



日本銀行ワーキングペーパーシリーズ

Broad
Perspective
Review

多角的レビューシリーズ

自然利子率の計測をめぐる近年の動向

杉岡優*

yuu.sugioka@boj.or.jp

中野将吾*

shougo.nakano@boj.or.jp

山本弘樹**

hiroki.yamamoto@boj.or.jp

No.24-J-9
2024 年 8 月

日本銀行
〒103-8660 日本郵便（株）日本橋郵便局私書箱 30 号

* 企画局

** 企画局（現・国際局）

日本銀行ワーキングペーパーシリーズは、日本銀行員および外部研究者の研究成果をとりまとめたもので、内外の研究機関、研究者等の有識者から幅広くコメントを頂戴することを意図しています。ただし、論文の中で示された内容や意見は、日本銀行の公式見解を示すものではありません。

なお、ワーキングペーパーシリーズに対するご意見・ご質問や、掲載ファイルに関するお問い合わせは、執筆者までお寄せ下さい。

商用目的で転載・複製を行う場合は、予め日本銀行情報サービス局 (post.prd8@boj.or.jp) までご相談下さい。転載・複製を行う場合は、出所を明記して下さい。

自然利子率の計測を巡る近年の動向*

杉岡 優[†] 中野 将吾[‡] 山本 弘樹[§]

2024 年 8 月

【要 旨】

自然利子率 (r^*) は景気や物価に対して中立的な実質金利の水準であり、金融政策スタンスを評価する際のベンチマークの一つとして知られている。 r^* は、直接観察することができないため、何らかの仮定に基づいて推計する必要がある。本稿では、 r^* を推計するために、これまで考案されてきた複数の手法について、それぞれ特徴を整理したうえで、わが国経済への適用を行った。推計された r^* をみると、いずれの推計値も長期的にみて低下傾向にあることが確認された。もっとも、 r^* の推計結果には、用いる手法により、大きなばらつきが存在するほか、新たなデータが追加されると、事後的にみて現在の推計値が変わり得るという性質がある。そのため、政策運営にあたっては、相当の幅を持って評価する必要がある。

JEL 分類番号 : C32、E43、E52

キーワード : 自然利子率、均衡実質金利、均衡イールドカーブ、期間構造

* 本稿の執筆に当たっては、安藤雅俊氏、伊藤雄一郎氏、長田充弘氏、開発壮平氏、小枝淳子氏、小林慶一郎氏、佐々木貴俊氏、中島上智氏、長野哲平氏、中村康治氏、畑山優大氏、福永一郎氏、「金融政策の多角的レビュー」に関するワークショップ第 1 回「非伝統的金融政策の効果と副作用」の参加者、31th SNDE Annual Symposium の参加者、および日本銀行スタッフから有益なコメントを頂戴した。ただし、残された誤りは全て筆者らに帰する。なお、本稿の内容と意見は筆者ら個人に属するものであり、日本銀行の公式見解を示すものではない。

[†] 日本銀行企画局 (yuu.sugioka@boj.or.jp)

[‡] 日本銀行企画局 (shougo.nakano@boj.or.jp)

[§] 日本銀行企画局 (現・国際局、hiroki.yamamoto@boj.or.jp)

1. はじめに

自然利子率 (r^*) は景気や物価に対して中立的な実質金利の水準を指す¹。 r^* の概念は、中央銀行にとって金融政策運営上のベンチマーク指標の一つとして重要なものであるため、経済学者や中央銀行エコノミストらによって多くの計測手法が提案されてきている。もっとも、 r^* の推計値には、用いる手法・インプットデータ等の違いによって、相応の不確実性があることが指摘されている (Brand, Bielecki and Penalver, 2018)。このため、それぞれの手法の特徴を把握しながら、複数の手法を組み合わせて動向を把握することが望ましいと考えられる。実際、海外の中央銀行において r^* の推計値を示す際には、いくつかの推計手法による範囲を示すことで、推計の不確実性を示しながら対外発信する場合が多い^{2,3}。わが国においてはこれまで、鎌田 (2009)、岩崎他 (2016)、新谷・宮尾 (2018)などが複数の推計手法によって r^* の動向を分析している。また、非伝統的金融政策が多くの中央銀行によって採用されるようになって以降、 r^* の概念をイールドカーブ全体に拡張した「均衡イールドカーブ」に関する研究も徐々にではあるが蓄積してきている。

本稿では、これまで提案されてきた r^* の推計手法のサーベイを行ったうえで、それらの手法を類型ごとに整理し、その特徴・留意点を概説する。併せて、 r^* の概念を長期年限へ拡張した研究についても紹介する。そのうえで、複数の代表的な手法を用いてわが国の r^* の推計を行い、その動向を確認する。

分析の結果、わが国の r^* は長期的にみて緩やかな低下傾向にあることが確認された。もっとも、その推計値には、これまで先行研究で指摘されてきている通り、相応の不確実性が存在している。こうした特徴は、米欧を対象とした近年の研究でも確認されている (Benigno et al., 2024)。

本稿の構成は以下のとおりである。2節では、 r^* を推計するために提案されている複数の手法について概説したうえで、その類型ごとの特徴点を整理する。その流れで、近年みられる均衡イールドカーブ等の長期年限の均衡実質金利の推計を試みた研究

¹ 由来する経済モデルにより、自然利子率は、均衡実質金利や中立利子率といった異なる呼び方がなされるが、本稿ではそれらの区別をしない。通常、自然利子率は、無リスクかつ短期の実質金利に対応した概念である。

² 例えば、FRB (2018)は、7種類の自然利子率の推計値からなる推計の幅を記載している。このほか、ECB 理事講演である Lane (2022)は、8種類の自然利子率からなる推計の幅を示している。

³ 海外の中央銀行も、度々 r^* の推計値の不確実性に関して情報発信をしている。例えば、Yellen (2015)は、足もとの r^* の推計値・先行き予測に対する不確実性の高さに言及している。このほか、Bailey (2022)、Borio (2021)、Brand, Lisack and Mazelis (2024)では、 r^* の推計値は不確実性が大きいことから、金融政策の意思決定の直接的なガイドというよりは、事後的な金融政策スタンスの評価指標と考えるべきと述べている。Brand, Bielecki and Penalver (2018)は、モデル選択の不確実性に加えて、スムージングを行う手法において、新たなデータが追加されると、過去の値が大きく変わってしまう、いわゆるリアルタイム問題についても言及している。

についても、併せて紹介する。3節では、複数の推計手法から得られたわが国の r^* の動向を確認する。4節はまとめである。

2. 自然利子率の推計手法

本節では、自然利子率 (r^*) の推計手法を類型ごとに整理し、その特徴について解説する。併せて、 r^* の概念を長期年限まで拡張した近年の研究についても紹介する。

2-1. 推計手法の類型

自然利子率 (r^*) は、均衡実質金利・中立利子率とも呼ばれ、古くから経済学者の注目を集める概念であった。実質金利が r^* から乖離すると、物価に変動が生じるという議論は、古くは Wicksell (1898)まで遡る。その後、Woodford (2003)が、ニューケインジアン理論と r^* の関係を整理したことで、再びその考え方が注目を集めることとなった。この時期における代表的な実証研究としては、Laubach and Williams (2003)が挙げられる。彼らは、IS 曲線やフィリップス曲線などを仮定した準構造型のモデルを構築し、それらと整合的な r^* の水準を求める手法を考案した。需給ギャップの動向を考慮する金融政策運営と親和性もあり、彼らのモデルや、それらを発展させた実証モデルは、現在でも、各国中央銀行で広く用いられている⁴。

その後、Laubach and Williams (2003)のような準構造モデル以外にも、金利の期間構造から短期金利の長期予想としての r^* を計測する手法 (Kim, Walsh and Wei, 2019 等) や、時系列的な手法を用いて実質金利の長期トレンドを抽出し、それを r^* と見做す手法 (Del Negro et al., 2017 等) などが提案され、推計手法のバリエーションは広がった。

Obstfeld (2023)は、これまで提案されてきた r^* の推計手法を以下の4つの類型にまとめている (表1)。すなわち、①時系列分析の手法を用いて金利の長期予想ないしトレンドを推計し、 r^* と見做すもの (時系列モデル)、②金利の期間構造モデルを用いて、市場における実質金利の長期の予想値を推計するもの (期間構造モデル)、③Laubach and Williams (2003)などの、経済構造の一部を仮定した準構造モデル、および④各経済主体の行動にミクロ的基礎付けを持たせた構造モデル、の4類型である。以下では、この類型に基づき、各推計手法の特徴を整理していく。

