



日本銀行ワーキングペーパーシリーズ

イールドカーブ・コントロールに関する 特定期間選好仮説にもとづく考察

上野陽一*

小枝淳子**

jkoeda@waseda.jp

No.22-J-13
2022年8月

日本銀行
〒103-8660 日本郵便（株）日本橋郵便局私書箱 30号

* 企画局（現・総務人事局）

**早稲田大学

日本銀行ワーキングペーパーシリーズは、日本銀行員および外部研究者の研究成果をとりまとめたもので、内外の研究機関、研究者等の有識者から幅広くコメントを頂戴することを意図しています。ただし、論文の中で示された内容や意見は、日本銀行の公式見解を示すものではありません。

なお、ワーキングペーパーシリーズに対するご意見・ご質問や、掲載ファイルに関するお問い合わせは、執筆者までお寄せ下さい。

商用目的で転載・複製を行う場合は、予め日本銀行情報サービス局 (post.prd8@boj.or.jp)までご相談下さい。転載・複製を行う場合は、出所を明記して下さい。

イールドカーブ・コントロールに関する

特定期間選好仮説にもとづく考察*

上野 陽一[†]

小枝 淳子[‡]

要旨

本稿では、Vayanos and Vila (2021) による標準的な特定期間選好仮説にもとづく金利の期間構造モデルを、イールドカーブ・コントロール (YCC) が分析可能となるよう拡張する。具体的には、中央銀行が特定年限の国債を選好し、その年限の国債需要の価格弾力性が目標年限の利回りに依存することをモデルに組み込む。本モデルでは、中央銀行が実施する YCC の厳格度合いは、その価格弾力性によって捉えられる。本モデルをわが国にカリブレートした分析にもとづく、十分に厳格な YCC は、国債買入れが限定的でも、利回り水準を目標範囲内に維持できるほか、短期金利の変化が国債利回りに与える影響を軽減させる。YCC が実施されていない場合には、名目金利の実効下限制約の影響が弱まるのに伴い、国債需給の国債利回りへの影響はその制約による影響が小さい場合の通常の水準に回帰していく。

JEL 分類番号： E43, E52, E58, G12

キーワード：金融政策、イールドカーブ・コントロール、特定期間選好仮説

* 本稿の作成にあたり、植田和男氏および日本銀行スタッフから有益なコメントを頂戴した。ただし、本稿のありうべき誤りは全て筆者ら個人に属する。なお、本稿に示される内容や意見は、筆者ら個人に属するものであり、日本銀行及び企画局の公式見解を示すものではない。

[†] 日本銀行企画局 (現・総務人事局)

[‡] 早稲田大学 (e-mail: jkoeda@waseda.jp)

1. はじめに

イールドカーブ・コントロール (YCC) は、特定年限の国債利回りに目標水準を設定する、あるいは上限を設ける政策であり、これまで複数の中央銀行により実施に移されてきた¹。一方で、それが金利形成に及ぼすメカニズムの解明など YCC に関する研究は限定的なものにとどまっている。こうした問題意識から、本稿では、2016年9月以降、YCC が実施されているわが国のデータを用いて、YCC のメカニズムを分析している。分析の結果、そのメカニズムについての理解が深まれば、YCC の有効性や日本銀行による YCC の運営を巡る各種の政策対応がイールドカーブに与える影響を検証する際にも有益と考えられる。

様々な経済理論の中で、YCC のメカニズムを明らかにするためのツールとして有力な候補となり得るのは、残存年限別の国債需給の動向と各年限の利回りとを明示的に関連づける特定期間選好仮説である。特定期間選好仮説は、最近、Vayanos and Vila (2021、以下 VV) により、明示的に資産価格理論に導入されている²。この VV による分析枠組みにおいて、中央銀行を、特定年限の国債を選好し、その国債需要が価格弾力的な投資家としてみなすと、この価格弾力性は中央銀行が実施する YCC の厳格度合いとも捉えることができる。さらに、この価格弾力性は目標年限の利回り水準にも依存し得る。

本稿では、VV による金利の期間構造モデルを拡張し、中央銀行の国債需要の価格弾力性が目標年限の利回りに依存する、すなわち目標年限の利回りがその上限に近づく、あるいは超える場合には国債買入れ額を大幅に増加させるという定式化のもと、YCC を考察する³。VV では、線形性の仮定をおいて定式化しているが、本稿で拡張したモデルでは、国債利回りはイールドカーブの決定要因との関係が非線形となる。本稿ではこの拡張モデルをわが国にカリブレートするため、YCC がわが国で実施される以前のデータを用いて、YCC に直接関係しないパラメーターを推計している。そのうえで、YCC の国債利回りへの影響を分析するため、わが国のデータにもとづくそれらのパラメーターの値を用いつつ、国債需要の価格弾力性が目標年限の利回りに依存する度合いが異なる複数のケースについて、シミュレーションを実施している。

シミュレーションを用いた考察により、国債利回りに目標を設定する場合、少額の国債買入れでも利回り目標を達成可能との Bernanke (2016) らによる示唆の背景が明らかとなる。本稿での分析から、YCC が厳格に実施されている場合には、国債需給の悪化リスクが軽減されることにより、国債買入れが限定的でも、イールドカーブがフラット化し得ることが明らかとなった。また、YCC が実施されていない場合には、予想短期金利の水準の上昇に伴

¹ これらの中央銀行が実際に運営する国債の価格 (利回り) のコントロールは様々な形態をとっている。Fed は第二次世界大戦中とその後の時期においてイールドカーブの全域に対して利回りに上限を設けていた (FRB、2020)。オーストラリア準備銀行は、2020年3月から2021年11月まで、3年国債金利に対して利回り目標を導入していた (RBA、2021)。日本銀行は2016年9月以降、短期金利に加え、長期金利 (10年金利) も操作対象としている。本稿では、特に断りのない限り、国債の価格 (利回り) を中央銀行がコントロールする枠組みを、その形態等にかかわらず、YCC と呼ぶこととする。

² VV は、2009年に NBER Working Paper として公表された後、学界での検討が進み、最終的に2021年には経済学の有力な学術誌の1つである *Econometrica* に掲載された。

³ わが国では、現在、10年金利が 25bps 以下となるように YCC が運営されている (日本銀行、2022)。

って、名目金利の実効下限による制約の影響が幾分弱まるもとでは、国債利回りへ国債需給の変動による影響が及びやすくなることも示された。

先行研究では、特定期間選好仮説を非伝統的金融政策の効果の分析に応用する分野において発展がみられている⁴。具体的には、VV は、YCC を想定しないもとで、国債買入れやフォワード・ガイダンスの効果を検証している。また、King (2019) は、中央銀行の国債需要が価格感応的ではない特定期間選好仮説にもとづくモデルに名目金利の実効下限制約を導入した場合において、国債買入れやフォワード・ガイダンスの効果と実効下限制約との関係などを分析している。Hamilton and Wu (2012) は、特定期間選好をもつ投資家の国債需要が国債利回りについて線形関数となる VV モデルの離散時間版を提案のうえ、推計している。日本銀行による国債買入れの効果については、離散時間版の VV モデルを推計している Fukunaga et al. (2015) や短期・長期の国債が不完全代替と仮定したうえで動学的確率的一般均衡モデルを推計している Sudo and Tanaka (2021) において定量化されている。一方で、YCC については、Keynes (1936) において金融政策の枠組みとしての可能性が言及されているものの、関連する学術研究は限定的なものにとどまっている⁵。最近では、Lucca and Wright (2022) は、豪州のイールド・ターゲットについて高頻度データを用いて検証し、国債イールドカーブと OIS カーブとの関係が断絶していることに着目し、狭義の流動性チャンネルを識別している⁶。これまでのところ、わが国の YCC に関する研究は、高頻度な市場データに焦点を当てたものにとどまり、特定期間選好仮説と整合的な市場分断の存在を実証的に支持している⁷。

本稿の次節以降の構成は、以下のとおりである。2 節では、わが国の YCC の沿革を簡潔にまとめる。3 節では、特定期間選好仮説にもとづく金利の期間構造モデルの主要なメカニズムをシンプルなモデルにより示す。4 節では、拡張モデルを提示する。5 節では、拡張モデルのパラメーターのカリブレーション方法について説明する。6 節では、主要な分析結果について議論する。7 節は結論である。

⁴ 中央銀行の国債買入れによる国債利回りへの影響について、学界では長らく Wallace (1981) の中立性命題が有力な仮説とされていたものの、近年、政策当局者の間では年限が異なる国債の不完全な代替性 (Tobin, 1969 等) にもとづく分析が進展し、その存在が広く認識されるようになってきている (例えば、D'Amico and King [2013] 等)。

⁵ 黒田 (2021b) で指摘されているように、Keynes (1936) は、金融政策の枠組みとして、YCC の可能性を以下のように言及している。

「中央銀行が、短期手形に対する単一の銀行利率を発表する代わりに、あらゆる満期の一流債券を指定価格で売買するための複合的な付け値を発表することは、おそらく貨幣管理の技術上なしうる最も重要な実際の改良である。」(塩野谷祐一訳)

⁶ 「狭義」の流動性チャンネルに加えて、Lucca and Wright (2022) は、デュレーション効果やポートフォリオ・バランス効果といった「広義」の効果波及チャンネルを分析している。本稿では、Lucca and Wright (2022) において「狭義」の流動性チャンネルを生じさせている非金銭的成本が国債の場合には総じて低いと想定して、VV と同様に、「広義」の効果波及チャンネルに焦点を当てている。

⁷ Hattori and Yoshida (2021) および Ito (2019) は、日本銀行の YCC のもとでの日本国債利回りと金利スワップレートの時系列特性を高頻度データにより検証している。

2. わが国における YCC

日本銀行は、2016年9月に「総括的検証」を実施し、それを踏まえて新たな政策枠組みとして「長短金利操作（YCC）付き量的・質的金融緩和」を導入した（日本銀行、2016）。この枠組みは3つの目的のために導入されており、「第1に、わが国における予想物価上昇率の形成メカニズムを踏まえ、2%の『物価安定の目標』の実現のために、需給ギャップがプラスの状態をできるだけ長く続けることである。第2に、金融緩和の長期化が見込まれるもとの、緩和の効果だけでなく副作用にも配慮しながら、適切な水準に金利をコントロールしていく枠組みとすることである。第3に、オーバーシュート型コミットメントにより、予想物価上昇率に関する『フォワード・ルッキングな期待形成』を強めることである。」と整理されている（日本銀行、2021）。

「長短金利操作付き量的・質的金融緩和」では、従来のマネタリーベースの増加額や国債買入れ額に代えて、長短金利水準を「金融市場調節方針」の操作目標として、経済・物価・金融情勢を踏まえて、2%の「物価安定の目標」に向けたモメンタムを維持するため最も適切と考えられるイーロードカーブの形成を促している（黒田、2017）。具体的には、「長短金利操作付き量的・質的金融緩和」の導入以降、日本銀行は、短期政策金利を▲0.1%、10年物国債金利を「ゼロ%程度」とする操作目標を設定している。

これまで、「長短金利操作付き量的・質的金融緩和」は、金融市場や実体経済に正の効果を発揮している一方で、国債市場の機能度にも影響を及ぼしており、YCCの導入後には、金利の変動幅が縮小するもとの、国債市場の機能度が低下したと指摘されている（日本銀行、2021）。そうしたもとの、日本銀行は、2018年7月に、「長短金利操作付き量的・質的金融緩和」の持続性を強化するため、国債買入れの運営を柔軟化し、長期金利は、経済・物価情勢等に応じて上下にある程度変動しうることを明確にした。具体的には、長期金利の変動幅については、「それまでの概ね±0.1%の幅から、上下にその倍程度変動しうる」ことを示した。さらに、2021年3月には、変動幅が結果的に狭くなることがあったことも踏まえ、緩和効果の確保と市場機能の維持の両立のため、長期金利の変動幅について明確化することとし、上下に±0.25%程度とした（黒田、2021a）。

YCCの導入以降、日本銀行は、オペレーション上の新たな取り組みを実施してきた。2016年9月には、金利の大幅な上昇を抑制するために、特定の年限の国債を固定金利で無制限に買い入れる指値オペを導入した。さらに、これを強化するため、2021年3月には、一定期間、指値オペを連続して行う「連続指値オペ制度」を導入した。直近の2022年4月には、連続指値オペの運用を明確にする観点から、10年物国債金利について0.25%の利回りでの指値オペを、明らかに応札が見込まれない場合を除き、毎営業日、実施することを発表している。

上述したわが国のYCCについては、中央銀行関係者から複数の見解が示されている。まず、日本銀行がYCCを導入した直後には、Bernanke元FRB議長が、長期金利目標をその当時の国債買入れの量的目標である年間80兆円よりも少額の国債買入れで達成可能であるとの見方を示している（Bernanke、2016）。Bernanke元議長は、少額の国債買入れで十分な理

