ以外の場合に0をとる指示関数である。また、 $e_{t,0} \sim N(0, \delta_0^2)$ は計測誤差である。右辺の最初の2項は、条件付き線形近似が行われたモデルから算出される短期金利であり、1か月先の

短期金利の予測 $\rho + \mathbf{1}'\mathbf{x}_{t|t-1}$ がその下限 \underline{r}_{t-1} 以上であれば $\rho + \mathbf{1}'\mathbf{x}_t$ となり、そうでなければ \underline{r}_t となる。いずれにしても、右辺は \mathbf{x}_t の線形関数となる。

短期金利以外の観測方程式は、下式となる。

$$y_{t,T}^o = y_{t,T}(\mathbf{x}_{t|t-1}) + y'_{t,T}(\mathbf{x}_{t|t-1}) \cdot (\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{t|t-1}) + e_{t,T} \quad (20)$$

これまでと同様、 $e_{t,T} \sim N(0, \delta_T^2)$ は計測誤差である。右辺の第 2 項目までは、条件付き線形近似を行ったモデルから算出される金利である。第 2 項目にある 1 次微分は、(16)式と(18)式から下式のように導かれ、積分部分は数値計算によって求められる。

$$y'_{t,T}(\mathbf{x}_{t|t-1}) = \frac{1}{T} \int_0^T \mu'_\tau(\mathbf{x}_{t|t-1}) [1 - \Phi(-v_\tau(\mathbf{x}_{t|t-1})) + v_\tau(\mathbf{x}_{t|t-1})\phi(-v_\tau(\mathbf{x}_{t|t-1})) - \phi'(-v_\tau(\mathbf{x}_{t|t-1}))] d\tau \quad (21)$$

推計に当たっては、(20)式を 4 つの異なる残存期間について用いることとする。具体的には、日本では $T = 6, 24, 60, 120$ 、米英では $T = 12, 24, 60, 120$ の場合の観測方程式を使用する。

以上から、(10)式で表わされる 2 つの状態方程式と(19)式と(20)式で表わされる 5 つの観測方程式が得られた。推計に当たっては、Ichiue and Ueno (2007) に倣い、拡張カルマンフィルターを用いた擬似最尤法を使用する。また、アフィンモデルの場合と同様、ファクターが従う確率過程が、P 測度と Q 測度の双方のもとで定常となるように、パラメーター空間に制約を課すこととする。

3. 推計結果

本節では、推計結果を報告する。以下、第 3.1 節では、モデルのデータに対する適合性を確認したあと、パラメーターの推計結果を示す。第 3.2 節は、アフィンモデルから推計された短期金利、および、潜在金利モデルから推計された潜在金利に焦点を当てる。最後に、第 3.3 節では、予想短期金利成分とタームプレミ

アムの推計結果について議論する。

3.1. 適合性とパラメーター

まず、モデルのデータに対する適合性をみるため、推計誤差 $e_{t,T}$ の標準偏差について、表 1 でその推計結果を確認する。これによると、10 年物金利では潜在金利モデルの方がアフィンモデルよりも標準偏差が小さい一方、5 年物金利では反対の傾向がみられる。このように、適合性の結果だけでは、いずれのモデルが優れているか判別することはできない。

一方、パラメーターの推計結果をみると、現実的な結果を示すという点で、潜在金利モデルの方が優れていることがわかる。表 2 によると、両モデルの結果は、大きく異なっている¹³。また、結果がどのように異なるかは、データの性質——すなわち、国やサンプル期間——によって違う。もっとも、一貫してみられる傾向もあり、具体的には、アフィンモデルから得られる中立金利水準の推計値は、潜在金利モデルの推計値を常に上回っている。とくに、全サンプルを用いてアフィンモデルを推計すると、中立金利水準が非現実的なほど高くなる。たとえば、日本の中立金利水準は 6.13% と推計されているが、これは今回用いた 23 年強のサンプルにおける最大値の 6.00% を小幅ながら上回っている。また、米国については 7.40% との推計結果となったが、これも今回のサンプルうち初期の部分である 1991 年 1 月以来超過していない水準である。こうした結果は、アフィンモデルの推計において、①ゼロ金利制約を無視していることに伴う適合性の悪化が緩和されるように、中立金利水準の推計値が歪められること、②その際には、尤度関数がかえって低下しないように、中立金利水準の推計値が、過去の短期金利の変動範囲から大きくはかい離しないように決定されていること、を示唆している。米英について 2007 年までのサブサンプルを用いてアフィンモデルを推計した場

¹³ 表 2 では、Kim and Singleton (2012) と同様に、 λ_{11} 、 λ_{21} 、 λ_{12} 、 λ_{22} ではなく、 $\sigma_{11}\lambda_{11}$ 、 $\sigma_{22}\lambda_{21}$ 、 $\sigma_{11}\lambda_{12}$ 、 $\sigma_{22}\lambda_{22}$ を報告している。