⁴ r^* は、いくつかの仮定を置くと、長期的には潜在成長率の水準に一致する。そのため、経済分析の実務上は潜在成長率を r^* の近似値と見做すことも多い。もっとも、潜在成長率は、経済の供給面に着目し、その長期トレンドを捉えようとする概念である一方、 r^* は、需要面の短期的な変動を捉えうるほか、金融市場特有の要因を受ける可能性もある。そのため、 r^* を捕捉するにあたっては、長期的な近似値として潜在成長率を追うだけではなく、短期的な諸要因を考慮に入れる推計が求められる。こうした点に関する理論的な整理は、例えば小田・村永 (2003)を参照。

(表 1) 推計手法の類型

類 型	考え方	先行研究
時系列モデル	・時系列の手法を用いて金利の長期トレンドを推計し、自然利子率と見做す。	・ Del Negro et al. (2017) ・ Kiley (2020a)
期間構造モデル	・金利の期間構造（イールドカーブの情報）を用いて、市場における短期金利の予想パスを抽出し、自然利子率と見做す。	・ Kim, Walsh and Wei (2019) ・ Bauer and Rudebusch (2020)
準構造モデル	・ IS曲線、フィリップス曲線などの構造方程式を仮定し、需給ギャップをゼロとする景気中立的な利子率の水準を推計し、自然利子率と見做す。	・ Holston, Laubach and Williams (2023) ・ Brand and Mazelis (2019)
構造モデル	・経済主体の行動にミクロ的基礎付けを与え、名目硬直性が存在しない、価格が完全に伸縮的な均衡における利子率の水準を推計し、自然利子率と見做す。	・ Barsky, Justiniano and Melosi (2014) ・ 岡崎・須藤 (2018)

(注) 分類は Obstfeld (2023)に基づく。

2-2. 各手法の特徴

本節では、自然利子率の推計手法について、その類型ごとの特徴を整理する。

2-2-1. 時系列モデル

時系列モデルを用いた推計手法では、実質金利のデータから、金利の趨勢成分（トレンド成分）を抽出する。中央銀行が、テイラールールに代表されるカウンターシクリカルな金融政策（需要超過・物価上昇局面において r^* 対比で政策金利を引き上げ、供給超過・物価下落局面において r^* 対比で政策金利を引き下げる政策）を行っている場合、観察される実質短期金利は r^* の周辺を変動していることになる。この場合、実質金利のトレンドを抽出することができれば、それを r^* の推計値と見做すことが可能である。

当類型のうち、最もシンプルな手法は、HP フィルター等を用いて、実質短期金利の時系列データからトレンドを抽出し、 r^* と見做すことである（鎌田、2009、岩崎他、2016 等）。これらはもっとも簡便な例であるが、実質短期金利以外の、例えば物価動向などの情報も勘案した、より発展的な時系列モデルも存在する。例えば、代表的な研究である Del Negro et al. (2017)は、名目短期金利、名目長期金利、市場から示唆される名目短期金利の先行き予想、インフレ率、インフレ予想の 5 変数から、3 つの共

通トレンドを抽出し、それらが、一定の関係を持つことを仮定している⁵。具体的には、各変数のトレンド成分に以下の関係性を仮定する。

$$\text{名目短期金利のトレンド} = \bar{\pi}_t + \bar{r}_t \quad (1-1)$$

$$\text{名目長期金利のトレンド} = \bar{\pi}_t + \bar{r}_t + \bar{tp}_t \quad (1-2)$$

$$\text{予想名目短期金利のトレンド} = \bar{\pi}_t + \bar{r}_t \quad (1-3)$$

$$\text{インフレ率のトレンド} = \bar{\pi}_t \quad (1-4)$$

$$\text{インフレ予想のトレンド} = \bar{\pi}_t \quad (1-5)$$

ここで、右辺のバー付き変数は各変数が持つ共通トレンドを表しており、 $\bar{\pi}_t$ 、 $\bar{r}_t$ 、 $\bar{tp}_t$ は、それぞれ、トレンドインフレ率、 r^* 、タームプレミアムトレンドを示す。定式化から明らかなように、当手法において、 r^* は名目短期金利、名目長期金利、予想名目短期金利の共通トレンドとして推計される。なお、共通トレンドを抽出する際には、「ある変数の予想とその変数のトレンドは一致する」との仮定を置いている。したがって、(1-3)式の予想名目短期金利は、(1-1)式の名目短期金利の先行き予想であることから、両変数のトレンドは共通の式で表されている。こうした関係は、(1-4)式のインフレ率と、(1-5)式のインフレ予想にも当てはまる（詳細は補論1参照）。

2-2-2. 期間構造モデル

期間構造モデルを用いた推計手法では、特定年限の実質金利だけでなく、金利の期間構造（イールドカーブの形状）の情報をを用いて、現時点から十分な時間が経過し、短期的な経済ショックの影響が減衰している将来についての短期インプライド・フォワードレート——マーケットから示唆される実質短期金利の予想成分——を求め、それを r^* と見做す。その際に、 r^* は通常無リスク金利に対応する概念であるため、推計に当たっては各年限の金利から対応する各種のプレミアム（金利上乘せ分）の影響を識別し、除去することが必要となる。例えば、Kim, Walsh and Wei (2019)は、D'Amico, Kim and Wei (2018、以下 DKW)で提案された無裁定条件に基づく期間構造モデルを用いて、こうしたプレミアムを推計するとともに、米国の r^* の抽出を試みている。

DKW モデルは元々、米国の物価連動債（TIPS）の利回りに含まれるプレミアムの

⁵ 関連する手法として、Johannsen and Mertens (2021)がある。当手法は、複数の年限の金利の共通トレンドを抽出しているという点では Del Negro et al. (2017)と同様であるが、シャドーレートを推計に用いることで、名目金利の実効下限の影響を、概念上は取り除いたモデルとなっている。このほか、Kiley (2020a)は、先進国 13 か国の短期金利・長期金利から共通トレンドを抽出し、グローバルな r^* を推計したのち、固有の要因を調整し、各国の r^* を推計している。Del Negro et al. (2019)は、グローバル要因を考慮するため、先進国の利子率の共通トレンドを抽出している。

分解を目的としたものであるが、当モデルを用いると、時点 t における年限 τ の名目金利 ($R_{\tau,t}$)、物価連動債利回り($TIPS_{\tau,t}$)、実質金利($r_{\tau,t}$)をそれぞれ以下のように分解することが可能である。

$$R_{\tau,t} = r_{\tau,t} + \text{インフレ予想} + \text{インフレリスクプレミアム} \quad (2-1)$$

$$TIPS_{\tau,t} = r_{\tau,t} + \text{TIPS 流動性プレミアム} \quad (2-2)$$

$$r_{\tau,t} = \text{実質短期金利の予想成分} + \text{タームプレミアム} \quad (2-3)$$

したがって、当モデルにおいては、名目国債金利・物価連動債の利回りに含まれている各種のプレミアム（流動性プレミアム・インフレリスクプレミアム・タームプレミアム）の動向を勘案したうえで、実質短期金利の予想成分である短期インプライド・フォワードレートが抽出可能である。5年から10年先の実質短期金利予想は、短期的な経済ショックの影響が、概ね消失していると考えられるため、短期金利の均衡水準、すなわち r^* の推計値と解釈することが可能である。

2-2-3. 準構造モデル

準構造モデルを用いた推計手法では、各経済変数に関して IS 曲線やフィリップス曲線などの関係性を表す構造方程式を明示的に仮定したうえで、「需給ギャップがゼロとなる景気中立的な金利」として、 r^* を推計する。

準構造モデルには経済構造に対する仮定により、多くのバリエーションが存在するものの、Laubach and Williams (2003)に代表される多くのモデルで核となる構造方程式は、以下の3本である。

$$y_t - y_t^* = \beta(r_t - r_t^*) \quad (3-1)$$

$$\pi_t = \pi_{t-1} + \theta(y_t - y_t^*) \quad (3-2)$$

$$r_t^* = \sigma g_t^* + z_t \quad (3-3)$$

ここで、 y_t は産出量、 y_t^* は潜在産出量、 r_t は実質金利、 π_t はインフレ率、 g_t^* は潜在産出量のトレンド、 z_t は時間選好率などの r^* の水準に影響する他の要素を表す。(3-1)式は需給ギャップ ($y_t - y_t^*$) と実質金利ギャップ ($r_t - r_t^*$) の関係を表す IS 曲線である。これは標準的な経済理論に基づいて $\beta < 0$ を想定しており、実質金利ギャップがマイナス方向に拡大するほど、需給ギャップのプラス幅が拡大するという関係性を描写している。(3-2)式は、需給ギャップと物価上昇率の関係性を表すフィリップス曲線であり、 $\theta > 0$ のもとで、正の需給ギャップの拡大は物価上昇率を高めるという関係性を描写している。(3-3)式は、 r^* と潜在成長率の関係性を規定する関係式であり、基本的に両者は同方向に動くものの、 z_t の存在によって、一定程度乖離することが許容されている。これらの構造方程式を前提に、カルマン・フィルターを用いて r^* や潜在産