由として YCC に対する信認を挙げている。その一方で、仮に YCC が信認されていない場合、すなわち市場参加者が長期金利の上限が近い将来放棄されると見込んでいる場合には、国債保有者ができるだけ早急に国債を売却する誘因に駆られ、その結果、目標年限の国債の大部分を日本銀行が保有することにもなり得るとも指摘している。しかしながら、Bernanke 元議長は、わが国においては、上記のような信認が喪失されてしまうリスクは小さいと主張している。同様に、FOMC の議事要旨 (Federal Reserve Board, 2020) は、YCC は、市場参加者から信認されている場合には、国債金利をコントロール可能であるだけでなく、その効果はそれ以外の金利にも波及するほか、出口を考慮する必要がない場合には多額の国債買入れが不必要となり得る、と指摘している。同様の文脈で、Higgins and Klitgaard (2020) は、わが国における YCC の経験を中央銀行が国債市場への大規模な介入なしに金利の期間構造を非常に精密にコントロールしている一例として挙げている。同論文では、これが実現した理由として、国債金利が目標利回りを上回ることはないよう日本銀行が必要なだけ国債を購入すると市場参加者が見込んでいることを挙げられている。Carlson et al. (2020) も、利回りの上限が柔軟に運営される場合、厳格な場合と比べて、中央銀行のバランスシートが全体として拡大してしまう可能性を指摘している。同論文では、その理由として、前者の場合、国債金利が上限を上回る可能性があり、その場合には、金利が上限を下回るまで、一定のペースでの国債買入れが継続することが挙げられている。

本稿では、特定期間選好にもとづく金利の期間構造モデルを、上述した先行研究において YCC の主な特徴とみられているその信認あるいは厳格度合いに焦点を当て、上述したわが国での YCC の経験に沿うよう拡張することでそのメカニズムを検証する。

3. シンプルな例

本節では、3 期間 ($t=0, 1, 2$) からなるシンプルなモデルにより、ほぼ静的な状況においては、特定期間選好をもつ投資家の国債需要の価格弾力性の違いがどのように長期金利に影響を及ぼすかについて示す。なお、このモデルは簡略化されたものではあるものの、VV で提案されたモデル (VV モデル) の基本的な特徴を備えていると考えられる。

このモデルでは、裁定投資家と特定期間選好をもつ投資家の 2 種類の経済主体が存在すると想定する。裁定投資家は、0 期には短期 (1 期間) と長期 (2 期間) の債券の双方、1 期には短期債券にのみ投資可能である一方、2 期には投資を実施しないと仮定する。ここで、短期と長期の債券価格はそれぞれ $P_t(1)$ 、 $P_t(2)$ と表示する。

裁定投資家は、 W_t を t 期の保有資産額とすると、 W_{t+1}/W_t で表される 1 期間のリターン (R_{t+1}) をそのリスクも考慮しながら最大化するとする。ここで、初期保有資産額である W_0 を 1 に基準化すると、0 期目の裁定投資家の最適化問題は、下記の (1) 式、すなわちそれぞれ $X_0(1)$ と $X_0(2)$ と表される短期と長期の債券への投資額 (投資割合) を決定するものとして与えられる。なお、 $X_0(1)$ と $X_0(2)$ はその和が 1 となることから W_0 に対する投資割合でもある。

$$\max_{X_0(1), X_0(2)} E_0 [R_1] - \frac{\alpha}{2} \text{Var}_0 [R_1], \text{ s.t. } R_1 \equiv \frac{W_1}{W_0} = \frac{1}{P_0(1)} X_0(1) + \frac{P_1(1)}{P_0(2)} X_0(2), X_0(1) + X_0(2) = 1 \quad (1)$$

上記の最適化問題は以下のようにも表すことができる。

$$\max_{X_0(2)} e^{r_0}(1 - X_0(2)) + E_0 \left[\frac{P_1(1)}{P_0(2)} X_0(2) \right] - \frac{a}{2} \text{Var}_0 \left[\frac{P_1(1)}{P_0(2)} X_0(2) \right] \quad (2)$$

ここでは、 $P_0(1) \equiv \exp(-\max\{r_0, b\})$ や $P_1(1) \equiv \exp(-\max\{r_1, b\})$ 、 $r_1 \sim N(\mu_r, \sigma_r^2)$ と定義しているほか、短期金利は中央銀行によって決定されているとしている。このとき、最適化の1階条件は以下ようになる。

$$X_0(2) = \frac{E_0 \left[\frac{P_1(1)}{P_0(2)} \right] - e^{r_0}}{a \text{Var}_0 \left[\frac{P_1(1)}{P_0(2)} \right]} = \frac{-e^{r_0} P_0(2)^2 + E_0[e^{-r_1}] P_0(2)}{a \text{Var}_0[e^{-r_1}]}$$

特定期間選好をもつ投資家については、中央銀行とそれ以外の投資家からなり、全体としてその長期国債の需要は

$$\tilde{Z}_0(2) = -\alpha \log P_0(2) - \tilde{\beta} \quad (3)$$

で与えられると仮定する。ここで、 α は特定期間選好をもつ投資家の国債需要の価格半弾力性 (semi-elasticity) であり、 $\tilde{\beta}$ は定数項である。国債供給については、政府が外生的に、0期に長期と短期の債券をそれぞれ $S_0(2)$ と $S_0(1)$ の額だけ発行し、1期には短期債券を発行すると仮定する。ここで、 $S_0(2)$ と $S_0(1)$ 、 $\tilde{Z}_0(2)$ はすべて W_0 に対する投資割合とも考えられる。

市場清算条件、すなわち $S_0(2) = \tilde{Z}_0(2) + X_0(2)$ のもとで、上記の1階の裁定条件と(3)式の長期国債の需要関数から、次の長期金利 $Y_0(2)$ に関する決定式が得られる。

$$Y_0(2) \approx \frac{r_0 + E_0[r_1]}{2(1 + a \text{Var}_0[r_1])} + \frac{a \text{Var}_0[r_1]}{2(1 + a \text{Var}_0[r_1])} (S_0(2) + \beta) \quad (4)$$

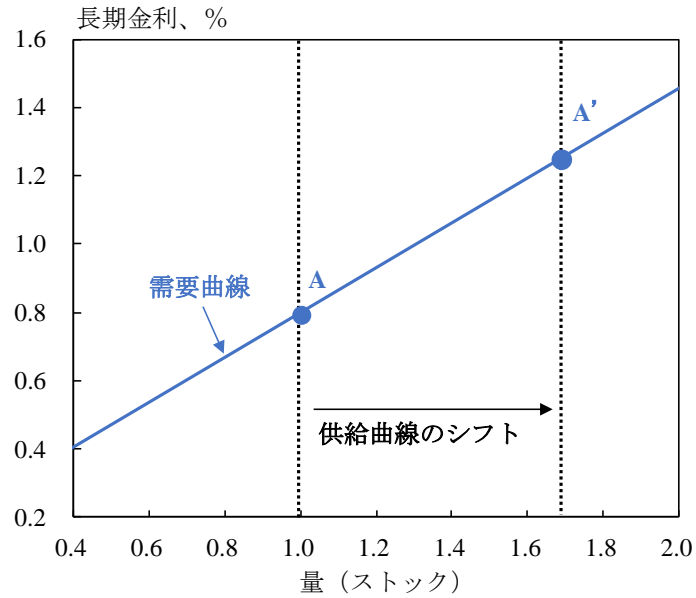
ここで、(4)式は $e^x \approx 1 + x$ の近似にもとづく近似式である。長期国債の供給曲線 ($S_0(2)$ 、黒点線) と需要曲線 ($Z_0(2) + X_0(2)$ 、右肩上がりの青実線、赤破線) を記載している下記の図1a~dで示しているように、この式からVVモデルの主要な洞察が明らかとなる。ここで、供給曲線は政府による国債発行が外生的に与えられることから垂直であり、需要曲線はy軸の長期金利 ($Y_0(2)$) に対して右肩上がりとなっている。図1aから、長期国債の供給 ($S_0(2)$) が増加することで、供給曲線が右にシフトする結果、長期金利 ($Y_0(2)$) が上昇することがわかる。また、図1bは、短期金利 (r_0) の低下が需要曲線を右下方にシフトさせることで長期金利を低下させることを示している。さらに、図1cでは、名目金利の実効下限制約の影響、特に短期金利のボラティリティ ($\text{Var}_0[r_1]$) を低下させることを通じた影響を示している。実効下限制約が存在しない場合、実効下限制約が存在している場合に比べて、需要曲線の傾きが上昇し、その結果、国債需給の長期金利への影響が拡大する。最後に、図1dから、特定期間選好をもつ投資家の国債需要の価格半弾力性が大きいほど、需要曲線が平坦化し、その結果、国債需給の影響が弱まることがわかる。すなわち、価格弾力性が利回り水準にかかわらず一定とした場合にはなるが、厳格なYCCほど (α が大きいほど)、国債需給の影響が弱まることになる。

上記の3期間モデルでは、国債利回りの決定要因の動学的な影響を分析することができないことから、次節では、YCCの国債利回りへの影響を定量化することが可能となる金利の

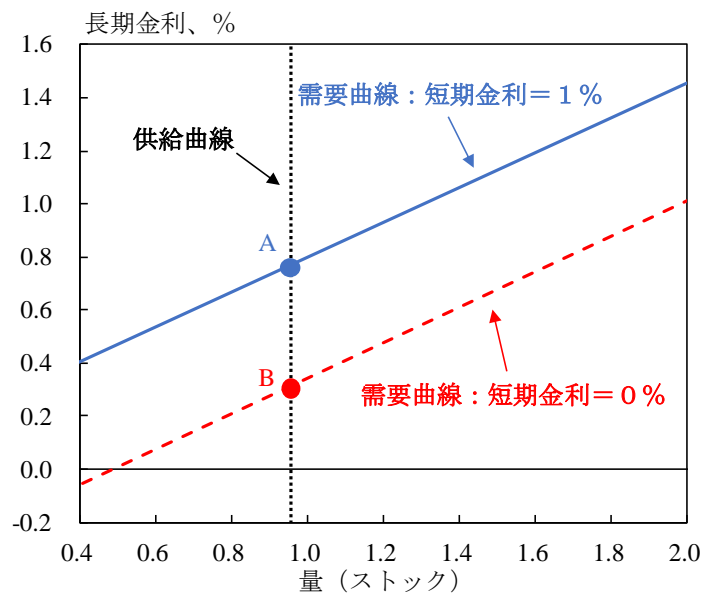
期間構造モデルの拡張を提案する。

図 1：シンプルな 3 期間モデルにおける長期国債の需要・供給曲線

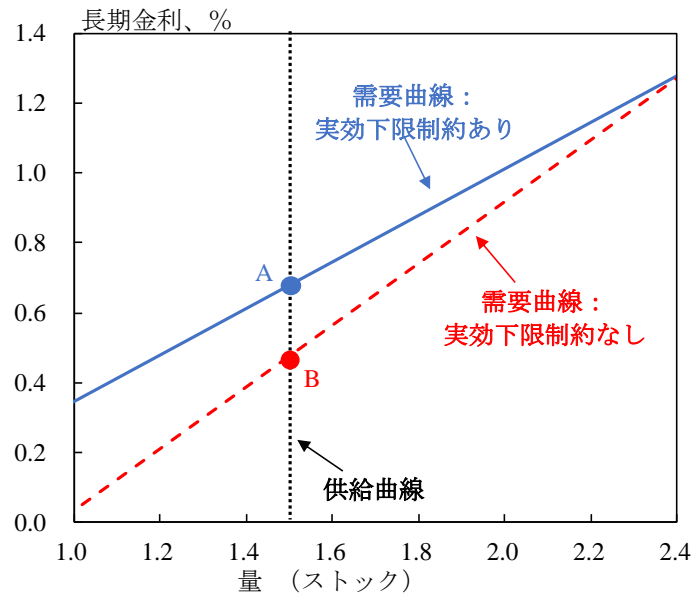
a) 長期国債の供給増加による影響



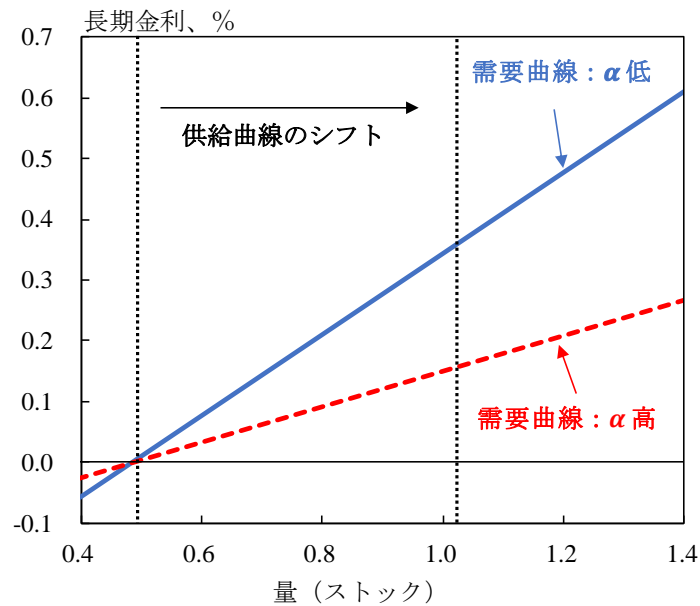
b) 短期金利の低下による影響



c) 名目金利の実効下限制約による影響



d) YCC の厳格度合いによる影響



注：図1 a-d はシンプルな3期間モデルにもとづく需要・供給曲線を表す。図1 a-c の青実線については、名目金利の実効下限制約 ($b = 0$) のもと、 $r_0 = 0.01$ 、 $\alpha = 4$ 、 $\beta = -2$ 、 $a = 50$ 、 $\mu_r = \sigma_r = 0.02$ と設定している。図1 b の赤破線については $r_0 = 0$ とのみ変更している。図1 c の赤破線については、 $r_0 = 0$ と $b = -\infty$ のみ変更している。図1 d については、 $r_0 = 0$ 、 $\beta = -2$ 、 $a = 50$ 、 $\mu_r = \sigma_r = 0.02$ と設定し、異なる α のケースを示す (具体的に α は 4 と 100 と設定する)。図1 d では国債需要の価格弾力性が上昇すると YCC の厳格度合いが高まると想定している。