合、こうした推計バイアスはかなり縮小するものの、引き続き潜在金利モデルよりも高い推計値が得られる。

アフィンモデルの推計バイアスの背景を詳細に把握することは、後述するように困難である。もっとも、中立金利水準の過大推計に関しては、いくつかの可能性を指摘することができる。一般に、潜在金利モデルでは、ゼロ金利制約に直面すると、潜在金利がマイナスと推計され、短期金利は当面上昇しないと予想される。一方、アフィンモデルでは、短期金利がゼロに近い値に推計され、すぐに上昇し始めると予想される。したがって、実質的にゼロ金利となった期間のサンプルを用いると、アフィンモデルの非現実的な予想により、短期金利の長期的水準が過大推計される可能性がある。これに対し、ゼロ金利となる前のサブサンプルを用いた場合は、ゼロ金利に陥る確率が過小評価されるという異なる理由により、中立金利水準が過大推計されるおそれがある¹⁴。

潜在金利モデルの推計結果によれば、日本の中立金利水準は、米英よりも低い。これについては、日本の成長トレンドに対する市場の悲観的な見方を反映している可能性がある。一方、その他のパラメーターは、総じてみて、日米英で比較的似た性質を示している。たとえば、すべてのパラメーターで符号は同じであるが、これはアフィンモデルの推計結果にはみられない特徴である。また、 λ_{10} をみると、潜在金利モデルでは、 $-0.0002 \sim 0.0000$ の狭い範囲内に推計されているが、アフィンモデルでは、全サンプルによる推計で $-0.0265 \sim 0.2469$ 、サブサンプルの場合で $-0.0060 \sim 0.3146$ と、非常に広い範囲でばらついている。この λ_{10} は最も明確な例ではあるが、他のパラメーターでも似たような傾向がみられる。このように、潜在金利モデルのパラメーターが、日米英の間である程度類似した性質を示していることは、イールドカーブの決定構造がこれらの国々で大きくは異なることを示唆している。これに対し、アフィンモデルのパラメーターが3か国の間で

¹⁴ この問題は、期間構造モデルだけのものではない。実際、Chung et al. (2012)は、様々なマクロモデルや統計モデルを分析し、ゼロ金利となる前のサンプルを用いると、ゼロ金利に陥る確率が過小評価されることを示している。

全く異なることは、推計値が歪められていることを反映している可能性がある。

3.2. アフィンモデルの短期金利と潜在金利モデルの潜在金利

図2は、アフィンモデルの短期金利と潜在金利モデルの潜在金利を示している。ここでのアフィンモデルの結果は、全サンプルを用いて推計したものである。図2では、ゼロ金利に近い期間に焦点を当てるため、日本では1995年以降、米英では2008年以降の結果を表示している。

日本の潜在金利は、日本銀行が2001～2006年に量的緩和を行っていた時期には、 $-1.5\sim 0.0\%$ の範囲で推移していた。この結果は、Kim and Singleton (2012)が同様のモデルから得た結果と非常に近いものとなっている。潜在金利は2006年3月の量的緩和解除のころにプラスに転じたが、世界的な金融危機の深刻化を受けて日本銀行が政策金利を引き下げ始めたあとに再びマイナスとなり、最近では -0.5% 程度で推移している。

米英では、近年、潜在金利が -2% を下回る水準にまで達しており、日本よりもマイナス幅が大きい。もっとも、この結果は、日本においてゼロ金利の予想期間が短いことを示唆するわけでは必ずしもない。これは、ゼロ金利の予想期間が、潜在金利だけではなく、パラメーターなどの他の要素にも依存するためである。たとえば、表2で示されたように、中立金利水準は、米英よりも日本の方が低い。他の条件が一定であれば、中立金利水準が低いほど、これに潜在金利が収束するペースは遅くなる。こうしたことから、日本では、ゼロ金利が長期にわたって継続するとの予想と整合的となるために、潜在金利が大きくマイナスとなる必要はなかったものと考えられる¹⁵。

¹⁵ ゼロ金利の予想期間は、潜在金利の低下に対し、それぞれのファクターがどの程度寄与したかにも依存する。マルチファクターの潜在金利モデルにおいては、潜在金利のマイナス幅が、ゼロ金利の予想期間と必ずしも対応しない点については、Ichiue and Ueno (2007)も指摘している。