出量を同時に推計する。(3-1)式の関係により、 r^* は、金利ギャップがゼロ＝需給ギャップがゼロとなる実質短期金利の水準として推計される。

Laubach and Williams (2003)による研究以降、構造方程式の定式化について様々な改良・提案が行われている。例えば、Kiley (2020b)は、フィリップス曲線に長期インフレ予想を組み込んだほか、失業率の情報を用いると需給ギャップの推計精度が向上することから、産出量と失業率の関係を表すオークンの法則を構造方程式に追加したうえで、推計を行っている。このほか、Holston, Laubach and Williams (2023、以下 HLW)は、グローバルな感染症流行に伴う極端な経済変数の動きに対処するため、公衆衛生上の措置などの供給ショックを明示的にモデルに織り込んだほか、時変分散を許容するなどの改良を施している（詳細は補論2を参照）。

2-2-4. 構造モデル

準構造モデルは、IS 曲線やフィリップス曲線など一定の経済構造を前提としているが、家計や企業など経済主体の動学的な最適化行動に基づいた一般均衡モデルではない。その点を勘案するために、各経済主体の行動にミクロ的基礎付けを与えた構造モデルを用いた研究も存在する。構造モデルを用いた場合、 r^* は、価格や名目賃金が仮に伸縮的であった場合に成立すると考えられる実質短期金利として定義・推計される (Woodford, 2003)。 r^* の推計に用いられる構造モデルは、ニューケインジアン型動学的確率的一般均衡モデル (Dynamic Stochastic General Equilibrium Model、DSGE モデル) と世代重複モデル (Overlapping Generations Model、OG モデル) に大別される。

構造モデルを用いた推計の特徴について、鎌田 (2009)は以下の3点にまとめている。1つ目は、経済理論を基礎としていることから、内生変数の動きをベーシックな経済学の枠組みで説明しやすいこと、第2に、モデルの詳細さの程度に応じて、データの計量モデルからの乖離、すなわちショックがどのような要因で生じたかを特定できること、第3に、モデルが、政策変更に伴って変化することのないパラメータ（ディープ・パラメータ）によって規定されていることから、政策シミュレーションを実施する際に、ルーカス批判を受けることがないという点である。

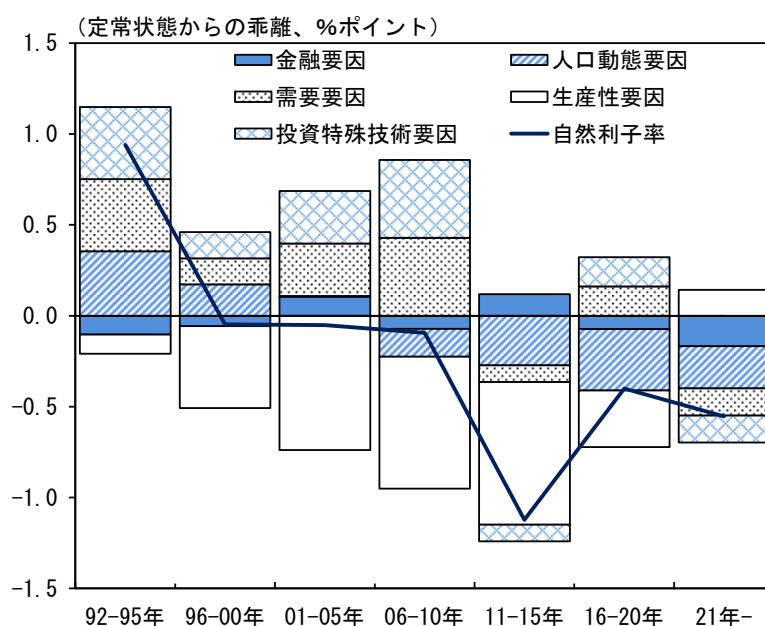
DSGE モデルを用いた、わが国における先行研究として、岡崎・須藤 (2018)がある⁶。彼らは、標準的なニューケインジアン・モデルに、生産年齢人口の確率的な変動な

⁶ このほか、海外での先行研究としては、例えば Kiley (2013)、Barsky, Justiniano and Melosi (2014)、Christiano, Motto and Rostagno (2014)、Guerrieri and Iacoviello (2017)などがある。Hirose and Sunakawa (2023)は、米国のデータを用いて、名目金利の実効下限制約を考慮した非線形 DSGE モデルを推計している。わが国のデータを用いた研究としては、ここで挙げた岡崎・須藤 (2018)以外にも、例えば Iiboshi, Shintani and Ueda (2022)などがある。

を導入することで、先行研究で指摘されている r^* の変動要因の相対的重要性を比較可能なモデルを構築している⁷。

当モデルを用いて、わが国の r^* の変動要因分解をしたものが、図1である。ここからは、1990年代から2010年代半ばまでの r^* の変動の相当部分が生産性要因（中立技術の変化）によって説明できることが確認できる。このほか、人口動態要因も趨勢的に r^* の低下に寄与していたものの、定量的な観点からは、その寄与は限定的であった⁸。このように、要因分解を行えるのが構造モデルの特徴であり、利点である。

（図1）岡崎・須藤（2018）モデルによる要因分解



（注）金融・人口動態・需要・生産性・投資特殊技術要因はそれぞれ、企業および銀行の純資産・生産年齢成長率・財の需要構造・中立技術（TFP）・資本財生産に係る生産性への予想されない外生的なショックが、 r^* を変動させた寄与度を表している。

（出所）筆者らによる推計、日本銀行、総務省、厚労省、Bloomberg 等

OG モデルは、貯蓄や労働供給等の家計の年齢ごとの異質性に着目し、年齢が異なる複数の世代を明示的にモデル化したものであり、人口動態の変化とマクロ経済変数の関係性について、含意を有する。当モデルを用いると、Carvalho, Ferrero and Nechio (2016)、Eggertson, Mehrotra and Robbins (2019)等の研究で指摘されている、少子高齢化が資本深化（労働投入対比の資本投入量の増加）を通じ、 r^* を押し下げる効果をより明示的に記述することができる。わが国の場合は、少子高齢化が今後も進展していくことが想定されることから、人口動態の変化が果たす役割を評価する意義は大きい。

⁷ 具体的には、中立技術（TFP）、金融仲介機能の機能度、人口動態、投資特殊技術、主観的割引率の変化などの変動要因を勘案している。

⁸ 本モデルにおける人口動態要因は、人口動態に対する予想されないショックの影響を捉えたものであり、事前に予想された人口動態の変化の影響は含まれない点には注意を要する。

そのような問題意識から、Sudo and Takizuka (2020)や片桐他 (2024)は、わが国を対象として、OG モデルによるシミュレーションを行っている。片桐他 (2024)は、1980 年以降の少子化・長寿化によって、わが国の r^* が▲100bps 以上押し下げられたものの、先行き予想される人口動態の変化は、これまで既に生じてきた人口動態の変化に比べると、 r^* を現在の水準から大きく乖離させるほどの効果は持たない可能性が高いとしている。 r^* に影響を与える要因のうち、比較的予測が容易な人口動態の影響を勘案し、先行き 50 年間の自然利子率の推移といった、長期的なシミュレーションを実施できる点が、OG モデルの特徴である。

2-3. 長期年限の自然利子率への拡張

2008 年の世界金融危機以降、多くの中央銀行は大規模な資産買入、フォワードガイダンスなどの非伝統的金融政策を導入してきた。こうした政策は、短期の政策金利のみならず、イールドカーブ全体に働きかける点に特徴がある。例えば、日本銀行は、2016 年から 2024 年の間、イールドカーブ・コントロール (YCC) を実施し、短期金利だけでなく、長期金利の操作目標を示していた。こうした金融政策の枠組みにおいては、非伝統的金融政策の効果も含め、金融緩和度合いを評価するための判断基準の構築の必要性が指摘されている (黒田、2017)。そうした問題意識から、学術的な研究においても、短期年限に限定されていた自然利子率の概念を、長期年限の実質金利やイールドカーブ全体に拡張した「均衡イールドカーブ」に関する研究が、徐々にではあるが蓄積してきている (Brzoza-Brzezina and Kotłowski, 2014; Dufrenot, Rhouzlane and Vaccarro-Grange, 2022 等)。