4. 拡張モデル

本節では、VV モデルをベンチマークとした拡張モデルを提案する。具体的には、(1) 明示的に YCC をモデル化するために、 α が債券の年限および利回りに依存することを許容するほか、(2) 名目金利の実効下限制約を導入する、(3) わが国のデータにおける経験的特性を捉えるよう 2 つの国債利回りの決定要因を相関させる、という方向でモデルを拡張する。なお、(1) と (2) は、その性質上、強い非線形性をもたらすことから、それぞれ別個に考察する。ここで、(1) と (2) を導入したモデルを VV-Alpha モデル、(2) と (3) を導入したものを VV-ELB モデルと表す。なお、VV-ELB モデルは、(3) を除けば、King (2019) が提案したモデルと同様である。

ここで、 $P_t(\tau)$ を時点 t の残存期間が τ である国債の価格、 $y_t(\tau) = -\log P_t(\tau) / \tau$ で与えられる $y_t(\tau)$ を対応する国債利回りとする。また、前節と同様、裁定投資家と特定期間選好をもつ投資家の 2 種類の経済主体が存在すると仮定している。

裁定投資家は国債と短期金利で運用可能であり、時点 t の資産保有額 W_t が

$$dW_t = \int_0^\infty x_t(\tau) \frac{dP_t(\tau)}{P_t(\tau)} d\tau + \left(W_t - \int_0^\infty x_t(\tau) d\tau \right) r_t dt \quad (5)$$

の動学過程に従うとしている。ここで、 $x_t(\tau)$ は裁定投資家が保有する残存期間 τ の国債の市場価値、 r_t は短期金利である。平均分散効用を持つ裁定投資家は、下記の最適化問題を(5)式の制約のもとで解くことになる。

$$\max_{x_t(\tau) \forall \tau} E_t^{\mathcal{P}} [dW_t] - \frac{a}{2} \text{Var}_t^{\mathcal{P}} [dW_t], \quad a \geq 0 \quad (6)$$

ここで、 a は絶対的リスク回避度であり、時点 t で条件付けた期待値 $E_t^{\mathcal{P}}$ と分散 $\text{Var}_t^{\mathcal{P}}$ の間のトレードオフの強さを決定する。また、添え字 \mathcal{P} は物理的確率測度である。この最適化問題の 1 階の最適化条件は、

$$E_t^{\mathcal{P}} \left[\frac{dP_t(\tau)}{P_t(\tau)} \right] = r_t dt + a \text{Cov}_t^{\mathcal{P}} \left[\frac{dP_t(\tau)}{P_t(\tau)}, \int_0^{T^*} x_t(s) \frac{dP_t(s)}{P_t(s)} ds \right] \quad (7)$$

となり、ここで $\text{Cov}_t^{\mathcal{P}}$ は時点 t で条件付けた共分散である。

特定期間選好をもつ投資家の国債需要は時点や残存期間によって下記の式に従い変化するとしている。

$$\tilde{z}_t(\tau) = -\alpha(\tau, P_t(\tau)) \log P_t(\tau) - \tilde{\beta}_t(\tau) \quad (8)$$

ここで、傾きを表す係数 α は、残存期間 τ や国債価格（国債利回り）にも依存すると仮定している。本稿のモデルでは、VV に従って、便宜的に国債の供給量をゼロと置くが、政府による残存期間 τ の国債の供給から特定期間選好をもつ投資家による需要を控除した国債の純供給 $z_t(\tau)$ を考慮することで一般性を失うことなく分析を進めることが可能となる。このとき、(8) 式は、

$$z_t(\tau) = \alpha(\tau, P_t(\tau)) \log P_t(\tau) + \beta_t(\tau)$$

と書き換えられる。ここで、 $\beta_t(\tau)$ は国債の純供給に係る定数項であり、下記の式に従うか

たちで時点 t と残存期間 τ の双方に依存する。

$$\beta_t(\tau) = \theta_0(\tau) + \theta(\tau)\beta_t \quad (9)$$

β_t は残存期間に依存しない国債純供給の決定要因として定義され、 α の値は国債純供給の価格半弾性値を表す。残存期間 τ の国債価格が 1% 下落した場合、他の条件が一定であれば、 $z_t(\tau)$ は α だけ減少する。YCC の文脈に即すると、中央銀行が主な特定期間選好をもつ投資家と想定する場合、 α の値は YCC の厳格度合いを表すと解釈できる。具体的には、YCC の下での α 関数を

$$\alpha(\tau, P_t(\tau)) = \begin{cases} \alpha & \text{if } \tau = \tau^* \text{ and } y_t(\tau) \geq y^* \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (10)$$

と表すことができる。ここで、 τ^* は YCC における目標年限、 y^* は目標利回りの上限である。

国債利回りの決定要因は 2 つ存在し、短期金利と国債純供給の決定要因である。名目金利の実効下限に服するもとは、短期金利は潜在金利 \hat{r}_t と下限 b の最大値として与えられる（すなわち、 $r_t = \max(\hat{r}_t, b)$ ）。一方で、実効下限が存在しない場合には、短期金利と潜在金利は常に等しくなる（すなわち、 $r_t = \hat{r}_t$ ）。

潜在金利と国債純供給の決定要因 (β_t) の動学過程は、 \mathcal{P} 測度のもとで、下記の Ornstein-Uhlenbeck 過程に従うと仮定する。

$$d\hat{r}_t = \kappa_r(\mu - \hat{r}_t)dt + \sigma_r dB_{r,t}, \quad d\beta_t = -\kappa_\beta \beta_t dt + \sigma_\beta dB_{\beta,t} \quad (11)$$

\mathcal{Q} 測度（リスク中立測度）のもとでは、

$$d\hat{r}_t = \mu_r^{\mathcal{Q}}(\hat{r}_t, \beta_t)dt + \sigma_r dB_{r,t}, \quad d\beta_t = \mu_\beta^{\mathcal{Q}}(\hat{r}_t, \beta_t)dt + \sigma_\beta dB_{\beta,t} \quad (12)$$

に従うと仮定する。

国債価格は \mathcal{Q} 測度のもとで求められ、国債価格関数は一般的に

$$P_t(\tau) \equiv f(\tau, \hat{r}_t, \beta_t) = f(T - t, \hat{r}_t, \beta_t) = E_t^{\mathcal{Q}} \left[e^{-\int_t^T r_u du} \right] \quad (13)$$

と表される。ここで、 T は国債の満期時点を示す。

補論 A において、伊藤の補題や無裁定条件、1 階の最適化条件、国債の純供給関数を用いることで、下記のドリフト項が導かれる。

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mu_r^{\mathcal{Q}}(\hat{r}_t, \beta_t) \\ \mu_\beta^{\mathcal{Q}}(\hat{r}_t, \beta_t) \\ \kappa_r(\mu - \hat{r}_t) \\ -\kappa_\beta \beta_t \end{bmatrix} \\ & = -a \begin{bmatrix} \sigma_r^2 & \rho\sigma_r\sigma_\beta \\ \rho\sigma_r\sigma_\beta & \sigma_\beta^2 \end{bmatrix} \left[\int_0^\infty \frac{(\theta_0(s) + \alpha(s, f(s, \hat{r}_t, \beta_t)) \log f(s, \hat{r}_t, \beta_t) + \theta(s)\beta_t)}{f(s, \hat{r}_t, \beta_t)} f_r(s, \hat{r}_t, \beta_t) ds \right. \\ & \quad \left. \int_0^\infty \frac{(\theta_0(s) + \alpha(s, f(s, \hat{r}_t, \beta_t)) \log f(s, \hat{r}_t, \beta_t) + \theta(s)\beta_t)}{f(s, \hat{r}_t, \beta_t)} f_\beta(s, \hat{r}_t, \beta_t) ds \right] \end{aligned} \quad (*)$$

ここで、 ρ は国債利回りの決定要因におけるショック項の相関係数。(*)式は、 \mathcal{Q} 測度の下で

の解法において重要な役割を果たし、 α の値がリスクプレミアムを通じて国債利回りに影響を及ぼすことを示唆する。これは、 α が第2項にのみ表れ、裁定投資家がリスク中立的($\alpha=0$)な場合にはその項が消失するためである。なお、 $\alpha(\tau, P_t(\tau))$ が定数であり、名目金利の実効下限制約が存在しない場合、このモデルはVVモデルに帰着する。VV-AlphaモデルあるいはVV-ELBモデルでは、国債利回りはアフィン型ではないことから、補論Bで記載されている数値計算アルゴリズムを用いて算出する。

5. カリブレーション方法

本稿では、日本の事例に合致するようにパラメーターの値を設定するため、日本国債残高の残存年限構成や、国債のゼロ・クーポン利回り、東京銀行間取引金利(TIBOR)の3か月物金利に関するサーベイ調査のデータを用いる⁸。3か月物TIBORレートを除くデータについて、標本期間は、1995年度から2014年度であり、YCCやマイナス金利政策の導入前を対象としている。一方で、3か月物TIBORレートのサーベイ・データのサンプル期間については、利用可能な2017年1月からとして、これを用いて潜在金利の動学過程をカリブレーションする。データの詳細については補論Cを参照。

カリブレーションでは、サンプル期間において名目金利の実効下限制約が作用したとみられるため、拡張モデルのうち、VV-ELBモデルを用いる。実際、日本銀行(2016)では、2014年からマイナス金利政策が導入された2016年初まで、超過準備への付利金利が実効下限制約として作用したことを指摘している。VV-ELBモデルにおけるパラメーターは、日本国債残高の残存年限構成に関するパラメーター(θ_0, θ)、国債利回りの決定要因の動学過程に関するパラメーター($\mu, \kappa_r, \sigma_r, \kappa_\beta, \sigma_\beta$)とそれら以外のパラメーター(b, ρ, a, α)からなる。ここで、 σ_β の値は0.01と標準化しているほか、2016年9月のYCC導入の以前は、 $\alpha = 0$ を棄却する実証的な根拠がみられないことから、 $\alpha = 0$ としている⁹。このほか、 b についてはベンチマークのカリブレーションでは0としている。

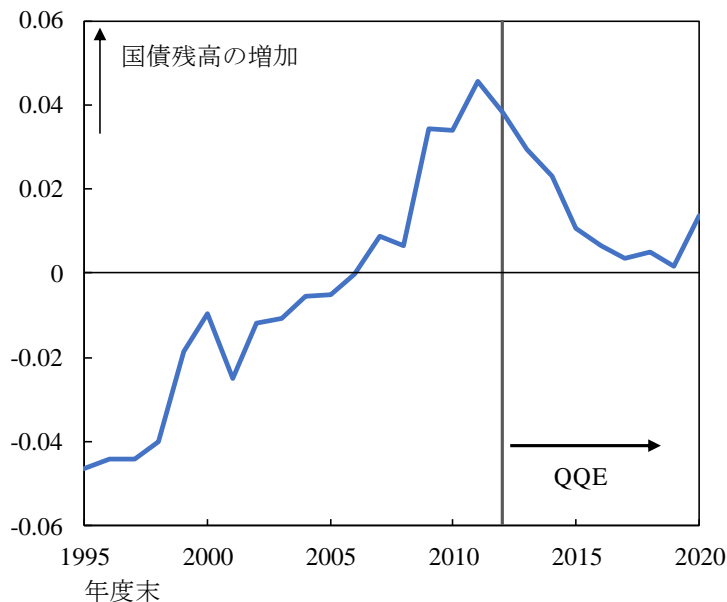
日本国債残高の残存年限構成に関するパラメーターを推計するため、 β の代理変数として残存年限構成に関するデータ(残存年数別の国債残高の名目GDP比)の第一主成分を用いる。ここで、その第一主成分を $\hat{\beta}$ とすると、これによって、国債の残存年限構成データの全変動の91%を説明可能となる。図2で $\hat{\beta}$ の推移を確認すると、1990年代後半の金融危機の際に $\hat{\beta}$ は大幅に上昇し、それ以降2000年代を通じて上昇傾向を辿った。もっとも、グローバル金融危機後には、QQEのもと、日本銀行による大規模な資産買入れを受けて、減少に転じた。新型コロナウイルス感染症が拡大した2020年度(2020年4月~2021年3月)には、再度増加に転じている。 θ は図3で示している $\hat{\beta}$ の因子負荷量によりカリブレーションしてい