潜在金利とは異なり、アフィンモデルによって推計された短期金利は、大きなマイナスとはならないが、しばしば小幅のマイナスとなる。マイナスの短期金利は明らかに非現実的であり、比較的短期の金利における計測誤差を拡大させている。もっとも、マイナスの短期金利は、5年物といった比較的長期の金利の計測誤差を縮小するために必要であったと考えられる。すなわち、当面ゼロ金利が継続すると市場が予想するもとでは、5年物などの金利は、非常に低い水準となることが多い。アフィンモデルでは、ゼロ金利が継続することを表現できず、短期金利がすぐに上昇し始めると予想されてしまうため、短期金利の推計値をマイナスにし、発射台を低くすることで、低くなった長期金利への適合性を高めようしているものとみられる。

3.3. 予想短期金利成分とタームプレミアム

図3は、10年物金利の予想短期金利成分の推計結果である¹⁶。この図でも、図2と同様、金利がゼロに近い期間に焦点を当てており、アフィンモデルの結果は全サンプルを用いて推計したものである。この図から、アフィンモデルは、予想短期金利成分を、日米では高く、英国では低く推計していることがわかる。このうち、日米の結果については、後述するように、中立金利水準が非現実的に高く推計されていることと関係しているものと考えられる。英国の結果も非現実的であり、10年物金利の予想短期金利成分が、2011年9月以降マイナスに推計されている。図2をみると、この期間の短期金利はプラスと推計されていることから、アフィンモデルは、短期金利が先行き10年間の平均でマイナスにまで低下していくことを予想していることになる。こうした非現実的な予想が得られるのは、パラメーターの推計が歪んでいるためと考えられる。

続いて、図4では、タームプレミアムの推計バイアスについて分析する。左の

¹⁶ 5年先5年物のフォワードレートについても予想短期金利とタームプレミアムへの分解を行ったところ、定性的には同様の結果が得られた。なお、定量的には、10年物金利の場合と比べ、モデル間の違いが大きくなる傾向がある。

3つのパネルは、10年物金利の観測値から予想短期金利成分を差し引くことで算出したタームプレミアムである。ここでは、図2、3とは異なり、1990年1月以降の全期間について結果を表示している。また、米英については、2007年までのサブサンプルを用いて推計したアフィンモデルの結果も示している。一方、右側のパネルは、アフィンモデルの結果から潜在金利モデルの結果を差し引いて算出した、アフィンモデルの推計バイアスである。これによると、推計バイアスは、約2%ポイントにまで拡大するケースもみられる。タームプレミアムの算出方法から明らかなように、タームプレミアムの推計誤差は、予想短期金利成分の推計誤差と対照的な関係にある。実際、金利がゼロに近い期間では、アフィンモデルが日米のタームプレミアムを過小推計する一方、英国のタームプレミアムを過大推計しており、予想短期金利成分の結果と対照的なことが確認できる。また、詳細にみると、米英では推計バイアスがここ数年拡大している。一方、ゼロ金利となる前の期間をみると、全サンプルを用いて推計した場合、アフィンモデルは、少なくとも日米については、タームプレミアムを過小推計する傾向がある。英国については、2000年代はプレミアムを過大推計しているが、1990年代については大きく過小推計している。このように、全サンプルを用いてアフィンモデルを推計した場合は、総じてみれば、タームプレミアムは過小推計されることが多い。もっとも、米英について、ゼロ金利制約に直面する以前のサブサンプルを用いてアフィンモデルを推計すると、この傾向は観測されなくなる。

予想短期金利成分とタームプレミアムの推計誤差について、その背景を特定することは容易ではない。これは、アフィンモデルに本来備わる問題を補うためにパラメーターとファクターの推計値が歪む結果、新たな問題が引き起こされるためである。パラメーターやファクターの推計値が歪んでいなくとも、アフィンモデルによる将来の短期金利の予測は、次の2つの理由により、P測度とQ測度の双方でバイアスを持つ。一つ目の理由は、アフィンモデルがマイナスの短期金利を正の確率で予測することである。このことにより、アフィンモデルは、予想短期金利成分を過小推計することになる。もう一つの理由は、ゼロ金利制約に直面

するもとでも、短期金利がすぐに上昇を始めると予想してしまうことによるバイアスである。これは、アフィンモデルが予想短期金利成分を過大推計する要因となる。これら逆方向のバイアスの相対的な大きさは、パラメーターやファクターの値に依存する。P 測度のもとでの短期金利予想のバイアスは、長期金利の予想短期金利成分とタームプレミアムへの分解を歪ませることになる。一方、Q 測度のもとでのバイアスは、モデルから得られる長期金利水準の結果を歪ませる。こうしたアフィンモデルに本来備わる問題から生じる計測誤差を縮小させるために、パラメーターとファクターの推計値も歪み、これがまたタームプレミアムなどの推計結果にバイアスをもたらす。アフィンモデルの推計バイアスの性質が、国やサンプル期間によって異なることは、アフィンモデル本来の問題と、パラメーターとファクターの推計バイアスが、互いにどのように影響を及ぼしあうかは、データの性質次第であることを示唆している。