均衡イールドカーブとは、単一の年限に限定されていた均衡実質金利を、全ての年限に拡張したものである (今久保・小島・中島、2015)。実際の実質イールドカーブが均衡イールドカーブに一致していれば、需給ギャップはゼロに収束すると想定される。このほか、Roberts (2018)は、Laubach and Williams (2003)モデルの IS 曲線において、短期金利の代わりに 10 年債金利を利用する定式化にすることで、長期年限の r^* の推計を試みている。シンプルなモデルを用いたものではあるが、米国においても長期年限の r^* の重要性が指摘されているという意味で、注目に値する。

こうした潮流を踏まえ、本節では、均衡イールドカーブの関連研究のうち、時系列的なアプローチである畑山・岩崎 (2024)と、準構造モデルを用いたアプローチである今久保・小島・中島 (2015)を取り上げ、その概要を紹介する。

2-3-1. 時系列的なアプローチ

畑山・岩崎 (2024)は、Goy and Iwasaki (2024)で提案された時系列的な手法を用いて、わが国における均衡イールドカーブの推計を試みている。Goy and Iwasaki (2024)は、

ネルソン・シーゲル・モデル⁹とマクロ経済モデルを組み合わせることで、均衡イールドカーブを推計している。具体的には、各年限の実質金利、各年限の名目金利、インフレ率、インフレ予想のトレンドについて以下の関係性を仮定し、4つの共通トレンドを抽出する。

$$\text{実質金利のトレンド} = \bar{r}_t + (\theta_s(\tau, \lambda_r) - 1)\bar{s}_t \quad (4-1)$$

$$\text{名目金利のトレンド} = \bar{r}_t + (\theta_s(\tau, \lambda_r) - 1)\bar{s}_t + \bar{\pi}_t + (\theta_s(\tau, \lambda_\pi) - 1)\bar{s}_t^\pi \quad (4-2)$$

$$\text{インフレ率のトレンド} = \bar{\pi}_t \quad (4-3)$$

$$\text{インフレ予想のトレンド} = \bar{\pi}_t \quad (4-4)$$

ここで、 $\bar{r}_t$ は実質短期金利のトレンド、 $(\theta_s(\tau, \lambda_r) - 1)\bar{s}_t$ は年限 τ のタームプレミアムのトレンド、 $\bar{\pi}_t$ はインフレ率・インフレ予想の共通トレンド、 $(\theta_s(\tau, \lambda_\pi) - 1)\bar{s}_t^\pi$ は年限 τ のインフレ予想カーブの傾きトレンドを表す。なお、 $\theta_s(\tau, \lambda_r) - 1$ および $\theta_s(\tau, \lambda_\pi) - 1$ は、年限 τ に対し単調増加となるファクターである。当手法を用いると、実質短期金利の均衡値と、各年限のタームプレミアムの均衡値が得られるため、それらの和として、各年限に対応する均衡実質金利を得ることができる。より詳細な推計手法・推計結果の解説については、畑山・岩崎 (2024) を参照されたい。

このほか、2-2-1 節で紹介した Del Negro et al. (2017) モデルを用いると、短期年限の r^* と、特定年限（10 年物）に対応するタームプレミアムのトレンドを推計できるため、

$$\text{長期年限の } r^* = \text{短期年限の } r^* + \text{タームプレミアムのトレンド成分}$$

という関係から、イールドカーブ全体ではないものの、10 年物金利に対応する r^* の水準を得ることができる¹⁰。

2-3-2. 準構造的なアプローチ

準構造的なアプローチを用いて均衡イールドカーブを推計した研究としては、今久保・小島・中島 (2015) や Nakajima et al. (2023) が挙げられる。これらのモデルは、Laubach and Williams 型の準構造モデルをベースとして、IS 曲線を、イールドカーブギャップ（実際の実質イールドカーブと均衡イールドカーブの乖離）と需給ギャップの関係を記述するものに改良している。具体的には、まず、実質イールドカーブを、ネルソン・シーゲル・モデルを用いて、3つの変動要因に分解する。そのあとに、各要因の均衡

⁹ ネルソン・シーゲル・モデルは Nelson and Siegel (1987) によって考案されたイールドカーブモデルで、イールドカーブの形状を水準、傾き、曲率の3つの要因に分解する。

¹⁰ 関連する研究として、Kopp and Williams (2018) は、イールドカーブと、失業率等のマクロ経済変数の関係を考慮したうえで、実質長期金利のトレンド成分の抽出を試みている。

値からのギャップと、需給ギャップとの関係を以下のように定式化している。

$$y_t - y_t^* = \beta_L(L_t - L_t^*) + \beta_S(S_t - S_t^*) + \beta_C(C_t - C_t^*) \quad (5-1)$$

ただし、上式の L_t, S_t, C_t はそれぞれ、ネルソン・シーゲル・モデルによって推計されたイールドカーブの水準要因、傾き要因、曲率要因を示す。Laubach and Williams モデルの IS 曲線である(3-1)式と、(5-1)式を見比べると、イールドカーブの分解から得られた 3 つの要因のそれぞれが需給ギャップに影響を及ぼす定式化へと変更されていることが分かる。この仮定の下では、これら全ての要因がそれぞれの均衡値(L_t^*, S_t^*, C_t^*)と等しい場合に、金融環境は中立的となる。こうした定式化により、景気中立的なイールドカーブの形状を推計することが可能となる¹¹。

2-4. 類型ごとの推計値の特性

本節では、これまで紹介した 4 類型の特徴および留意点について述べる。

類型ごとの推計値の特徴は、 r^* の動向に影響を与える経済構造について、各類型がどの程度強い仮定を置いているかという点に特に影響を受ける。

時系列モデルや期間構造モデルは一般に、経済構造に関して強い仮定を置いておらず、観察された金利の情報を中心的に用いて、より「データに語らせる」ことを重視したアプローチだといえる。そのため、経済変数をどのような定式化でモデルに組み込むかといった点や、経済構造の変化に伴い構造方程式のパラメータが経時的に変化する可能性がある、などといったモデルの定式化に起因する論点は、相対的に回避しやすい。一方で、推計の際に、実質金利の情報を重視する関係上、実際に観測された実質金利の動向を反映しやすいという性質を持つ点には、留意が必要である¹²。また、期間構造モデルにおいては、観察されたイールドカーブから各種プレミアムを取り除くことによって r^* を推計するものの、こうした要因を十分に取り切れないことが、推計値が観察データに引きずられやすい要因となる。

¹¹ 今久保・小島・中島 (2015)を発展させたモデルとして、Dufrénot, Rhoulane and Vaccaro-Grange (2022)がある。彼らは、今久保・小島・中島 (2015)のモデルに金融要因の影響や、財政支出の影響などの要素を追加したうえで、景気中立的な均衡イールドカーブモデルを推計している。このほか、Brand, Goy and Lemke (2021)も、Laubach and Williams (2003)モデルをベースに、金利の期間構造を勘案可能なモデルに改良することで、均衡イールドカーブモデルの推計を試みているが、今久保・小島・中島 (2015)と異なり、イールドカーブの傾き成分・曲率成分は一定との仮定を置いている。

¹² 特に、時系列モデルに基づく自然利子率の推計は、「実際に観測された実質金利が自然利子率を中心に景気変動等に合わせて循環していること」を暗に仮定している。そのため、実効下限制約等の影響により、実質金利の変動が制限される場合には、そうした制約が推計値に影響を及ぼす可能性には留意が必要である。

これに対して、準構造モデルのように、IS 曲線やフィリップス曲線などの構造方程式を仮定し、それらと整合的な金利水準として r^* を考える場合は、経済理論の想定する方向に r^* が変動することから、その変動要因を実体経済の動向と関連づけて解釈しやすいといった利点がある。一方で、推計結果は、モデルの仮定に強く依存することになる。例えば、Nakajima et al. (2023)は、均衡イールドカーブモデルの推計の際に、 r^* が潜在 GDP の水準に依存する定式化と、潜在 GDP の変化率に依存する定式化の両者を比較し、 r^* の推計値が相応に変化しうることを示している。構造モデルにおいても、想定する構造には様々なバリエーションが考えられ、推計結果はよりモデルの設定に依存することになる¹³。

さらに、Taylor and Wieland (2016)は、準構造モデルで仮定されているシンプルな IS 曲線について、短期の金利ギャップ以外にも、需給ギャップを決定する重要な要素が存在する場合、推計される r^* が変数の欠落の影響を受ける可能性を指摘している。すなわち、(3-1)式で示される IS 曲線が、実際には、

$$y_t - y_t^* = \beta(r_t - r_t^*) - \alpha x_t^* \quad (6-1)$$

のような式形に従う場合、(3-1)式で推計される β は一致性を持たず、それらを前提に算出される r^* も定式化の誤りによる影響を受けうると論じている¹⁴。

以上より、各種のアプローチには一長一短があり、明確な優劣はない。したがって、 r^* の動向を確認する際には、単一のモデルに依存するのではなく、複数の推計手法を用いてクロスチェックをかけつつ、モデル選択に起因する不確実性を可能な限り低減させることが望ましいといえる。このとき、ただ闇雲に使用するモデルを増やすのではなく、推計手法の類型・特徴を意識して、バランスの取れたモデル選択を行うべきである。