⁸ 3ヶ月物TIBORレートに関するサーベイ・データはConsensus Economics Inc.作成のコンセンサス予想を用いている。

⁹ 持続的な長期金利の低下にもかかわらず、わが国の特定期間選好を持つ投資家(特に生命保険会社)は、デュレーション・マッチングとリスク資産に対する規制対応の観点から、残存期間が10年超の国債保有額を2000年代に着実に増加させてきた(Fukunaga et al., 2015)。さらに、Koeda and Kimura (2022)は、 α が統計的に有意に正であるとの実証的根拠を得ていない。

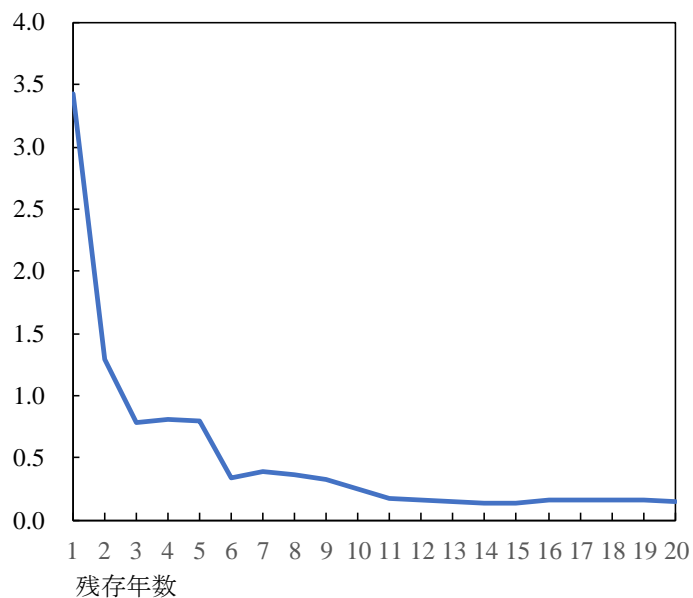
るほか、 θ_0 には図4の残存年限構成データの平均値を用いている。これは β の平均値を0に標準化しているためである。 β の動学過程に関するパラメーター(κ_β)については、 $\hat{\beta}$ をそのラグに回帰することで推計している。

図2：日本国債残高の残存年限構成データの第一主成分 ($\hat{\beta}$)



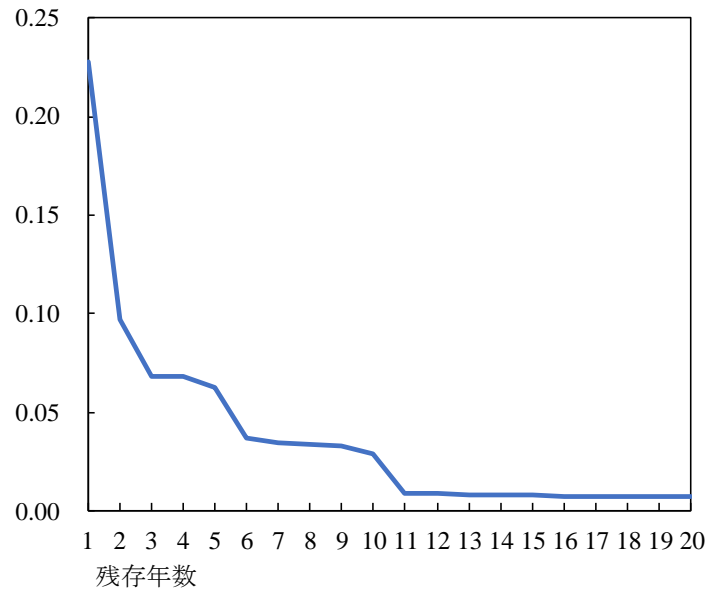
注：この図は残存年数別国債残高の GDP 比の第一主成分を表す。

図3： θ のカリブレーションに用いる $\hat{\beta}$ の因子負荷量



注：この図は国債残高の年限構成データから推計された第一主成分の因子負荷量を表す。

図4：カリブレートされた θ_0



注：この図は各残存年数の国債残高の GDP 比の標本平均を表す。

短期金利の動学過程のパラメーター (μ, κ_r, σ_r) については、3か月物 TIBOR のサーベイ・データを用いている。具体的には、 \mathcal{P} 測度の下での動学過程を表す (12) 式を前向きに反復することを通じて短期金利の条件付き期待値や分散を解析的に導出することにより、 μ, κ_r, σ_r を推計している。このとき、名目金利の実効下限は、十分に先の将来、具体的には4年先以上では、市場参加者から制約として認識されていないと仮定している。また、TIBOR レートと国債金利の間の格差も過去平均を用いて調整している。

上記以外のパラメーター (ρ と a) については、下記の観測方程式などからなる拡張カルマン・フィルターにより推計している。

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{f}(\hat{r}_t, \beta_t) + \mathbf{w}_t$$

ここで、

$$\mathbf{f}(\hat{r}_t, \beta_t) \approx \mathbf{f}(\hat{E}[\hat{r}_t | \beta_t, \mathcal{F}_{t-1}], \beta_t) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial r}(\hat{E}[\hat{r}_t | \beta_t, \mathcal{F}_{t-1}], \beta_t)(\hat{r}_t - \hat{E}[\hat{r}_t | \beta_t, \mathcal{F}_{t-1}])$$

であり、状態方程式は (12) 式で与えられる。なお、 \hat{r}_t は潜在変数として扱っている一方、 β_t は観測可能な変数としている。 $\hat{E}[\hat{r}_t | \beta_t, \mathcal{F}_{t-1}]$ は \hat{r}_t の β_t および時点 $t-1$ までの情報 (\mathcal{F}_{t-1}) を用いた線形射影である。補論 D では、Harvey (1989) に従って、拡張カルマン・フィルターの詳細を記述している。

表1では、カリブレートしたパラメーターを示している。ここで、 ρ が -0.29 と負の値となっていることから、わが国では国債純供給に対するショックと短期金利へのショックの間に負の相関関係があることが示唆される。この負の相関関係は、わが国において、低金利環境下で国債残高の増加が続いていることを解釈するうえで重要と考えられる。 a の値が 15.1 と VV が米国に即してカリブレートした値よりも大きくなったものの、わが国のデータを用い

て同様に a を推計した Koeda and Kimura (2022) と整合的な値であることも踏まえると、わが国の裁定投資家は米国の裁定投資家よりもリスク回避的であることが示唆される。

表1：カリブレートされたパラメーター

μ	0.0065
κ_r	0.2256
σ_r	0.0136
a	15.0675
ρ	-0.2852
κ_β	0.1453

注：この表は VV-ELB モデルのカリブレートされたパラメーターの値を示す。実行下限 (b) と α は 0 と設定している。 σ_β は 0.01 に標準化している。 θ と θ_0 の値は図 3 と 4 で示している。

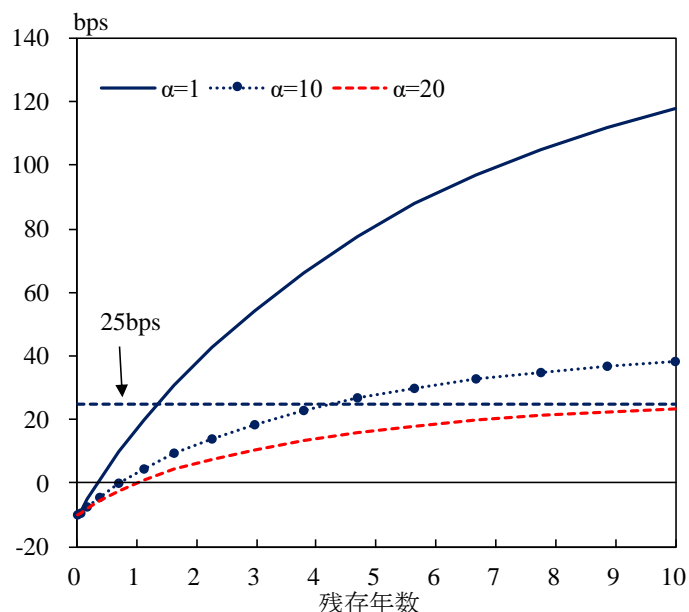
6. 主要な分析結果

YCC の国債利回りへの影響を検証するため、2 節で言及したわが国における YCC の最近の経験と整合的になるよう目標年限 (τ^*) を 10 年、利回り上限 (y^*) を 25bps と設定し、それ以外の利回りの決定要因の動学過程や国債残高の年限構成に関するパラメーターについては前節の VV-ELB モデルを用いてカリブレートされた値としたうえで、様々な α の値に対して VV-Alpha モデルの解を数値的に導出する。

図 5 では、 α の値ごとのイールドカーブに関するモデル・シミュレーション結果を示している。なお、利回りの決定要因については、 $\hat{r} = -0.1\%$ 、 β は 2021 年 3 月末の値としている。シミュレーション結果をみると、 $\alpha = 20$ と YCC の厳格度合いが高い場合には、イールドカーブが平坦化し、目標年限の利回りは目標範囲内に維持される（赤点線）。3 節のシンプルな例での結果とは対照的に、この平坦化は、日本銀行による追加的な国債買入れがなくとも、市場参加者が YCC が十分に厳格に運営されると見込む、すなわち、目標年限の利回りがその上限を下回るよう日本銀行が国債買入れを実施するとのコミットメントが十分に機能していることから生じている。その一方で、YCC が柔軟に運営されている場合、具体的には $\alpha = 1$ のとき、イールドカーブの傾きは急となり、日本銀行による追加的な国債買入れが実施されるもとでも、目標年限の利回りは上限を上回る（図 5、青実線）。

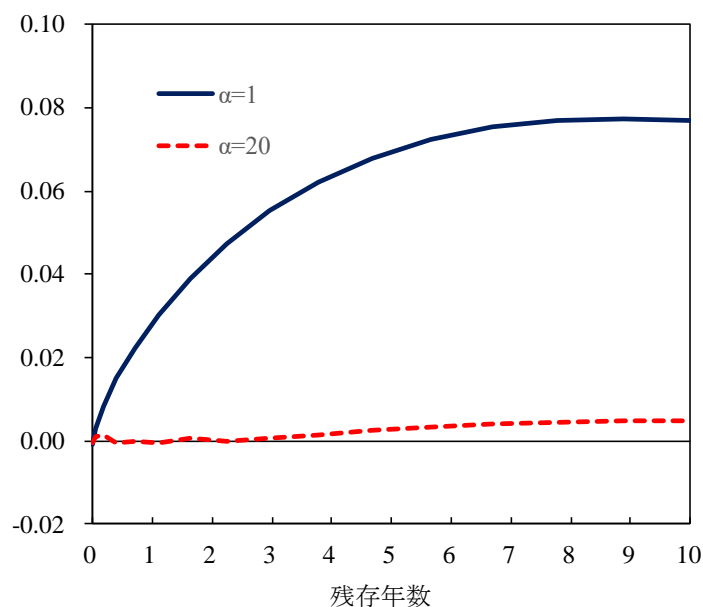
図 6 と図 7 では、国債純供給の決定要因 β_t と潜在金利 \hat{r}_t の国債利回りに対する因子負荷量を残存期間ごとに示している。具体的には、King (2019) と同様、国債利回りの各要因に対する偏微分を示している。ここでも、利回りの決定要因については、 $\hat{r} = -0.1\%$ 、 β は 2021 年 3 月末の値としている。これらの図から、 α が大きい値となるほど、国債利回りは各要因、特に国債純供給の決定要因への反応度合いが小さくなることがわかる。