このように、アフィンモデルの推計結果にバイアスが生じる背景は複雑であるが、本稿では、一つの頑健な結果が得られている。それは、3.1 節で議論したように、アフィンモデルが中立金利水準を過大推計することである。このことは、アフィンモデルがタームプレミアムを過小推計するケースが多いことと関係していると考えられる。この点は、タームプレミアムの過小推計と中立金利水準の過大推計の双方が、ゼロ金利となる前のサブサンプルを用いた場合、観測されにくくなることと整合的である。

4. 結論

Ichiue and Ueno (2006, 2007, 2012) などのいくつかの先行研究では、時系列面と横断面の双方のデータ変動を勘案し、日本の 1995 年以降の低金利環境における金利データを用いて、潜在金利モデルを推計してきた。一方、本稿では、日本だけでなく米英のデータも用いたほか、日本についても 1990 年以降の金利水準が高い時期を含むデータを使用して、潜在金利モデルを推計した。また、潜在金利

モデルの結果をアフィンモデルのそれと比較することにより、ゼロ金利制約を無視することが、アフィンモデルの推計結果をどのように歪ませているのかを分析した。

今回の分析からは、アフィンモデルと潜在金利モデルが、大きく異なる結果を示すことがわかった。アフィンモデルは、10年物金利の予想短期金利成分をマイナスと推計するなど、しばしば非現実的な結果を示す。10年物のタームプレミアムをみると、推計結果のモデル間の差異が、約2%ポイントにまで拡大するケースもみられる。また、米英では、このかい離がここ数年拡大している。アフィンモデルには、中立金利水準を過大推計する強い傾向がみられ、このことがタームプレミアムを過小推計する方向に寄与しているものと考えられる。総じてみれば、全サンプルを用いてアフィンモデルを推計した場合、タームプレミアムは過小推計されることが多いが、米英について、ゼロ金利制約に直面する前の2007年までのサブサンプルを用いると、この傾向は観測されなくなる。このことは、ゼロ金利環境下のデータを用いることが、アフィンモデルの推計バイアスにかなりの程度寄与していることを示している。

今回分析した日米英のすべての国において、中央銀行はゼロに近い政策金利を4年以上も続けている。また、こうした金利がゼロに近い状況は、今後数年は継続することが予想されている。さらに、中央銀行が政策金利を引き上げ始めても、実証分析にあたって十分なサンプル数を確保するためには、ゼロ金利に近い時期の時系列データを使用していく必要がある。したがって、おそらく今後10年は、ゼロ金利に関する研究の重要性の高い状況が続くものと考えられる。そうした中、ゼロ金利制約を勘案した期間構造モデルを一段と発展させていくとともに、ゼロ金利制約を考慮しないモデルを用いて行われたこれまでの研究を再検討していくことも、重要な課題である。今後の研究の具体例としては、D'Amico et al. (2010) がアフィンモデルを用いて行ったように、物価連動債のデータも用いて潜在金利モデルを推計し、市場参加者の予想インフレ率を抽出することなどが考えられる。

参考文献

- Ahn, D., R. F. Dittmar, and A. R. Gallant (2002), “Quadratic Term Structure Models: Theory and Evidence,” *Review of Financial Studies* 15, 243-288.
- Bauer, M. D. and C. J. Neely (2012), “International Channels of the Fed’s Unconventional Monetary Policy,” Federal Reserve Bank of San Francisco Working Paper Series 2012-12.
- Bauer, M. D. and G. D. Rudebusch (2011), “The Signaling Channel for Federal Reserve Bond Purchases,” Federal Reserve Bank of San Francisco Working Paper Series 2011-21.
- Bernanke, B. (2013), “Long-term Interest Rates,” Remarks at the Annual Monetary/Macroeconomic Conference: The Past and Future of Monetary Policy Sponsored by Federal Reserve Bank of San Francisco, San Francisco, California, March 1, 2013.
- Black, F. (1995), “Interest Rates as Options,” *Journal of Finance* 50, 1371-1376.
- Christensen, J. H. E. and G. D. Rudebusch (2012), “The Response of Interest Rates to U.S. and U.K. Quantitative Easing,” *Economic Journal* 122, 385-414.
- Christensen, J. H. E. and G. D. Rudebusch (2013), “Estimating Shadow-Rate Term Structure Models with Near-Zero Yields,” Federal Reserve Bank of San Francisco Working Paper Series 2013-07.
- Chung, H., J.-P. Laforte, D. Reifschneider, and J. C. Williams (2012), “Have We Underestimated the Likelihood and Severity of Zero Lower Bound Events?” *Journal of Money, Credit and Banking* 44, 47-82.
- Cox, J., J. Ingersoll, and S. Ross (1985), “A Theory of the Term Structure of Interest Rates,” *Econometrica* 53, 385-407.
- Dai, Q. and K. J. Singleton (2000), “Specification Analysis of Affine Term Structure Models,” *Journal of Finance* 55, 1943-1978.
- D’Amico, S., W. English, D. Lopez-Salido, and E. Nelson (2012), “The Federal Reserve’s Large-scale Asset Purchase Programmes: Rationale and Effects,” *Economic Journal* 122, 415-446.
- D’Amico, S., D. H. Kim, and M. Wei (2010), “Tips from TIPS: The Informational Content of Treasury Inflation Protected Security Prices,” Federal Reserve Board Finance and Economics Discussion Series 2010-19.
- de Jong, F. (2000), “Time Series and Cross-section Information in Affine Term-Structure Models,” *Journal of Business & Economic Statistics* 18, 300-314.
- Duffie, D. (2001), *Dynamic Asset Pricing Theory*, third edition, Princeton University Press.