3. わが国の自然利子率の動向

3-1. 本稿で用いる手法

本節では、前節までで紹介した複数の推計手法を用いて、 r^* の推計を行い、わが国

¹³ 新谷・宮尾 (2018)は、線形/非線形モデル、ゼロ金利制約の考慮の有無による合計4通りの DSGE モデルを用いて、わが国の r^* を推計している。その結果、線形モデルを用いた場合、 r^* が高めに推計されること、ゼロ金利制約の考慮の有無は、推計値に定性的な影響を及ぼさなかったことを報告している。

¹⁴ Taylor and Wieland (2016)は、潜在的な欠落変数として、設備投資に対する税制変更などの政府による規制・財政政策を例として挙げている。

における r^* の動向を確認する。

推計に用いるモデルは、前節で紹介した4種類のバランスを考慮して採用した。時系列的な手法として、Del Negro et al. (2017)モデルをわが国経済に適用¹⁵するほか、畑山・岩崎 (2024)で得られた Goy and Iwasaki (2024)モデルをわが国に適用した結果も利用する。準構造的な手法としては、Laubach and Williams (2003)に修正を加えた HLW (2023)モデルをわが国経済に適用する¹⁶ほか、今久保・小島・中島 (2015)と Nakajima et al. (2023)による2種類の均衡イールドカーブモデルを延長推計した¹⁷。また、構造モデルとして、人口変動や金融仲介部門の役割を明示的に考慮した DSGE モデルである岡崎・須藤 (2018)を延長推計した。これらによって、短期年限の r^* については合計6つの手法、長期年限の r^* については合計4つの手法によって、その動向を確認することが可能となる(表2)。

(表2) 本稿で用いた手法

推計手法	類型	概要・特徴
Del Negro et al. (2017)	時系列	■ 短期・長期名目金利・インフレ率・インフレ予想などから実質金利のトレンド成分を抽出し、r^*と見做す。 ■ 観察される実質金利の影響を受けやすい。
Goy and Iwasaki (2024)	時系列	■ 各年限の実質金利から、共通トレンドとしてr^*を推計。その際に、需給ギャップ等を用いて実体経済の情報も加味。 ■ 観察される実質金利の影響を受けやすい。
Holston, Laubach and Williams [HLW] (2023)	準構造	■ IS曲線・フィリップス曲線等の構造方程式を仮定し、各期の需給ギャップをゼロとする利子率の水準をr^*とする。 ■ インプットとして用いている実質GDPの影響を受けやすい。
今久保・小島・中島 (2015)	準構造	■ HLWの手法を拡張したもの。単一年限のr^*だけでなく、景気中立的なイールドカーブの形状(均衡イールドカーブ)を推計。 ■ インプットとして用いている潜在成長率の影響を受けやすい。
Nakajima et al. (2023)	準構造	
岡崎・須藤 (2018)	構造	■ 標準的なセットアップに金融市場の不完全性や人口動態等の要因を加えたDSGEモデルに基づいて、r^*を推計。

(注) 今久保・小島・中島 (2015)は r^* の前期差が潜在成長率の前期差に依存する定式化、Nakajima et al. (2023)は r^* の水準が潜在成長率の水準に依存する定式化でそれぞれ均衡イールドカーブを推計している。

¹⁵ 詳細は補論1参照。

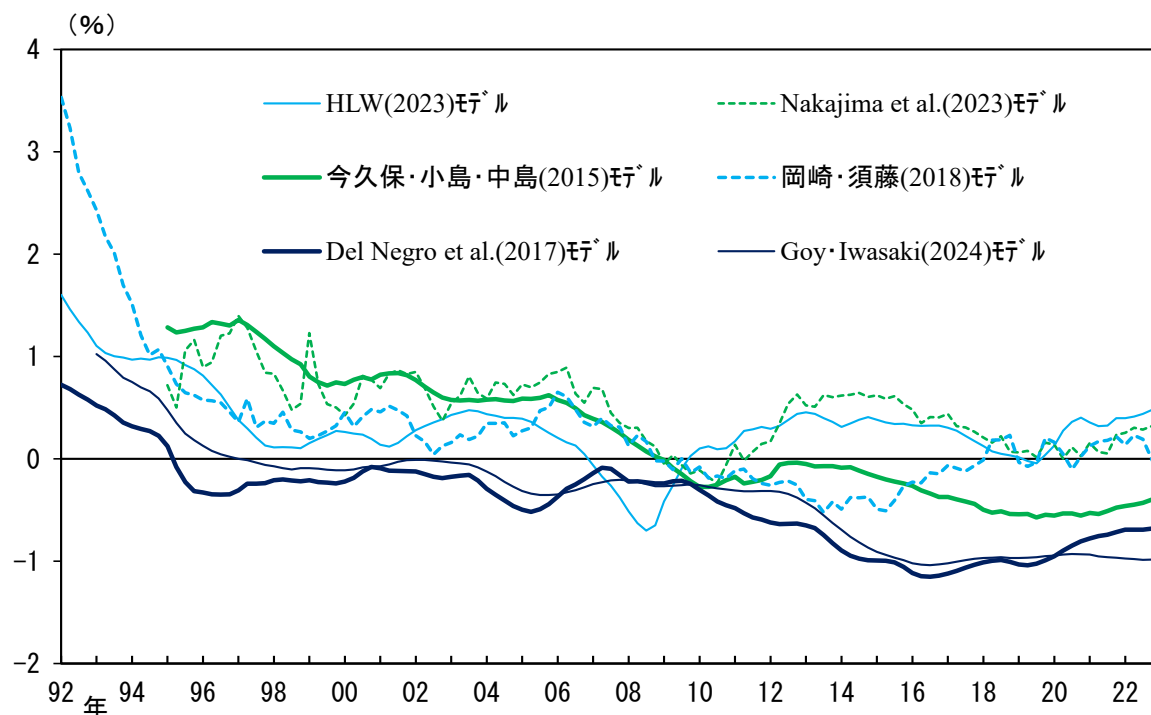
¹⁶ 詳細は補論2参照。

¹⁷ 詳細は補論3参照。

3-2. わが国における r^* の動向

本節では、複数の手法によって推計されたわが国の r^* の動向を確認する（図2）。

（図2） r^* の推移



（注）Del Negro et al. (2017)モデル、HLW (2023)モデル、今久保・小島・中島 (2015)モデル、Nakajima et al. (2023)モデル、岡崎・須藤 (2018)モデルは、筆者らで推計を実施。Goy and Iwasaki (2024)モデルは、畑山・岩崎 (2024)による推計値を用いている。

（出所）日本銀行、財務省、厚生労働省、総務省、内閣府、Bloomberg、Consensus Economics「コンセンサス・フォーキャスト」、Google 入出指数

まず、すべての手法において、長期的な低下トレンドが確認できる。これは、先行研究で指摘されているグローバルな r^* の低下傾向と整合的な結果である¹⁸。仔細にみると、1995年頃から、一部の推計値が初めてゼロを下回った後、緩やかな低下傾向が続き、2010年頃にはほぼ全ての推計値が負の値を取る時期もみられた¹⁹。それ以降の

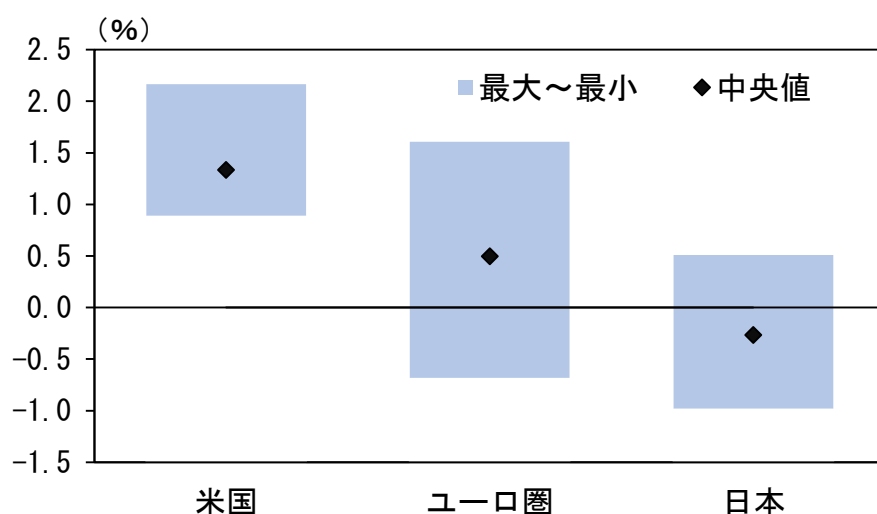
¹⁸ r^* の低下の背景としては、①潜在成長率の低下 (Summers, 2014; Cesa-Bianchi, Harrison and Sajedi, 2022)、②人口動態の影響 (Carvalho, Ferrero and Fernande, 2016; Auclert et al., 2021)、③安全資産への需要増加 (Del Negro et al., 2017)、④格差の拡大 (Mian, Straub and Sufi, 2021)、⑤グローバル要因 (Rachel and Smith, 2017)など、様々な要因が指摘されている。