図5：様々な α の値でのイールドカーブに関するモデル・シミュレーション



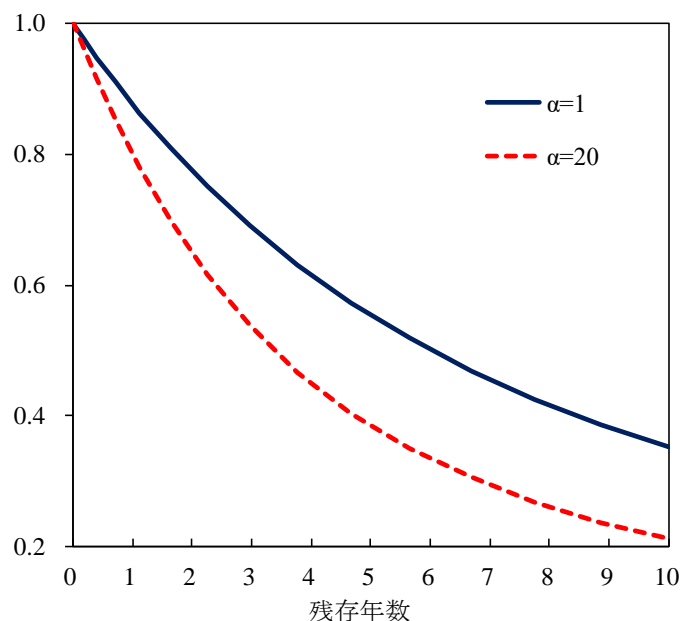
注：この図は、異なる α の値に対する VV-Alpha モデルを用いたイールドカーブに関するシミュレーション結果を示している。縦軸はベースポイントであり、横軸は残存年数である。国債利回りの決定要因の値は、 $\hat{r} = -0.1\%$ 、 β は 2021 年 3 月末値としている。

図6： α の値が異なる場合での国債純供給の決定要因の国債利回りに対する因子負荷量



注：この図は国債利回りの国債純供給の決定要因に対する偏微分を示す。国債利回りの決定要因の値は図5と同様。

図 7 : α の値が異なる場合での潜在金利の国債利回りに対する因子負荷量



注：この図は国債利回りの潜在金利に対する偏微分を示す。国債利回りの決定要因の値は図 5 と同様。

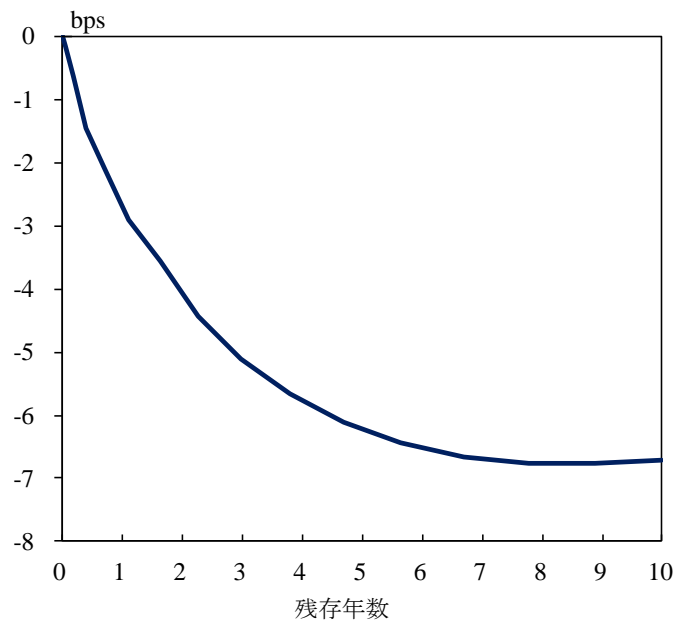
図 8 では、追加的に国債が供給された場合の影響に関する推計結果を示している。ここで、供給額は GDP の 10% に相当する分だけ、観察される国債残高の満期構成に沿って増額されると仮定している。具体的には、 $\hat{\beta}$ と国債残高全体の GDP 比 ($\sum_{\tau=1}^{20} z_t(\tau)$) の間の相関関係を用いている。青実線は、国債利回りの変化について、厳格な YCC ($\alpha=20$) と柔軟な YCC ($\alpha=1$) の場合の格差を示している。これが負の値となっているのは、柔軟な YCC のもとでは、国債利回りの変化が厳格な YCC に比べて大きいことを意味している。この格差は、厳格な YCC のもとでは、国債純供給の決定要因による影響が抑制され、国債利回りがほとんど変化しない一方、柔軟な YCC では利回りが上昇することによってもたらされている。

図 9 では、短期金利が 1% 上昇した場合の国債利回りの変化に関する推計結果、具体的には、柔軟な YCC の場合と厳格な YCC の場合の格差を示している。この負の格差は、短期金利の上昇時、柔軟な YCC のもとではイールドカーブが大きく上昇する一方、十分に厳格な YCC のもとではイールドカーブへの影響が限定的なものとなることから生じている。なお、この格差がイールドカーブの中期ゾーンで最も大きくなっているのは、短期金利上昇の影響の大きさが、短期ゾーンに加えて、長期ゾーンでも、YCC の厳格度合いの違いによって大きく変化しないためと考えられる。すなわち、短期金利は、一旦上昇しても、先行き定常状態に回帰していくため、短期金利上昇による影響は、残存年数が長い金利ほど限定的なものにとどまり、その結果、YCC の厳格度合いの違いが与える影響も、残存年数が十分に長い金利の場合には小さなものとなる。

上記のわが国のデータにもとづくシミュレーション結果は、1942 年から 1951 年まで FRB が実施していた国債のイールドカーブ・ターゲティングに関する Chaurushiya and Kuttner's (2003) の発見と整合的である。彼らは、国債金利が利回り上限に達していなくとも、そ

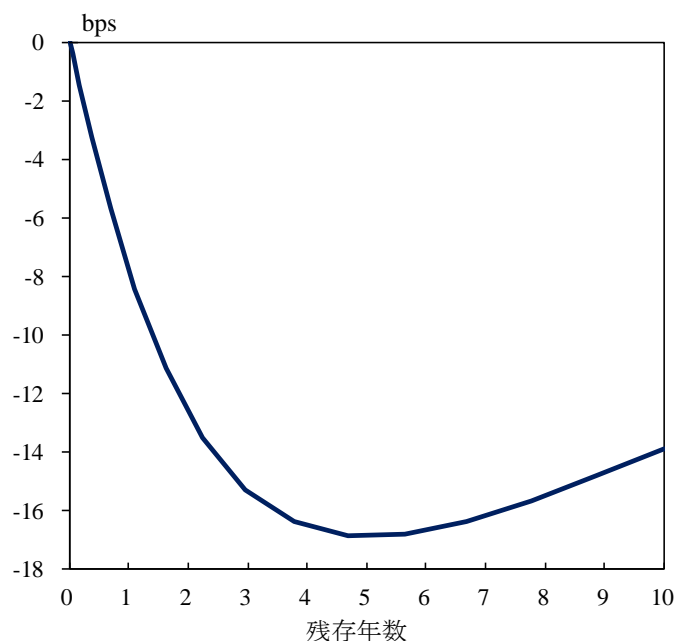
の上限に対するコミットメントが国債の価格下落リスクを抑制した結果、低い長期金利水準が維持されたと主張している。さらに、短期金利が上昇した後でも、FRBのコミットメントが信認されているもとで、長期国債市場においてFRBの保有割合が低いにもかかわらず、利回り上限の防衛に成功したとも指摘している。

図8：国債供給増加の影響に関する厳格なYCCと柔軟なYCCの格差



注：この図は、追加的な国債供給の増加が国債利回りに与える影響について、厳格なYCC ($\alpha = 20$)と柔軟なYCC ($\alpha = 1$)の場合の格差を示している。ここで、国債利回りの決定要因の値は図5と同様。供給額はGDPの10%に相当する。縦軸はベースポイント、横軸は残存年数を示す。

図9：短期金利上昇の影響に関する厳格な YCC と柔軟な YCC の格差



注：この図は、短期金利が1%上昇した場合の国債利回りの変化について、厳格な YCC ($\alpha = 20$) と柔軟な YCC ($\alpha = 1$) の場合の格差を示している。ここで、国債利回りの決定要因の値は図5と同様。縦軸はベーシスポイント、横軸は残存年数を示す。

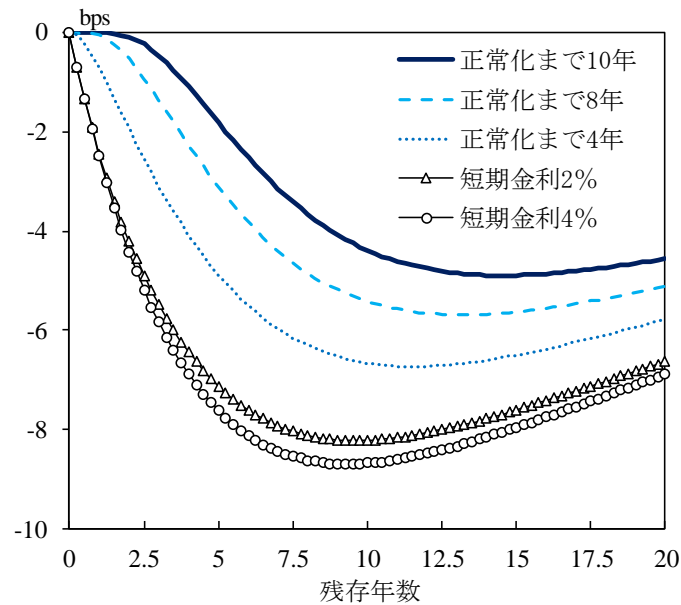
ここで、留意すべきこととして、VV-Alpha モデルでは名目金利の実効下限制約を導入していない点が挙げられる。これは、わが国の YCC は、マイナス金利政策も内包しており、短期金利が負の値を取り得るためである。さらに、2021年3月には、日本銀行が貸出促進付利制度を創設し、負の短期政策金利を機動的に引き下げ得るよう政策的に対応している（日本銀行、2021）。その一方で、2016年初のマイナス金利政策の実施前には、実効下限制約が強く作用していたとみられる。実際、日本銀行による2016年の総括検証でも、「国債買入れ1単位あたりの長期金利押し下げ効果は、2014年入り後からマイナス金利導入前までの期間においては低下した」と言及されているなど、実効下限の存在が国債買入れによる押し下げ効果を弱めていた可能性が指摘されている。

先行研究も同様に、名目金利の実効下限の存在が国債需給の影響を弱めることを示唆している。具体的には、King (2019) は、米国を対象に残存期間で加重平均した国債残高の GDP 比を代理変数として国債需給の影響を分析しており、2008年12月以前は市中に流通する国債残高の減少が10年のゼロ・クーポン国債金利を統計的に有意に押し下げ一方、それ以降は有意な結果は得られなかったと主張している。また、ユーロ圏を対象とした Grande, Grasso, and Zinna (2019) は、中央銀行やその他の特定期間選好をもつ投資家の国債保有シェアの上昇は、2012年8月以降の実効下限制約が強く作用していた時期には、それ以前と比べて、10年 OIS レートを小幅にしか引き下げなかったとの分析結果を提示している。

わが国を対象とした VV-ELB モデルにおいても、名目金利の実効下限の存在が国債需給の影響を弱めていることが確認できる。図10では、日本銀行による追加的な国債買入れによる国債利回りの変化を、実効下限をゼロ%とした場合について示している。ここで、国債

買入れ額の大きさは図8と同様に GDP 比 10%としている。これをみると、金利正常化に時間を要する、すなわち潜在金利が実効下限よりも低いほど、実効下限による抑制効果が強く生じる結果、国債需給の影響が弱まる傾向にある。なお、日本銀行による国債買入れの効果の大きさについては、Fukunaga et al. (2015) や Sudo and Tanaka (2021) の定量結果と概ね整合的である。さらに、後者の研究では、国債買入れのストック効果（民間投資家から日本銀行に移転した国債残高総額の影響）がフロー効果（国債買入れ実施時の購入額の影響）よりも大きく作用することも指摘されている。

図 10：名目金利の実効下限制約が日本銀行による国債買入れの効果にもたらす影響



注：この図は、日本銀行による追加的な国債買入れが実施された場合の国債利回りの変化について、名目金利の実効下限をゼロ%、 $\beta = 0$ とした場合について示している。ここで、買入額は図8と同様、GDPの10%に相当する。金利正常化に時間を要する場合は、それだけ潜在金利が実効下限よりも低い場合を指す。縦軸はベースポイント、横軸は残存年数を示す。

7. 結論

本稿では、特定期間選好仮説にもとづく金利の期間構造モデルを用いて、YCC に関して理論的かつ定量的な分析を実施している。具体的には、YCC を明示的に導入した金利の期間構造モデルを構築し、そのもとで国債価格を数値的に導出するアルゴリズムを提案している。モデルのパラメーターは、わが国の経験に合致するように、国債残高の年限構成や銀行間金利に関するサーベイ調査などわが国に関する様々なデータを用いてカリブレートしている。モデルを用いたシミュレーション結果は、YCC が国債純供給の決定要因による影響を弱めることを示唆している。

最後に、今後の研究課題や本稿の留意点を提示する。第一に、裁定投資家と特定期間選好をもつ投資家が運用する国債の年限は同様と仮定している。しかし、例えば裁定投資家が運