- Duffie, D. and R. Kan (1996), "A Yield-factor Model of Interest Rates," *Mathematical Finance* 6, 379-406.
- Gagnon, J., M. Raskin, J. Remache, and B. Sack (2011), "The Financial Market Effects of the Federal Reserve's Large-Scale Asset Purchases," *International Journal of Central Banking* 7, 3-43.
- Gorovoi, V. and V. Linetsky (2004), "Black's Model of Interest Rates as Options, Eigenfunction Expansions and Japanese Interest Rates," *Mathematical Finance* 14, 49-78.
- Gürkaynak, R. S., B. Sack, and J. Wright (2007), "The U.S. Treasury Yield Curve: 1961 to the Present," *Journal of Monetary Economics* 54, 2291-2304.
- Hamilton, J. D. and J. C. Wu (2012), "The Effectiveness of Alternative Monetary Policy Tools in a Zero Lower Bound Environment," *Journal of Money, Credit and Banking* 44, 3-46.
- Ichiue, H. and Y. Ueno (2006), "Monetary Policy and the Yield Curve at Zero Interest: The Macro-finance Model of Interest Rates as Options," Bank of Japan Working Paper Series 06-E-14.
- Ichiue, H. and Y. Ueno (2007), "Equilibrium Interest Rate and the Yield Curve in a Low Interest Rate Environment," Bank of Japan Working Paper Series 07-E-18.
- Ichiue, H. and Y. Ueno (2012), "Monetary Policy and the Yield Curve at Zero Interest," mimeo.
- Ihrig, J., E. Klee, C. Li, B. Schulte, and M. Wei (2012), "Expectations about the Federal Reserve's Balance Sheet and the Term Structure of Interest Rates," Federal Reserve Board Finance and Economics Discussion Series 2012-57.
- Joyce, M., P. Lildholdt, and S. Sorensen (2010), "Extracting Inflation Expectations and Inflation Risk Premia from the Term Structure: A Joint Model of the UK Nominal and Real Yield Curves," *Journal of Banking and Finance* 34, 281-294.
- Joyce, M., M. Tong, and R. Woods (2011), "The United Kingdom's Quantitative Easing Policy: Design, Operation and Impact," Bank of England Quarterly Bulletin, 2011, 3rd Quarter, 200-212.
- Kikuchi, K. (2012), "Design and Estimation of a Quadratic Term Structure Model with a Mixture of Normal Distributions," Bank of Japan IMES Discussion Paper Series 2012-E-8.
- Kim, D. H. and K. J. Singleton (2012), "Term Structure Models and the Zero Bound: An Empirical Investigation of Japanese Yields," *Journal of Econometrics* 170, 32-49.
- Kim, D. H. and J. H. Wright (2005), "An Arbitrage-free Three-factor Term Structure Model and the Recent Behavior of Long-term Yields and Distant-horizon Forward Rates," Federal Reserve Board Finance and Economics Discussion Series 2005-33.

Koeda, J. (2012), "Endogenous Monetary Policy Shifts and the Term Structure: Evidence from Japanese Government Bond Yields," CARF Working Paper CARF-F-303.

Krippner, L. (2012a), "Modifying Gaussian Term Structure Models when Interest Rates Are near the Zero Lower Bound," Reserve Bank of New Zealand Discussion Paper 2012/02.

Krippner, L. (2012b), "Measuring the Stance of Monetary Policy in Zero Lower Bound Environments," Reserve Bank of New Zealand Discussion Paper 2012/04.

Leippold, M. and L. Wu (2003), "Design and Estimation of Quadratic Term Structure Models," *European Financial Review* 7, 47-73.

Li, C. and M. Wei (2013), "Term Structure Modelling with Supply Factors and the Federal Reserve's Large-scale Asset Purchase Programs," *International Journal of Central Banking* 9, 3-44.