¹⁹ 恒常的に r^* が負の値を取り得るのか、という点については Summers (2014)が提起した「長期停滞論」との関連で活発な議論が交わされた。 r^* が負となる要因としては、金融危機後の信用収縮 (Eggertsson, Mehrotra and Robbins, 2019)や、コンビニエンス・イールドの存在 (Del Negro et al., 2017)等が挙げられるものの、いずれも金融的な要因を強調する議論である。Bernanke (2015)は、こうした要因の存在は認めつつも、実質金利が負であれば、殆どの投資プロジェクトの採算が合うことになるため、 r^* が長い期間に渡って負の値を取り得るかどうかは疑わしいと主張した。それに対

時期については、多くの推計値で概ね横ばい圏内での推移が続いている。

また、用いる手法によって r^* の推計値の水準に相応の幅が出ることも、改めて確認された。もっとも、これはわが国特有の現象ではない。Benigno et al. (2024)は、本稿と同様に、複数手法を用いて、米欧における直近の r^* を推計し、その幅を示している。米欧の結果と、本稿の結果を比較したものが、図3である。ここからは、わが国における r^* の不確実性は、米欧を対象とした推計と概ね同程度であることが分かる。

(図3) r^* の推計値の幅（日米欧比較）



(注) 米欧の結果は Benigno et al. (2024)に基づき、2023/3Q～2024/4Q の推計値の最大から最小の幅を示している。用いられている推計手法の詳細については、Benigno et al. (2024)を参照。日本の結果は 2023/1Q の推計値を用いて筆者らが算出。

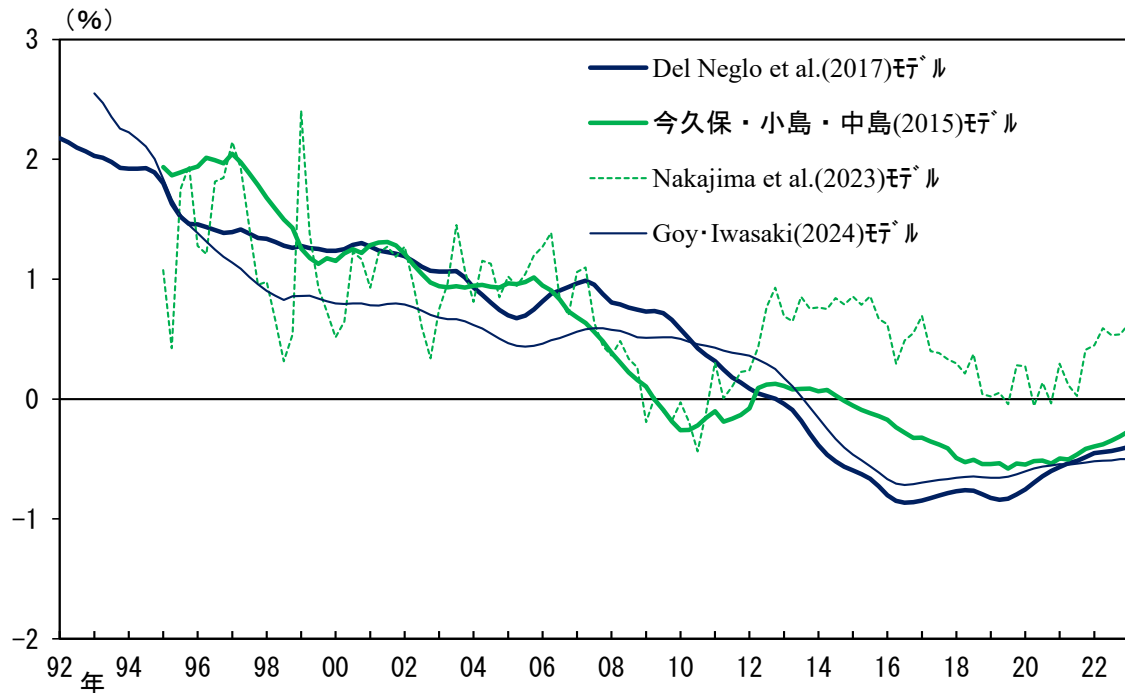
(出所) 日本銀行、財務省、厚生労働省、総務省、内閣府、Bloomberg、Consensus Economics 「コンセンサス・フォーキャスト」、Google 人出指数

また、一部の推計手法からは、実質短期金利に対応する r^* だけではなく、長期年限の均衡実質金利の水準も推計することが可能である。それらのモデルによる長期年限（10年物）の均衡実質金利の推計結果を、図4に示している。

これをみると、短期年限と同様、長期的な低下傾向が確認できる。同様に、推計値の不確実性も大きい。

し、Summers (2015)は、負の実質金利は、理論的には不明瞭だが、実際には観察されている現象であるとして、20世紀の米国では、長きに渡って実質金利が負であった可能性が高いという Hamilton et al. (2015)の実証結果を引用しつつ反論した。

(図4) 長期年限の均衡実質金利の推移



(注) Del Negro et al. (2017)モデル、今久保・小島・中島 (2015)モデル、Nakajima et al. (2023)モデルは、筆者らが延長推計を行った。Goy and Iwasaki (2024)モデルは、畑山・岩崎 (2024)による推計値。

(出所) 日本銀行、財務省、厚生労働省、総務省、内閣府、Bloomberg、Consensus Economics「コンセンサス・フォーキャスト」

4. まとめ

本稿では、これまで提案されてきた r^* の推計手法のサーベイを行ったうえで、それらの手法の類型ごとの特徴・留意点を整理した。そのうえで、推計の不確実性に対処するため、複数の手法を用いてわが国の r^* の推計を行い、その動向を確認した。推計の結果、わが国の r^* は長期的にみて緩やかな低下傾向にあることが確認できた。この r^* の低下は、名目金利が実効下限制約に抵触する可能性を高め、短期金利誘導による金融政策対応余地を制限していた可能性が高い。もっとも、その推計値に関しては、推計手法による差異が大きく、これまで先行研究で指摘されてきている通り、相応の不確実性が存在することが確認された。

本稿で示した推計値を参照する際の留意点としては、個々の手法の推計の不確実性が挙げられる。すなわち、本稿では、複数の推計手法を組み合わせることで、モデル選択の不確実性には一定程度対処したが、それぞれの推計手法ごとの不確実性は引き続き残っている。この点を考慮すると、推計結果の幅はより広がることになる。更に、特に足もとの推計値については、新たなデータが追加されると、過去の値が大きく変わってしまう可能性があるという、いわゆるリアルタイム問題の存在も指摘されている。すなわち、現時点の足もとの推計値が、事後的にみて、異なるものとなる可能性は排除できない。これらの要因によって、足もとの r^* の水準をピンポイントで把握す

ることは容易ではないことには留意が必要である。

今後の課題としては、個々の推計手法の不確実性を減少させるため、各実証モデルを改良していくことが挙げられる。このほか、長期年限の r^* に関しては、実証面の研究の蓄積はみられるものの、その決定要因や動学などについては、理論的な整理が十分とは言い難い。実証モデルの改良に加えて、理論的な理解が深まることも期待したい。