用する国債の年限が狭い範囲に限定されている場合には、この範囲外の年限の国債価格は国債市場が完全に分断されている中で決定されることになる。このことから、この仮定を緩めた場合には、国債純供給の決定要因による影響が変化し得る。第二に、スワップ市場など他の市場と国債市場との連関を明示的にモデル化することは、短期金利上昇の影響を考察するうえで有益と考えられる。第三に、本稿の分析では、財政の健全性に対する市場参加者の信認を前提としている点には留意が必要である。

補論 A: (*) 式の導出

本補論では、本論における (*) 式、すなわち国債価格を導出するうえで重要となる国債利回りの決定要因について、 Q 測度のもとでの動学過程のドリフト項を導出する。

まず、国債価格関数 ($P_t(\tau) \equiv f(\tau, \hat{r}_t, \beta_t)$) は、伊藤の補題を用いると次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} & df(\tau, \hat{r}_t, \beta_t) \\ &= -f_\tau(\tau, \hat{r}_t, \beta_t)dt + f_r(\tau, \hat{r}_t, \beta_t)d\hat{r}_t + f_\beta(\tau, \hat{r}_t, \beta_t)d\beta_t + \frac{1}{2}f_{rr}(\tau, \hat{r}_t, \beta_t)\langle d\hat{r}_t \rangle^2 \\ & \quad + \frac{1}{2}f_{\beta\beta}(\tau, \hat{r}_t, \beta_t)\langle d\beta_t \rangle^2 + f_r(\tau, \hat{r}_t, \beta_t)f_\beta(\tau, \hat{r}_t, \beta_t)\langle d\hat{r}_t, d\beta_t \rangle \end{aligned} \quad (\text{A-1})$$

このとき、 \mathcal{P} 測度のもとで $dP_t(\tau)$ の条件付き期待値は次のようになる。

$$\begin{aligned} & E_t^{\mathcal{P}}[dP_t(\tau)] \\ &= -f_\tau(\tau, \hat{r}_t, \beta_t)dt + f_r(\tau, \hat{r}_t, \beta_t)\kappa_r(\mu - \hat{r}_t)dt - f_\beta(\tau, \hat{r}_t, \beta_t)\kappa_\beta\beta_t dt \\ & \quad + \frac{1}{2}f_{rr}(\tau, \hat{r}_t, \beta_t)\sigma_r^2 dt + \frac{1}{2}f_{\beta\beta}(\tau, \hat{r}_t, \beta_t)\sigma_\beta^2 dt + f_r(\tau, \hat{r}_t, \beta_t)f_\beta(\tau, \hat{r}_t, \beta_t)\rho\sigma_r\sigma_\beta dt \end{aligned} \quad (\text{A-2})$$

また、 Q 測度のもとで潜在金利と国債純供給の決定要因の動学過程 ((12) 式) を用いて、 Q 測度のもとで $dP_t(\tau)$ の条件付き期待値は次のように表せる。

$$\begin{aligned} & E_t^Q[dP_t(\tau)] \\ &= -f_\tau(\tau, \hat{r}_t, \beta_t)dt + f_r(\tau, \hat{r}_t, \beta_t)\mu_r^Q(\hat{r}_t, \beta_t)dt + f_\beta(\tau, \hat{r}_t, \beta_t)\mu_\beta^Q(\hat{r}_t, \beta_t)dt \\ & \quad + \frac{1}{2}f_{rr}(\tau, \hat{r}_t, \beta_t)\sigma_r^2 dt + \frac{1}{2}f_{\beta\beta}(\tau, \hat{r}_t, \beta_t)\sigma_\beta^2 dt + f_r(\tau, \hat{r}_t, \beta_t)f_\beta(\tau, \hat{r}_t, \beta_t)\rho\sigma_r\sigma_\beta dt \end{aligned} \quad (\text{A-3})$$

次に、裁定投資家の最適化問題の 1 階条件 ((7) 式) は、次のように書き直せる。

$$\begin{aligned} & E_t^{\mathcal{P}} \left[\frac{dP_t(\tau)}{P_t(\tau)} \right] \\ &= E_t^Q \left[\frac{dP_t(\tau)}{P_t(\tau)} \right] + a \text{Cov}_t^{\mathcal{P}} \left[\frac{dP_t(\tau)}{P_t(\tau)}, \int_0^{T^*} (\theta_0(s) + \alpha(s, P_t(s)) \log P_t(s) + \theta(s)\beta_t) \frac{dP_t(s)}{P_t(s)} ds \right] \end{aligned} \quad (\text{A-4})$$

ここで、無裁定条件より

$$E_t^Q \left[\frac{dP_t(\tau)}{P_t(\tau)} \right] = r_t dt \quad (\text{A-5})$$

である。(A-2) 式と (A-3) 式、(A-4) 式より、以下が得られる。

$$\begin{aligned} & f_r(\tau, \hat{r}_t, \beta_t)\kappa_r(\mu - \hat{r}_t)dt - f_\beta(\tau, \hat{r}_t, \beta_t)\kappa_\beta\beta_t dt \\ &= f_r(\tau, \hat{r}_t, \beta_t)\mu_r^Q(\hat{r}_t, \beta_t)dt + f_\beta(\tau, \hat{r}_t, \beta_t)\mu_\beta^Q(\hat{r}_t, \beta_t)dt \\ & \quad + a \text{Cov}_t^{\mathcal{P}} \left[dP_t(\tau), \int_0^{T^*} (\theta_0(s) + \alpha(s, P_t(s)) \log P_t(s) + \theta(s)\beta_t) \frac{dP_t(s)}{P_t(s)} ds \right] \end{aligned} \quad (\text{A-6})$$

ここで、

$$\begin{aligned}
& \text{Cov}_t^{\mathcal{P}} \left[dP_t(\tau), \int_0^{T^*} (\theta_0(s) + \alpha(s, P_t(s)) \log P_t(s) + \theta(s) \beta_t) \frac{dP_t(s)}{P_t(s)} ds \right] \\
&= \int_0^{T^*} (\theta_0(s) + \alpha(s, P_t(s)) \log P_t(s) + \theta(s) \beta_t) \text{cov}_t^{\mathcal{P}} \left[dP_t(\tau), \frac{dP_t(s)}{P_t(s)} \right] ds \\
&= \int_0^{T^*} \left(\frac{(\theta_0(s) + \alpha(s, P_t(s)) \log P_t(s) + \theta(s) \beta_t)}{P_t(s)} \times \right. \\
&\quad \left. \begin{pmatrix} f_r(\tau, \hat{r}_t, \beta_t) f_r(s, \hat{r}_t, \beta_t) \sigma_r^2 dt + f_\beta(\tau, \hat{r}_t, \beta_t) f_\beta(s, \hat{r}_t, \beta_t) \sigma_\beta^2 dt \\ + f_r(\tau, \hat{r}_t, \beta_t) f_\beta(s, \hat{r}_t, \beta_t) \rho \sigma_r \sigma_\beta dt + f_\beta(\tau, \hat{r}_t, \beta_t) f_r(s, \hat{r}_t, \beta_t) \rho \sigma_r \sigma_\beta dt \end{pmatrix} \right) ds
\end{aligned} \tag{A-7}$$

である。したがって、(A-6) 式は次のように行列の形式で表現することができる。

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} f_r(\tau, \hat{r}_t, \beta_t) & f_\beta(\tau, \hat{r}_t, \beta_t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_r^Q(\hat{r}_t, \beta_t) \\ \mu_\beta^Q(\hat{r}_t, \beta_t) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} f_r(\tau, \hat{r}_t, \beta_t) & f_\beta(\tau, \hat{r}_t, \beta_t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_r(\mu - \hat{r}_t) \\ -\kappa_\beta \beta_t \end{bmatrix} \\
&\quad - a \begin{bmatrix} f_r(\tau, \hat{r}_t, \beta_t) & f_\beta(\tau, \hat{r}_t, \beta_t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_r^2 & \rho \sigma_r \sigma_\beta \\ \rho \sigma_r \sigma_\beta & \sigma_\beta^2 \end{bmatrix} \\
&\quad \times \begin{bmatrix} \int_0^{T^*} \frac{(\theta_0(s) + \alpha(s, P_t(s)) \log f(s, \hat{r}_t, \beta_t) + \theta(s) \beta_t)}{f(s, \hat{r}_t, \beta_t)} f_r(s, \hat{r}_t, \beta_t) ds \\ \int_0^{T^*} \frac{(\theta_0(s) + \alpha(s, P_t(s)) \log f(s, \hat{r}_t, \beta_t) + \theta(s) \beta_t)}{f(s, \hat{r}_t, \beta_t)} f_\beta(s, \hat{r}_t, \beta_t) ds \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

上記の式は、任意の τ と \hat{r}_t 、 β_t について成立するため、以下のようにドリフト項が得られる。

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \mu_r^Q(\hat{r}_t, \beta_t) \\ \mu_\beta^Q(\hat{r}_t, \beta_t) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \kappa_r(\mu - \hat{r}_t) \\ -\kappa_\beta \beta_t \end{bmatrix} - a \begin{bmatrix} \sigma_r^2 & \rho \sigma_r \sigma_\beta \\ \rho \sigma_r \sigma_\beta & \sigma_\beta^2 \end{bmatrix} \\
&\quad \times \begin{bmatrix} \int_0^{T^*} \frac{(\theta_0(s) + \alpha(s, P_t(s)) \log f(s, \hat{r}_t, \beta_t) + \theta(s) \beta_t)}{f(s, \hat{r}_t, \beta_t)} f_r(s, \hat{r}_t, \beta_t) ds \\ \int_0^{T^*} \frac{(\theta_0(s) + \alpha(s, P_t(s)) \log f(s, \hat{r}_t, \beta_t) + \theta(s) \beta_t)}{f(s, \hat{r}_t, \beta_t)} f_\beta(s, \hat{r}_t, \beta_t) ds \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{*}$$

補論 B: 数値計算アルゴリズム

本稿では、モンテカルロ・シミュレーションを用いて国債価格を次のように数値的に導出している。

$$P_t(\tau) = f(\tau, \hat{r}_t, \beta_t) \approx \frac{1}{N_j} \sum_{j=1}^{N_j} \exp \left(- \sum_{i=t}^{t+N_j} r_i(j) h \right) \tag{B-1}$$

ここで、 $r_i(j)$ は j 番目のシミュレーション経路の i 期における短期金利、 T^* は最大年限（年数表示）、 N_{T^*} はシミュレーションの離散間隔 h に対応する最大年限（ $N_{T^*} = T^*/h$ ）、 N_j はシミュレーション回数である。シミュレーションでは、 $T^* = 20$ 年、 $h = 1/52$ （週次）、 $N_j = 10,000$ と設定する。 Q 測度における潜在金利と国債純供給の決定要因の動学過程を以下のように近似する。

$$\hat{r}_{i+1}(j) \approx \hat{r}_i(j) + \mu_r^Q(\hat{r}_i(j), \beta_i(j))h + \sigma_r \sqrt{h} \varepsilon_r(i; j) \quad (\text{B-2})$$

$$\beta_{i+1}(j) \approx \beta_i(j) + \mu_\beta^Q(\hat{r}_i(j), \beta_i(j))h + \sigma_\beta \sqrt{h} \varepsilon_\beta(i; j) \quad (\text{B-3})$$

ドリフト項の $\mu_r^Q(\hat{r}_i(j), \beta_i(j))$ と $\mu_\beta^Q(\hat{r}_i(j), \beta_i(j))$ については次のように近似する。

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mu_r^Q(\hat{r}_i(j), \beta_i(j)) \\ \mu_\beta^Q(\hat{r}_i(j), \beta_i(j)) \end{bmatrix} \\ & \approx \begin{bmatrix} \kappa_r(\mu - \hat{r}_i(j)) \\ -\kappa_\beta \beta_i(j) \end{bmatrix} - a \begin{bmatrix} \sigma_r^2 & \rho \sigma_r \sigma_\beta \\ \rho \sigma_r \sigma_\beta & \sigma_\beta^2 \end{bmatrix} \\ & \quad \times \sum_{l=1}^{N_l} \begin{bmatrix} w_l \left(\theta_0(s_l) + \alpha \left(s_l, f(s_l, \hat{r}_i(j), \beta_i(j)) \right) \log f(s_l, \hat{r}_i(j), \beta_i(j)) + \theta(s_l) \beta_i(j) \right) \\ \times \frac{f_r(s_l, \hat{r}_i(j), \beta_i(j))}{f(s_l, \hat{r}_i(j), \beta_i(j))} \\ w_l \left(\theta_0(s_l) + \alpha \left(s_l, f(s_l, \hat{r}_i(j), \beta_i(j)) \right) \log f(s_l, \hat{r}_i(j), \beta_i(j)) + \theta(s_l) \beta_i(j) \right) \\ \times \frac{f_\beta(s_l, \hat{r}_i(j), \beta_i(j))}{f(s_l, \hat{r}_i(j), \beta_i(j))} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B-4})$$