McCulloch, R. (1990), "U.S. Government Term Structure Data, 1947-1987," in B. M. Friedman and F. Hahn, eds., *Handbook of Monetary Economics*, North Holland I, 672-715.

Ueno, Y., N. Baba, and Y. Sakurai (2006), "The Use of the Black Model of Interest Rates as Options for Monitoring the JGB Market Expectations," Bank of Japan Working Paper Series 06-E-15.

表 1: 推計誤差 $e_{t,T}$ の標準偏差の推計値 (bps)

	日本		米国			英国		
	潜在 -2012	アフィン -2012	潜在 -2012	アフィン -2012	アフィン -2007	潜在 -2012	アフィン -2012	アフィン -2007
政策金利	44	45	67	66	70	90	70	75
0.5 年	1	0	13	15	13	22	0	0
2 年	11	10	0	0	0	2	14	12
5 年	15	4	4	0	0	5	0	0
10 年	8	21	11	12	10	24	33	26

注: 「0.5 年」では、米英については、1 年物金利の結果を報告している。

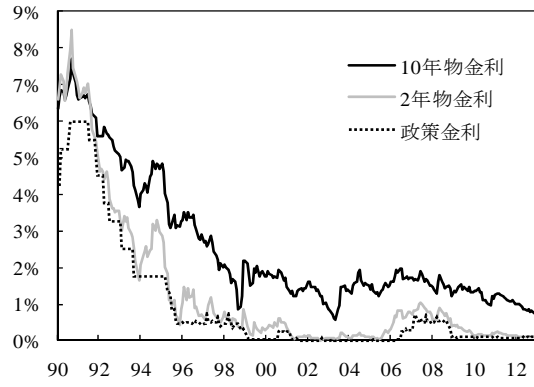
表 2: パラメーターの推計結果

	日本		米国			英国		
	潜在 -2012	アフィン -2012	潜在 -2012	アフィン -2012	アフィン -2007	潜在 -2012	アフィン -2012	アフィン -2007
ρ	0.0266	0.0622	0.0566	0.0741	0.0602	0.0305	0.0906	0.0511
κ_{11}^P	0.0358	0.1397	0.0764	0.1029	0.1123	0.0388	0.3080	0.0501
κ_{21}^P	-0.0173	-0.0204	-0.0024	-0.0444	-0.1047	-0.0061	0.5318	-0.1783
κ_{22}^P	0.0576	0.0215	0.0168	0.1718	0.2118	0.0141	0.0154	0.1262
σ_{11}	0.0081	0.0042	0.0106	0.0088	0.0067	0.0143	0.0051	0.0095
σ_{22}	0.0036	0.0047	0.0061	0.0068	0.0080	0.0075	0.0114	0.0099
λ_{10}	-0.0002	0.0001	0.0000	0.2469	0.3146	-0.0002	-0.0265	-0.0060
λ_{20}	-0.0008	0.0001	-0.0001	0.0230	0.0061	-0.0004	0.0087	-0.0518
$\sigma_{11}\lambda_{11}$	0.2481	0.2699	0.4888	0.3059	0.3260	0.4661	0.0522	0.6268
$\sigma_{22}\lambda_{21}$	0.3775	0.2872	0.6371	0.1820	0.4010	0.4676	0.7801	0.6478
$\sigma_{11}\lambda_{12}$	-0.1279	-0.2465	-0.2428	-0.3750	-0.1813	-0.1037	0.0193	-0.0020
$\sigma_{22}\lambda_{22}$	-0.2030	-0.1248	-0.2519	-0.2173	-0.2691	-0.0948	0.1296	-0.1276
Max(eig(Φ^P))	0.9970	0.9982	0.9986	0.9915	0.9907	0.9988	0.9987	0.9958
Max(eig(Φ^Q))	0.9943	0.9873	0.9927	0.9850	0.9915	0.9985	0.9950	1.0000

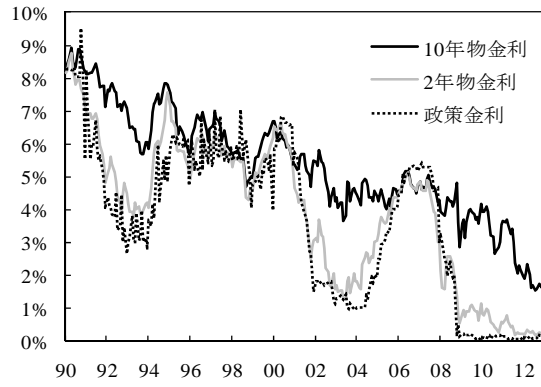
注：最後の 2 行は、 Φ^P と Φ^Q の固有値のモジュラスのうち最大のものである。