以 上

参考文献

- 今久保圭・小島治樹・中島上智 (2015)、「均衡イールドカーブの概念と計測」、日本銀行ワーキングペーパーシリーズ、15-J-4.
- 岩崎雄斗・須藤直・西崎健司・藤原茂章・武藤一郎 (2016)、「『総括的検証』補足ペーパーシリーズ②：わが国における自然利子率の動向」、日銀レビュー、2016-J-18.
- 岡崎陽介・須藤直 (2018)、「わが国の自然利子率—DSGE モデルに基づく水準の計測と決定要因の識別—」、日本銀行ワーキングペーパーシリーズ、18-J-3.
- 小田信之・村永淳 (2003)、「自然利子率について：理論整理と計測」、日本銀行ワーキングペーパーシリーズ、03-J-5.
- 開発壮平・河西桂靖・平田篤己・山本弘樹・中島上智 (2024)、「非伝統的金融政策の効果と副作用：潜在金利を用いた実証分析」、日本銀行ワーキングペーパーシリーズ、近刊.
- 片桐満、小田剛正、小川泰堯、篠原武史、須藤直 (2024)、「人口動態と家計の貯蓄・投資動向」、日銀リサーチラボ、24-J-3.
- 鎌田康一郎 (2009)、「わが国の均衡実質金利」、深尾京司編『マクロ経済と産業構造』、バブル/デフレ期の日本経済と経済政策シリーズ、第 1 巻、慶應義塾大学出版会、387–427.
- 黒田東彦 (2017)、「『量的・質的金融緩和』と経済理論：スイス・チューリッヒ大学における講演の邦訳」、2017 年 11 月 13 日.
- 新谷元嗣・宮尾龍蔵 (2018)、「均衡利子率の推計手法および推定結果について」、NIRA オピニオンペーパー.
- 畑山優大・岩崎雄斗 (2024)、「わが国における均衡イールドカーブの推計：時系列手法によるアプローチ」、日本銀行ワーキングペーパーシリーズ、近刊.
- Auclert, Adrian, Hannes Malmberg, Frederic Martenet, and Matthew Rognlie (2021), "Demographics, Wealth, and Global Imbalances in the Twenty-First Century," NBER Working Paper, 29161.
- Bailey, Andrew (2022), "The Economic Landscape: Structural Change, Global R* and Missing-Investment Puzzle," Speech at the Official Monetary and Financial Institutions Forum, July 12, 2022.

- Barsky, Robert, Alejandro Justiniano, and Leonardo Melosi (2014), "The Natural Rate of Interest and Its Usefulness for Monetary Policy," *American Economic Review*, 104(5), 37–43.
- Bauer, Michael D. and Glenn D. Rudebusch (2020), "Interest Rates under Falling Stars," *American Economic Review*, 110(5), 1316–1354.
- Benigno, Gianluca, Boris Hofmann, Galo Nuño, and Damiano Sandri (2024), "Quo Vadis, R^* ? The Natural Rate of Interest after the Pandemic," *BIS Quarterly Review*, 4, 17-30.
- Bernanke, Ben S. (2015), "Why Are Interest Rate So Low, Part 2: Secular Stagnation," March 31, 2015 (<https://www.brookings.edu/articles/why-are-interest-rates-so-low-part-2-secular-stagnation/>, August 2, 2024).
- Borio, Claudio (2021), "Navigating by r^* : Safe or Hazardous?" BIS Working paper, 982.
- Brand, Claus, Marcin Bielecki, and Adrian Penalver (2018), "The Natural Rate of Interest: Estimates, Drivers, and Challenges to Monetary Policy," ECB Occasional Paper Series, 217.
- Brand, Claus, Noémie Lisack, and Falk Mazelis (2024), "Estimates of the Natural Interest Rate for the Euro Area: an Update," *ECB Economic Bulletin*, 1.
- Brand, Claus, Gavin Goy, and Wolfgang Lemke (2021), "Natural Rate Chimera and Bond Pricing Reality," ECB Working Paper Series, 2612.
- Brand, Claus and Falk Mazelis (2019), "Taylor-Rule Consistent Estimates of the Natural Rate of Interest," ECB Working Paper Series, 2257.
- Brzoza-Brzezina, Michał and Jacek Kotłowski (2014), "Measuring the Natural Yield Curve," *Applied Economics*, 46(17), 2052–2065.
- Carvalho, Carlos, Andrea Ferrero, and Fernanda Nechio (2016), "Demographics and Real Interest Rates: Inspecting the Mechanism," *European Economic Review*, 88, 208-226.
- Cesa-Bianchi, Ambrogio, Richard Harrison, and Rana Sajedi (2022), "Decomposing the Drivers of Global R^* ," Bank of England Staff Working Paper, 990.
- Christiano, Lawrence J., Roberto Motto, and Massimo Rostagno, (2014), "Risk Shocks," *American Economic Review*, 104(1), 27–65.
- D’Amico, Stefania, Don H. Kim, and Min Wei (2018), "Tips from TIPS: The Informational Content of Treasury Inflation-Protected Security Prices," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 53(1), 395–436.

- Del Negro, Marco, Domenico Giannone, Marc P. Giannoni, and Andrea Tambalotti (2019), "Global Trends in Interest Rates," *Journal of International Economics*, 118, 248–262.
- Del Negro, Macro, Marc P. Giannoni, Domenico Giannone, and Andrea Tambalotti (2017), "Safety, Liquidity, and the Natural Rate of Interest," *Brookings Papers on Economic Activity*, Spring 2017, 235–316.
- Dufrénot, Gilles, Meryem Rhoulane, and Etienne Vaccaro-Grange (2022), "Potential Growth and Natural Yield Curve in Japan," *Journal of International Money and Finance*, 124, 102628.
- Durbin, James, and Siem J. Koopman (2002), "A Simple and Efficient Simulation Smoother for State Space Time Series Analysis," *Biometrika*, 89(3), 603–616.
- Eggertson, Gauti B., Neil R. Mehrotra, and Jacob A. Robbins (2019), "A Model of Secular Stagnation: Theory and Quantitative Evaluation," *American Economic Journal: Macroeconomics*, 11(1), 1–48.
- Federal Reserve Bank (2018), "Monetary Policy Report," July 13, 2018.
- Goy, Gavin and Yuto Iwasaki (2024), "A First Step toward Natural Yield Curve," mimeo.
- Guerrieri, Luca and Matteo Iacoviello (2017), "Collateral Constraints and Macroeconomic Asymmetries," *Journal of Monetary Economics*, 90, 28–49.
- Hamilton, James D., Ethan S. Harris, Jan Hatzius, and Kenneth D. West (2015), "The Equilibrium Real Funds Rate: Past, Present and Future," NBER Working Paper, 21476.
- Hirose, Yasuo and Takeki Sunakawa (2023), "The Natural Rate of Interest in a Non-linear DSGE Model," *International Journal of Central Banking*, 19(1), 301–339.
- Holston, Kathryn, Thomas Laubach, and John C. Williams (2017), "Measuring the Natural Rate of Interest: International Trends and Determinants," *Journal of International Economics*, 108(S1), S59–S75.
- Holston, Kathryn, Thomas Laubach, and John C. Williams (2023), "Measuring the Natural Rate of Interest after COVID-19," Federal Reserve Bank of New York Staff Report, 1063.
- Iiboshi, Hirokuni, Mototsugu Shintani, and Kozo Ueda (2022), "Estimating a Nonlinear New Keynesian Model with the Zero Lower Bound for Japan," *Journal of Money, Credit and Banking*, 54(6), 1637–1671.

- Imakubo, Kei and Jouchi Nakajima (2015), "Estimating Inflation Risk Premia from Nominal and Real Yield Curves Using a Shadow-Rate Model," Bank of Japan Working Paper Series, 15–E–1.
- Johannsen, Benjamin K. and Elmar Mertens (2021), "A Time-Series Model of Interest Rates with the Effective Lower Bound," *Journal of Money, Credit and Banking*, 53(5), 1005–1046.
- Kiley, Michael T. (2013), "Output Gaps," *Journal of Macroeconomics*, 37, 1–18.
- Kiley, Michael T. (2020a), "The Global Equilibrium Real Interest Rate: Concepts, Estimates, and Challenges," *Annual Review of Financial Economics*, 12, 305-326..
- Kiley, Michael T. (2020b), "What Can the Data Tell Us about the Equilibrium Real Interest Rate?" *International Journal of Central Banking*, 16(3), 181–209.
- Kim, Don, Cait Walsh, and Min Wei (2019), "Tips from TIPS: Update and Discussions," FEDS Notes, May 21, 2019.
- Kopp, Emanuel and Peter D. Williams (2018), "A Macroeconomic Approach to the Term Premium," IMF Working Papers, WP/18/140.
- Lane, Philip R. (2022), "The Monetary Policy Strategy of the ECB: the Playbook for Monetary Policy Decisions," Speech at the Hertie School, Berlin, March 2, 2022.
- Laubach, Thomas and John C. Williams (2003), "Measuring the Natural Rate of Interest," *Review of Economics and Statistics*, 85(4), 1063–1070.
- Mian, Atif, Ludwig Straub, and Amir Sufi (2021), "Indebted Demand," *Quarterly Journal of Economics*, 136 (4), 2243–2307.
- Nakajima, Jouchi, Nao Sudo, Yoshihiko Hogen, and Yasutaka Takizuka (2023), "On the Estimation of the Natural Yield Curve," Discussion Paper Series, A 753, Institute of Economic Research, Hitotsubashi University.
- Nelson, Charles R. and Andrew F. Siegel (1987), "Parsimonious Modeling of Yield Curves," *Journal of Business*, 60(4), 473–489.
- Obstfeld, Maurice (2023), "Natural and Neutral Real Interest Rates: Past and Future," NBER Working Paper, 31949.
- Rachel, Lukasz and Thomas D. Smith (2017), "Are Low Real Interest Rates Here to Stay?" *International Journal of Central Banking*, 13(3), 1–42.