ここで、 ρ は $\varepsilon_r(i; j)$ と $\varepsilon_\beta(i; j)$ の相関係数であり、 w_l は Heiss and Winschel (2008)にもとづくスパースグリッドによる数値積分で使用したウェイトである。

VV-ELB モデルの数値計算アルゴリズム： $\alpha = 0$ のケース

本稿では、 $\alpha = 0$ とした VV-ELB モデルの解を近似により数値的に導出している。具体的には、第一に、ドリフト項（(*) 式）を $(r_t, \beta_t) = (\mu_r^*, \mu_\beta^*)$ 近傍で線形近似している。このとき Q 測度のもとでの潜在金利と国債純供給の決定要因の確率過程は以下のように簡略化される。

$$\begin{bmatrix} dr_t \\ d\beta_t \end{bmatrix} = \kappa^* \begin{bmatrix} \mu_r^* - r_t \\ \mu_\beta^* - \beta_t \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \sigma_r dB_{r,t} \\ \sigma_\beta dB_{\beta,t} \end{bmatrix} \quad (\text{B-5})$$

ここで、 κ^* 、 μ_r^* 、と μ_β^* は以下を満たす。

$$\begin{aligned} \mu_r^Q(r_t, \beta_t) & \approx \mu_r^Q(\mu_r^*, \mu_\beta^*) + \frac{\partial \mu_r^Q}{\partial r}(\mu_r^*, \mu_\beta^*)(r_t - \mu_r^*) + \frac{\partial \mu_r^Q}{\partial \beta}(\mu_r^*, \mu_\beta^*)(\beta_t - \mu_\beta^*), \\ & = \kappa_{11}^* \mu_r^* + \kappa_{12}^* \mu_\beta^* - \kappa_{11}^* r_t - \kappa_{12}^* \beta_t, \end{aligned} \quad (\text{B-6})$$

$$\begin{aligned}\mu_\beta^Q(r_t, \beta_t) &\approx \mu_\beta^Q(\mu_r^*, \mu_\beta^*) + \frac{\partial \mu_\beta^Q}{\partial r}(\mu_r^*, \mu_\beta^*)(r_t - \mu_r^*) + \frac{\partial \mu_\beta^Q}{\partial \beta}(\mu_r^*, \mu_\beta^*)(\beta_t - \mu_\beta^*), \\ &= \kappa_{21}^* \mu_r^* + \kappa_{22}^* \mu_\beta^* - \kappa_{21}^* r_t - \kappa_{22}^* \beta_t,\end{aligned}\tag{B-7}$$

したがって、次の式が成立する。

$$\mu_r^Q(\mu_r^*, \mu_\beta^*) - \frac{\partial \mu_r^Q}{\partial r}(\mu_r^*, \mu_\beta^*) \mu_r^* - \frac{\partial \mu_r^Q}{\partial \beta}(\mu_r^*, \mu_\beta^*) \mu_\beta^* = \kappa_{11}^* \mu_r^* + \kappa_{12}^* \mu_\beta^*\tag{B-8}$$

$$-\frac{\partial \mu_r^Q}{\partial r}(\mu_r^*, \mu_\beta^*) = \kappa_{11}^*\tag{B-9}$$

$$-\frac{\partial \mu_r^Q}{\partial \beta}(\mu_r^*, \mu_\beta^*) = \kappa_{12}^*\tag{B-10}$$

$$\mu_\beta^Q(\mu_r^*, \mu_\beta^*) - \frac{\partial \mu_\beta^Q}{\partial r}(\mu_r^*, \mu_\beta^*) \mu_r^* - \frac{\partial \mu_\beta^Q}{\partial \beta}(\mu_r^*, \mu_\beta^*) \mu_\beta^* = \kappa_{21}^* \mu_r^* + \kappa_{22}^* \mu_\beta^*\tag{B-11}$$

$$-\frac{\partial \mu_\beta^Q}{\partial r}(\mu_r^*, \mu_\beta^*) = \kappa_{21}^*\tag{B-12}$$

$$-\frac{\partial \mu_\beta^Q}{\partial \beta}(\mu_r^*, \mu_\beta^*) = \kappa_{22}^*\tag{B-13}$$

第二に、Pribsch (2013) と Ueno (2017) に従って、国債価格関数に対して次のような二次近似を実施する。

$$P_t(\tau) = f(\tau, r_t, \beta_t) \approx \exp\left(-E_t^Q \left[\int_t^T \max(r_u, b) du \right] + \frac{1}{2} \text{Var}_t^Q \left[\int_t^T \max(r_u, b) du \right]\right)\tag{B-14}$$

このとき、ドリフト項は次のように表すことができる。

$$\begin{aligned}&\mu_r^Q(\mu_r^*, \mu_\beta^*) \\ &= \kappa_r(\mu - \mu_r^*) - a[\sigma_r^2 \quad \rho\sigma_r\sigma_\beta] \left[\begin{array}{c} \int_0^{T^*} \frac{(\theta_0(s) + \theta(s)\mu_\beta^*)f_r(s, \mu_r^*, \mu_\beta^*)}{f(s, \mu_r^*, \mu_\beta^*)} ds \\ + \int_0^{T^*} \frac{(\theta_0(s) + \theta(s)\mu_\beta^*)f_\beta(s, \mu_r^*, \mu_\beta^*)}{f(s, \mu_r^*, \mu_\beta^*)} ds \end{array} \right] \\ &= \kappa_r(\mu - \mu_r^*) \\ &\quad - a \int_0^{T^*} \left[\sigma_r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \rho\sigma_r\sigma_\beta \frac{\partial}{\partial \beta} \right] \left\{ \begin{array}{c} (\theta_0(s) + \theta(s)\mu_\beta^*) \times \\ \left(-E_t^Q \left[\int_t^{t+s} \max(r_u, b) du \right] \right) \\ + \frac{1}{2} \text{Var}_t^Q \left[\int_t^{t+s} \max(r_u, b) du \right] \end{array} \right\} \Big|_{r=\mu_r^*, \beta=\mu_\beta^*} ds \\ &\mu_\beta^Q(\mu_r^*, \mu_\beta^*)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\kappa_\beta \mu_\beta^* - a[\rho\sigma_r\sigma_\beta \quad \sigma_\beta^2] \left[\begin{array}{c} \int_0^{T^*} \frac{(\theta_0(s) + \theta(s)\mu_\beta^*)f_r(s, \mu_r^*, \mu_\beta^*)}{f(s, \mu_r^*, \mu_\beta^*)} ds \\ \int_0^{T^*} \frac{(\theta_0(s) + \theta(s)\mu_\beta^*)f_\beta(s, \mu_r^*, \mu_\beta^*)}{f(s, \mu_r^*, \mu_\beta^*)} ds \end{array} \right] \\
&= -\kappa_\beta \mu_\beta^* \\
&\quad (\theta_0(s) + \theta(s)\mu_\beta^*) \times \\
&\quad -a \int_0^{T^*} \left[\rho\sigma_r\sigma_\beta \frac{\partial}{\partial r} + \sigma_\beta^2 \frac{\partial}{\partial \beta} \right] \left\{ \begin{array}{c} -E_t^Q \left[\int_t^{t+s} \max(r_u, b) du \right] \\ + \frac{1}{2} \text{Var}_t^Q \left[\int_t^{t+s} \max(r_u, b) du \right] \end{array} \right\} \Bigg|_{r=\mu_r^*, \beta=\mu_\beta^*} ds
\end{aligned}$$

また、ドリフト項の国債利回りの決定要因に対する偏微分は次のようになる。

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mu_r^Q}{\partial r}(\mu_r^*, \mu_\beta^*) && \text{(B-15)} \\
&= -\kappa_r
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\quad (\theta_0(s) + \theta(s)\mu_\beta^*) \times \\
&\quad -a \int_0^{T^*} \left[\sigma_r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \rho\sigma_r\sigma_\beta \frac{\partial^2}{\partial r\partial\beta} \right] \left\{ \begin{array}{c} -E_t^Q \left[\int_t^{t+s} \max(r_u, b) du \right] \\ + \frac{1}{2} \text{Var}_t^Q \left[\int_t^{t+s} \max(r_u, b) du \right] \end{array} \right\} \Bigg|_{r=\mu_r^*, \beta=\mu_\beta^*} ds
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mu_\beta^Q}{\partial r}(\mu_r^*, \mu_\beta^*) \quad \text{(B-16)}$$

$$\begin{aligned}
&\quad (\theta_0(s) + \theta(s)\mu_\beta^*) \times \\
&= -a \int_0^{T^*} \left[\rho\sigma_r\sigma_\beta \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \sigma_\beta^2 \frac{\partial^2}{\partial r\partial\beta} \right] \left\{ \begin{array}{c} -E_t^Q \left[\int_t^{t+s} \max(r_u, b) du \right] \\ + \frac{1}{2} \text{Var}_t^Q \left[\int_t^{t+s} \max(r_u, b) du \right] \end{array} \right\} \Bigg|_{r=\mu_r^*, \beta=\mu_\beta^*} ds
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mu_r^Q}{\partial \beta}(\mu_r^*, \mu_\beta^*) \quad \text{(B-17)}$$

$$\begin{aligned}
&\quad \theta(s) \times \\
&= -a \int_0^{T^*} \left[\sigma_r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \rho\sigma_r\sigma_\beta \frac{\partial}{\partial \beta} \right] \left\{ \begin{array}{c} -E_t^Q \left[\int_t^{t+s} \max(r_u, b) du \right] \\ + \frac{1}{2} \text{Var}_t^Q \left[\int_t^{t+s} \max(r_u, b) du \right] \end{array} \right\} \Bigg|_{r=\mu_r^*, \beta=\mu_\beta^*} ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \mu_\beta^Q}{\partial \beta}(\mu_r^*, \mu_\beta^*) \\
&= -\kappa_\beta - a \int_0^{T^*} \left\{ \left[\rho \sigma_r \sigma_\beta \frac{\partial^2}{\partial r \partial \beta} + \sigma_\beta^2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right] \left\{ \begin{array}{l} (\theta_0(s) + \theta(s)\mu_\beta^*) \times \\ -E_t^Q \left[\int_t^{t+s} \max(r_u, b) du \right] \\ + \frac{1}{2} \text{Var}_t^Q \left[\int_t^{t+s} \max(r_u, b) du \right] \end{array} \right\} \Big|_{r=\mu_r^*, \beta=\mu_\beta^*} \right\} ds \\
& \quad - a \int_0^{T^*} \left\{ \left[\rho \sigma_r \sigma_\beta \frac{\partial}{\partial r} + \sigma_\beta^2 \frac{\partial}{\partial \beta} \right] \left\{ \begin{array}{l} \theta(s) \times \\ -E_t^Q \left[\int_t^{t+s} \max(r_u, b) du \right] \\ + \frac{1}{2} \text{Var}_t^Q \left[\int_t^{t+s} \max(r_u, b) du \right] \end{array} \right\} \Big|_{r=\mu_r^*, \beta=\mu_\beta^*} \right\} ds
\end{aligned}$$

Genz (2004) にもとづく 2 変数正規分布関数の数値計算アルゴリズムと Heiss and Winschel (2008) のスパースグリッドによる数値積分手法を用いて、 $(\kappa^*, \mu_r^*, \mu_\beta^*)$ を (B-8) 式から (B-13) 式、および (B-15) 式から (B-18) 式を満たすよう数値的に導出する。

VV-Alpha モデルの数値計算アルゴリズム

VV-Alpha モデルを数値的に解く際には、わが国における YCC と整合的になるよう目標年限 (τ^*) を 10 年とし利回り上限 (y^*) を 25bps と設定する。国債価格の初期値については、状態と残存年数の空間を離散化したうえで、 $\alpha = 0$ のケースについて VV モデルを数値的に解いた解を使用する。 α の値ごとに、この国債価格を所与として、 α 関数 ((10) 式) を明示的に導入したうえで、cubic spline 補間 (Dierckx, 1993) とモンテカルロ・シミュレーションで数値的に求めた解が収束するまで反復することにより、国債価格を数値的に導出する。

補論 C: データ

残存期間別国債残高データ

Koeda and Kimura (2022) の残存年数別国債残高データベースを使用する。このデータベースには、日本銀行、財務省、日本証券業協会から、各年度末時点における銘柄レベルの情報を 1965 年度末から現在まで収集されており、これを用いることで、GDP 比で示した各年度末時点における残存年数別国債残高 (日本銀行および特定期間選好をもつ民間投資家の保有分を除く) を算出することができる。本稿では、残存期間が 1 年から 20 年の国債残高の GDP 比に対して主成分分析を実施し、その第一主成分を国債純供給の決定要因の代理変数とする (本論図 2 に掲載)。なお、カリブレーションに用いた期間は 1995 年度から 2014 年度である。