図 1: 金利データ

日本



米国



英国

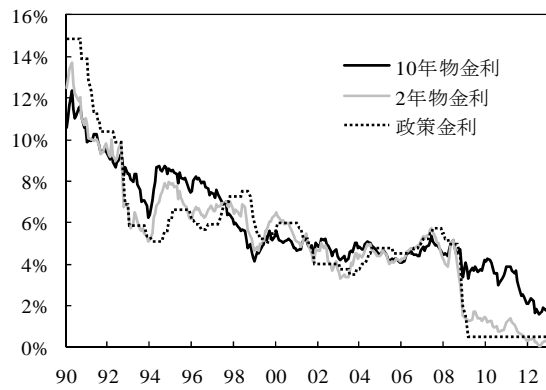
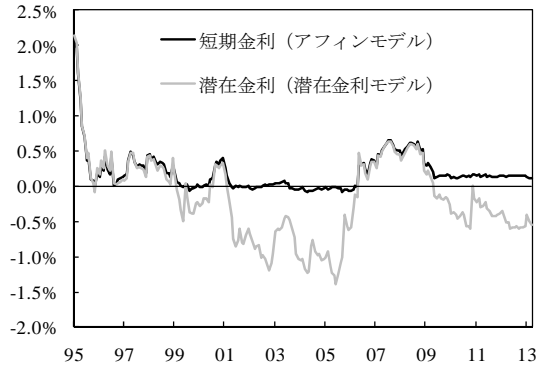
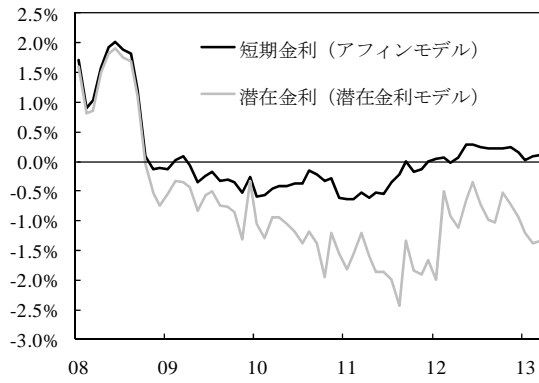


図 2: アフィンモデルの短期金利と潜在金利モデルの潜在金利

日本



米国



英国

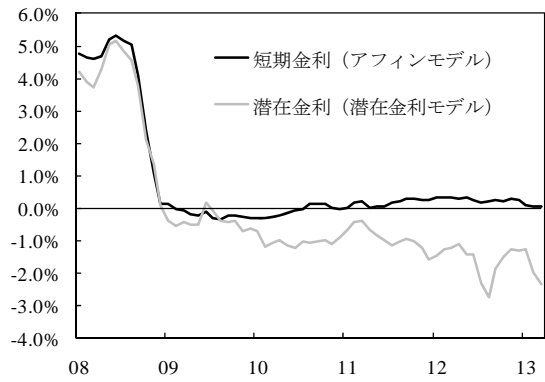


図 3: 10 年物金利の予想短期金利成分

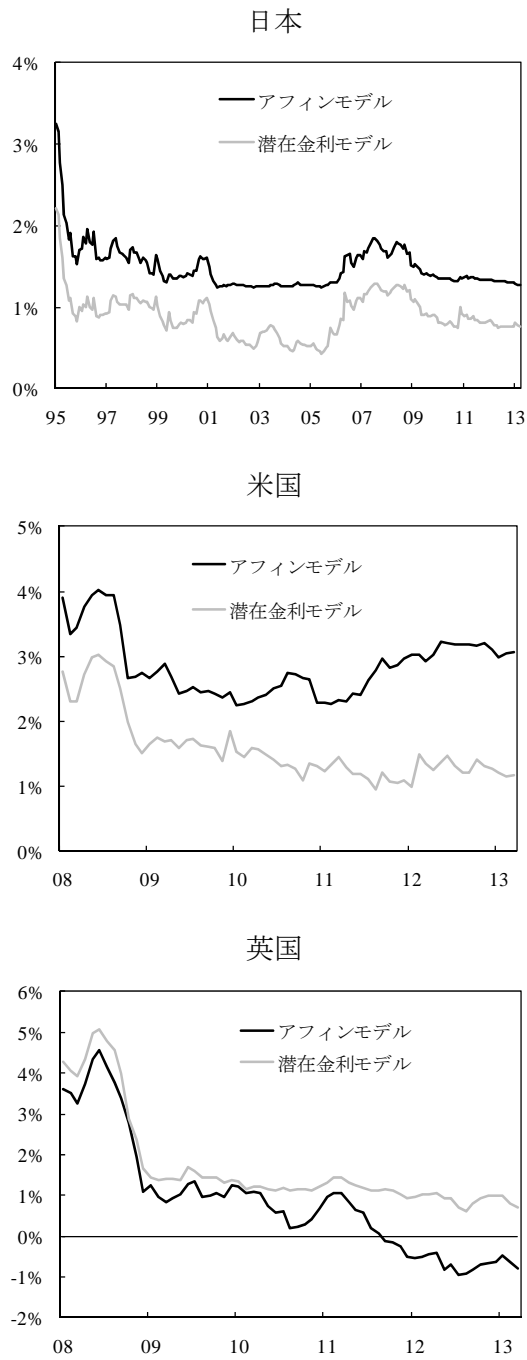
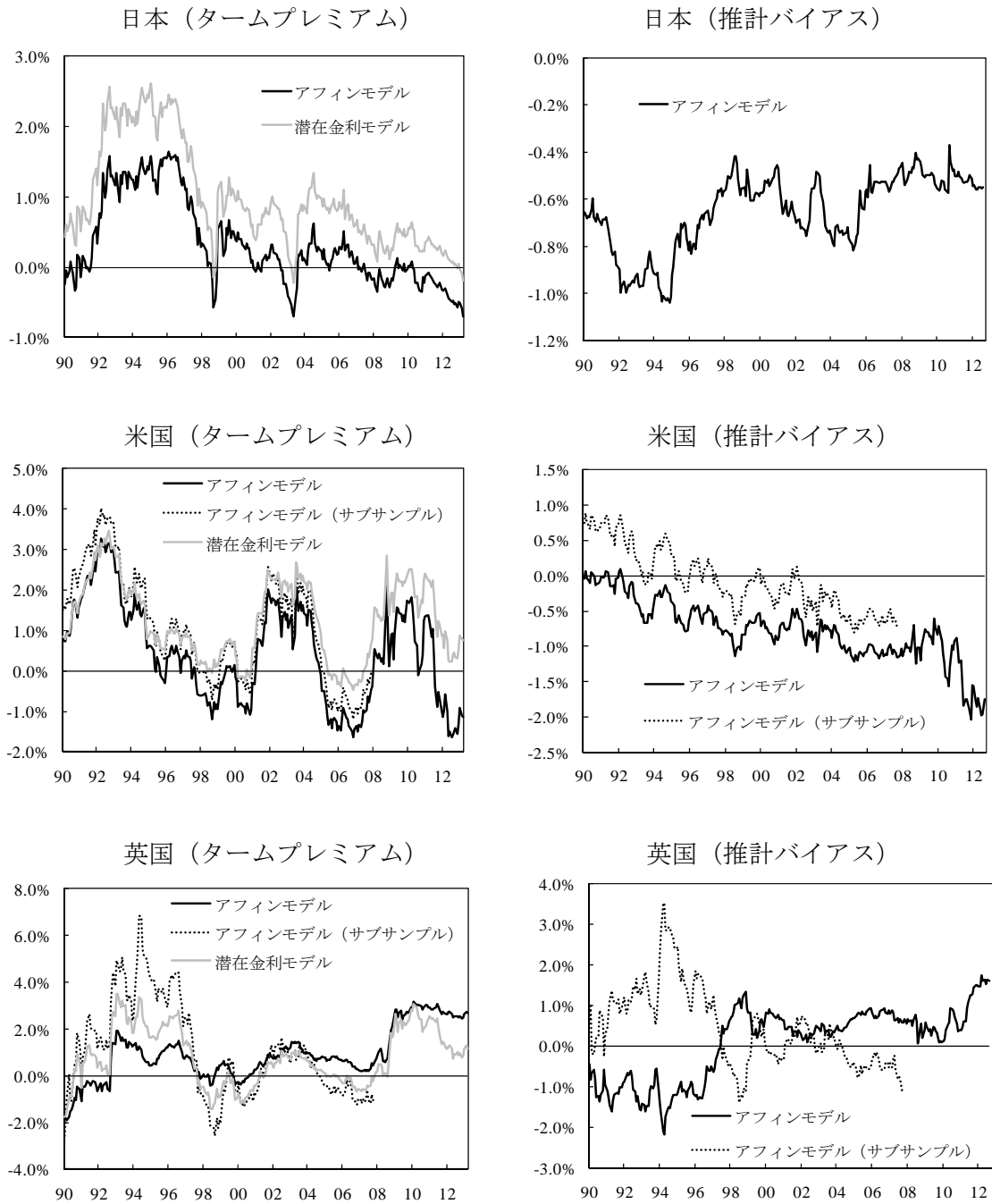


図 4: 10 年物金利のタームプレミアムとアフィンモデルの推計バイアス



注：右側のパネルは、アフィンモデルによって推計されたタームプレミアムの推計バイアスであり、アフィンモデルの推計値から潜在金利モデルの推計値を差し引いて算出している。