TIBOR の専門家予想に関するサーベイ・データ

先行きの3か月物 TIBOR レートの専門家予想に関するサーベイ・データは、コンセンサス・フォーキャストから 2017 年より四半期で利用可能である。本サーベイは各四半期初に実施されており、Wright (2011) に従って、時点調整をサーベイ結果は毎四半期末時点の予想を反映するとして実施した。なお、利用可能なデータの制約から 2017 年 1 月から 2021 年 10 月までのデータを使用している。また、名目金利の実効下限制約の影響を軽減するため、4 年以上先の予予想値を使用している。

国債利回りデータ

1989 年から利用可能なブルームバーグのゼロ・クーポン国債利回りのデータを使用する。本稿では、標本期間を 1995 年度から 2014 年度とし、3 か月、1 年、2 年、5 年、10 年、20 年物の利回りを使用している。

補論 D: 拡張カルマン・フィルターによるカリブレーション

パラメーター(ρ と a)は、下記のように近似された観測方程式などからなる拡張カルマン・フィルターにもとづく疑似最尤法により推計する。

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{f}(\hat{r}_t, \beta_t) + \mathbf{w}_t$$

ここで、

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\hat{r}_t, \beta_t) &\approx \mathbf{f}(\hat{E}[\hat{r}_t | \beta_t, \mathcal{F}_{t-1}], \beta_t) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial r}(\hat{E}[\hat{r}_t | \beta_t, \mathcal{F}_{t-1}], \beta_t)(\hat{r}_t - \hat{E}[\hat{r}_t | \beta_t, \mathcal{F}_{t-1}]) \\ &\equiv \mathbf{A}_0(\hat{E}[\hat{r}_t | \beta_t, \mathcal{F}_{t-1}], \beta_t) + \mathbf{A}_r(\hat{E}[\hat{r}_t | \beta_t, \mathcal{F}_{t-1}], \beta_t)\hat{r}_t \end{aligned}$$

であり、 \mathbf{y}_t は様々な年限の国債利回りからなるベクトル、 \mathbf{w}_t はそれぞれ分散が異なる独立同分布な観測誤差からなるベクトルである。また、状態方程式は以下のように与えられる。

$$\begin{bmatrix} d\hat{r}_t \\ d\beta_t \end{bmatrix} = \kappa \begin{bmatrix} \mu - \hat{r}_t \\ -\beta_t \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \sigma_r dB_{r,t} \\ \sigma_\beta dB_{\beta,t} \end{bmatrix}, \kappa \equiv \begin{bmatrix} \kappa_r & 0 \\ 0 & \kappa_\beta \end{bmatrix}$$

ここで、 \hat{r}_t は潜在変数、 β_t は観測可能な変数とする。 $\hat{E}[\hat{r}_t | \beta_t, \mathcal{F}_{t-1}]$ は、時点 $t-1$ までの情報集合 (\mathcal{F}_{t-1}) と時点 t の国債純供給の決定要因をもとにした潜在金利の線形射影を表す。初期値を $\hat{E}[\hat{r}_1 | \beta_1, \mathcal{F}_0] = \hat{E}[\hat{r}_1 | \mathcal{F}_0] + \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} (\beta_1 - \hat{E}[\beta_1 | \mathcal{F}_0]) = \mu + \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \beta_1, P_{r,1|0} = \sigma_r^2 / (2\kappa_r)$ と設定し、以下の式を予測と更新ステップに用いる。

$$\hat{E}[\hat{r}_{t+1} | \beta_{t+1}, \mathcal{F}_t] = \hat{E}[\hat{r}_{t+1} | \mathcal{F}_t] + \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} (\beta_{t+1} - e^{-\kappa_\beta} \beta_t)$$

ここで

$$\begin{aligned} &\hat{E}[\hat{r}_{t+1} | \mathcal{F}_t] \\ &= (1 - e^{-\kappa_r})\mu + e^{-\kappa_r} \hat{E}[\hat{r}_t | \mathcal{F}_{t-1}] + e^{-\kappa_r} \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} e^{-\kappa_\beta t} \int_{t-1}^t e^{\kappa_\beta s} \sigma_\beta dB_{\beta,s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + e^{-\kappa r} [P_{r,t|t-1} - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{12}^T] A_r(\hat{E}[\hat{r}_t | \beta_t, \mathcal{F}_{t-1}], \beta_t)^\top \\
& \times \left[\begin{array}{c} A_r(\hat{E}[\hat{r}_t | \beta_t, \mathcal{F}_{t-1}], \beta_t) P_{r,t|t-1} A_r(\hat{E}[\hat{r}_t | \beta_t, \mathcal{F}_{t-1}], \beta_t)^\top \\ -A_r(\hat{E}[\hat{r}_t | \beta_t, \mathcal{F}_{t-1}], \beta_t) \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{12}^T A_r(\hat{E}[\hat{r}_t | \beta_t, \mathcal{F}_{t-1}], \beta_t)^\top + R \end{array} \right]^{-1} \\
& \times \left(\begin{array}{c} y_t - A_0(\hat{E}[\hat{r}_t | \beta_t, \mathcal{F}_{t-1}], \beta_t) - A_r(\hat{E}[\hat{r}_t | \beta_t, \mathcal{F}_{t-1}], \beta_t) \hat{E}[\hat{r}_t | \mathcal{F}_{t-1}] \\ -A_r(\hat{E}[\hat{r}_t | \beta_t, \mathcal{F}_{t-1}], \beta_t) \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} e^{-\kappa \beta t} \int_{t-1}^t e^{\kappa \beta s} \sigma_\beta dB_{\beta,s} \end{array} \right)
\end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned}
& P_{r,t+1|t} \\
= & e^{-\kappa r} (P_{r,t|t-1} - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{12}^T) e^{-\kappa r^\top} \\
& - e^{-\kappa r} (P_{r,t|t-1} - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{12}^T) A_r(\hat{E}[\hat{r}_t | \beta_t, \mathcal{F}_{t-1}], \beta_t)^\top \\
& \times \left[A_r(\hat{E}[\hat{r}_t | \beta_t, \mathcal{F}_{t-1}], \beta_t) (P_{r,t|t-1} - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{12}^T) A_r(\hat{E}[\hat{r}_t | \beta_t, \mathcal{F}_{t-1}], \beta_t)^\top + R \right]^{-1} \\
& \times A_r(\hat{E}[\hat{r}_t | \beta_t, \mathcal{F}_{t-1}], \beta_t) (P_{r,t|t-1} - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{12}^T)^\top e^{-\kappa r^\top} + \Sigma_{11}
\end{aligned}$$

となる。各パラメーターと観測誤差の標準偏差に関する推計値は以下の通りとなる。

ρ	-0.2852
a	15.067
3M	0.0012
1Y	0.0008
2Y	0.0012
5Y	0.0041
10Y	0.0065
20Y	0.0075

参考文献

- 黒田東彦、「『長短金利操作付き量的・質的金融緩和』：導入後半年を経て」、ロイター・ニューズメーカー、2017年
- 、「経済・物価見通しと金融政策運営」、内外情勢調査会、2021年 a
- 、「金融政策と企業行動：金融政策の効果波及経路と日本企業の構造変化」、日本経済団体連合会審議員会、2021年 b
- 日本銀行、「『量的・質的金融緩和』導入以降の経済・物価動向と政策効果についての総括的な検証【背景説明】」、2016年
- 、「より効果的で持続的な金融緩和を実施していくための点検【背景説明】」、2021年
- 、「当面の金融政策運営について」、2022年
- Bernanke, Ben, “The Latest from the Bank of Japan,” Brookings Institution Ben Bernanke’s Blog, September 21, 2016.
- Carlson, Mark, Stefania D’Amico, Cristina Fuentes-Albero, Bernd Schlusche, and Paul Wood, “Issues in the Use of the Balance Sheet Tool,” Finance and Economics Discussion Series 2020-070, Federal Reserve Board, 2020.
- Chaurushiya, Radha, and Ken Kuttner, “Targeting the Yield Curve: The Experience of the Federal Reserve, 1942-1951,” memorandum to the Federal Open Market Committee, Board of Governors of the Federal Reserve System, Division of Research and Statistics, June 18, 2003, <https://www.federalreserve.gov/monetarypolicy/2003-fomc-memos.htm>.
- D’Amico, Stefania, and Thomas King, “Flow and Stock Effects of Large-Scale Treasury Purchases: Evidence on the Importance of Local Supply,” *Journal of Financial Economics*, 108(2), 2013, pp.425–448.
- Dierckx, Paul, *Curve and Surface Fitting with Splines*, Oxford University Press, 1993.
- Federal Reserve Board, “Minutes of the Federal Open Market Committee June 9–10, 2020,” July 1, 2020.
- Fukunaga, Ichiro, Naoya Kato, and Junko Koeda, “Maturity Structure and Supply Factors in Japanese Government Bond Markets,” *Monetary and Economic Studies*, 33, Institute for Monetary and Economic Studies, Bank of Japan, 2015, pp.45-96.
- Genz, Alan, “Numerical Computation of Rectangular Bivariate and Trivariate Normal and t Probabilities,” *Statistics and Computing*, 14, 2004, pp. 251–260.
- Grande, Giuseppe, Adriana Grasso, and Gabriele Zinna, “The Effectiveness of the ECB’s Asset Purchases at the Lower Bound,” *Questioni di Economia e Finanza (Occasional Papers)*, 2019.

- Hamilton, James and Jing Cynthia Wu, “The Effectiveness of Alternative Monetary Policy Tools in a Zero Lower Bound Environment,” *Journal of Money, Credit and Banking*, 44 (s1), 2012, pp. 3-46.
- Harvey, Andrew, *Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter*, Cambridge University Press, 1989.
- Hattori, Takahiro and Yoshida, Jiro, “Yield Curve Control,” 2021 (available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=3396251>).
- Heiss, Florian, and Viktor Winschel, “Likelihood Approximation by Numerical Integration on Sparse Grids,” *Journal of Econometrics*, 14(1), May 2008, pp. 62–80.
- Higgins, Matthew and Thomas Klitgaard, “Japan’s Experience with Yield Curve Control,” Federal Reserve Bank of New York Liberty Street Economics, June 22, 2020, <https://libertystreeteconomics.newyorkfed.org/2020/06/japans-experience-with-yield-curve-control.html>.
- Ito, Takayasu, “Short-Term Cross-Currency Basis Swap and Japanese Government Bond Markets under Non-Traditional Monetary Policy,” *Asia-Pacific Contemporary Finance and Development (International Symposia in Economic Theory and Econometrics)*, 26), Emerald Publishing Limited, Bingley, 2019, pp. 27-39.
- Keynes, John, *The General Theory of Employment, Interest, and Money*, London: Macmillan, 1936 (塩野谷祐一訳『雇用・利子および貨幣の一般理論 (普及版)』、東洋経済新報社、2001年) .
- King, Thomas, “Expectation and Duration at the Effective Lower Bound,” *Journal of Financial Economics*, 134(3), 2019, pp.736–760.
- Koeda, Junko, and Yosuke Kimura, “Government Debt Maturity and the Term Structure in Japan,” 2022 (available at SSRN: https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=4015576).
- Lucca, David and Jonathan Wright, “The Narrow Channel of Quantitative Easing: Evidence from YCC Down Under,” Federal Reserve Bank of New York Staff Reports, No. 1013, 2022.
- Pribsch, Marcel, “Computing Arbitrage-Free Yields in Multi-Factor Gaussian Shadow-Rate Term Structure Models,” Finance and Economics Discussion Series 2013-63, Federal Reserve Board, 2013.
- Reserve Bank of Australia, “Minutes of the Monetary Policy Meeting of the Reserve Bank Board,” November 2, 2021.
- Sudo, Nao and Masaki Tanaka, “Quantifying Stock and Flow Effects of QE,” *Journal of Money, Credit and Banking*, 53(7), 2021, pp. 1719-1755.
- Tobin, James, “A General Equilibrium Approach to Monetary Theory,” *Journal of Money, Credit and Banking*, 1(1), 1969, pp. 15-29.

- Ueno, Yoichi, “Term Structure Models with Negative Interest Rates,” Bank of Japan IMES Discussion Paper No. 2017-E-1, Institute for Monetary and Economic Studies, Bank of Japan, 2017.
- Vayanos, Dimitri, and Jean-Luc Vila, “A Preferred-Habitat Model of the Term Structure of Interest Rates,” *Econometrica*, 89(1), 2021, pp. 77–112.
- Wallace, Neil, “A Modigliani-Miller Theorem for Open-Market Operations,” *American Economic Review* 71(3), 1981, pp. 267–274.
- Wright, Jonathan, “Term Premia and Inflation Uncertainty: Empirical Evidence from an International Panel Dataset,” *American Economic Review*, 101(4), 2011, pp.1514-1534.