- Roberts, John M. (2018), "An Estimate of the Long-Term Neutral Rate of Interest," FEDS Notes, September 5, 2018.
- Sudo, Nao and Yasutaka Takizuka (2020), "Population Aging and the Real Interest Rate in the Last and Next 50 Years: A Tale Told by an Overlapping Generations Model," *Macroeconomic Dynamics*, 24(8), 2060–2103.
- Summers, Lawrence H. (2014), "U.S. Economic Prospects: Secular Stagnation, Hysteresis, and the Zero Lower Bound," *Business Economics*, 49(2), 65–73.
- Summers, Lawrence H. (2015), "On Secular Stagnation: Larry Summers Responds to Ben Bernanke," April 1, 2015 (<https://www.brookings.edu/articles/on-secular-stagnation-larry-summers-responds-to-ben-bernanke/>, August 2, 2024).
- Taylor, John B. and Volker Wieland (2016), "Finding the Equilibrium Real Interest Rate in a Fog of Policy Deviations," *Business Economics*, 51, 147–154.
- Wicksell, J. G. Knut (1898), *Geldzins und Güterpreise, Eine Studie über die den Tauschwert des Geldes bestimmenden Ursachen*, Jena (ウィクセル著、北野熊喜男・服部新一訳、北野熊喜男改訳 (1984)、『利子と物価』日本経済評論社).
- Woodford, Michael (2003), *Interest and Prices*, Princeton University Press.
- Yellen, Janet L. (2015), "The Economic Outlook and Monetary Policy," Speech at the Economic Club of Washington, December 2, 2015.

補論 1. Del Negro et al. (2017)の概要

Del Negro et al. (2017)の手法では、金利やインフレ率等に係る複数の経済指標から共通のトレンドの一つとして r^* を抽出する。この手法には、実質短期金利に HP フィルターを適用して短期実質金利のトレンドを抽出する手法に比べて、より多くの情報を利用しているという特徴がある。

具体的な推計手順について、Del Negro et al. (2017)に従って、以下のような状態空間表現を考える。まず、観測方程式は以下の通りである。

$$R_t^{short} = \bar{\pi}_t + \bar{r}_t + \tilde{R}_t^{short} \quad (A1-1)$$

$$R_t^{long} = \bar{\pi}_t + \bar{r}_t + \bar{tp}_t + \tilde{R}_t^{long} \quad (A1-2)$$

$$R_t^{e,short} = \bar{\pi}_t + \bar{r}_t + \tilde{R}_t^{e,short} \quad (A1-3)$$

$$\pi_t = \bar{\pi}_t + \tilde{\pi}_t \quad (A1-4)$$

$$\pi_t^e = \bar{\pi}_t + \mu^\pi + \tilde{\pi}_t^e \quad (A1-5)$$

ここで、各式左辺に該当する変数 $R_t^{short}, R_t^{long}, R_t^{e,short}, \pi_t, \pi_t^e$ はそれぞれ、名目短期金利、名目長期金利、名目長期金利の予想短期金利成分、インフレ率、予想インフレ率を表す。右辺のバー付き変数はトレンド項を表しており、 $\bar{\pi}_t, \bar{r}_t, \bar{tp}_t$ は、インフレ率、実質短期金利、タームプレミアムの時間を通じて変化するトレンドを表す。また、わが国において、実績のインフレ率は予想インフレ率を長年下回ってきたという事実を反映して（後述の使用データに関して、推計期間における平均でおよそ1%程度、予想インフレ率はインフレ率を上回っている）、想定されるトレンド的な水準差を捉えるためのバイアス項 μ^π を用いている。最後に、右辺のチルダ付きの項は各変数のサイクル成分を表す。

本推計は、複数の経済指標から共通のトレンドを抽出するにあたって、ある変数の予想とその変数のトレンドは一致するとの仮定を置いている。例えば、(A1-3)式左辺の名目長期金利の予想短期金利成分は、(A1-1)式左辺の名目短期金利に対する予想値である。従って、両変数は共通の時間を通じて変化するトレンド $\bar{\pi}_t + \bar{r}_t$ を持ち、それぞれのサイクル項 $\tilde{R}_t^{short}, \tilde{R}_t^{e,short}$ によって短期的な差異が捉えられている。

本モデルは、先述の観測方程式と、状態変数の変動をモデル化した遷移方程式とを併せて、状態空間表現できる。状態変数については、時変のトレンド項 $\bar{y}_t \equiv (\bar{\pi}_t, \bar{r}_t, \bar{tp}_t)'$ とサイクル項 $\tilde{y}_t \equiv (\tilde{R}_t^{short}, \tilde{R}_t^{long}, \tilde{R}_t^{e,short}, \tilde{\pi}_t, \tilde{\pi}_t^e)'$ 、すなわち、 $q \times 1$ と $n \times 1$ のベクトルに集約される（ $q = 3, n = 5$ ）。遷移方程式は以下の通り、①トレンド項が単位根過程に従う、②サイクル項が VAR 過程に従う、という仮定のもとで与えられる。

$$\bar{y}_t = \bar{y}_{t-1} + e_t \quad (A1-6)$$

$$\tilde{y}_t = \Phi(L)\tilde{y}_{t-1} + \epsilon_t \quad (\text{A1-7})$$

ただし、 L をラグオペレータとして、 $\Phi(L) \equiv \sum_{s=1}^p \Phi_s L^{s-1}$ であり、 Φ_s は $n \times n$ の行列である。トレンド・サイクル項に係るショックは、 $(q+n) \times 1$ のベクトルであり、次式の分布に i.i.d. だがう。

$$\begin{pmatrix} e_t \\ \epsilon_t \end{pmatrix} \sim N \left(\begin{pmatrix} 0_q \\ 0_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_e & 0 \\ 0 & \Sigma_\epsilon \end{pmatrix} \right) \quad (\text{A1-8})$$

ただし、 $N(\cdot, \cdot)$ は多変量正規分布を表し、分散共分散行列 $\Sigma_e, \Sigma_\epsilon$ は、 $q \times q, n \times n$ の正定値行列である。

こうした状態空間表現をもとに、ベイズ推計の手法に基づいて r^* の推計を行う。推計の対象となるパラメータは、バイアス項 μ^π 、サイクル項に対する VAR 係数 $\varphi \equiv \text{vec}(\Phi)$ 、遷移方程式のショック項に係る分散共分散行列 $\Sigma_e, \Sigma_\epsilon$ である。 μ^π はメトロポリス・ヘイスティング法によって、その他のパラメータはギブス・サンプラーによって、各期の状態変数 $\bar{y}_t, \tilde{y}_t$ は、Durbin and Koopman (2002)の手法によってサンプリングされる。

事前分布についても、Del Negro et al. (2017)に従って以下の通り与えられる。

$$p(\varphi | \Sigma_\epsilon) = N \left(\text{vec}(\underline{\varphi}), \Sigma_\epsilon \otimes \underline{\Omega} \right) I(\varphi) \quad (\text{A1-9})$$

$$p(\Sigma_e) = IW(\kappa_e, (\kappa_e + q + 1)\underline{\Sigma}_e) \quad (\text{A1-10})$$

$$p(\Sigma_\epsilon) = IW(\kappa_\epsilon, (\kappa_\epsilon + n + 1)\underline{\Sigma}_\epsilon) \quad (\text{A1-11})$$

$$p(\mu^\pi) = N(\underline{\mu}^\pi, \underline{\sigma}_{\mu^\pi}^2) \quad (\text{A1-12})$$

ただし、 $IW(\kappa, (\kappa + n + 1)\underline{\Sigma})$ は、モードが $\underline{\Sigma}$ 、自由度 κ の逆ウィッシュャート分布であり、 $I(\varphi)$ は、パラメータ φ の示す VAR 過程が定常性を満たす場合に 1 をとるような指示関数である。

また、各状態変数 $\bar{y}_0, \tilde{y}_{0:-p+1} \equiv (\tilde{y}'_0, \tilde{y}'_{-1}, \dots, \tilde{y}'_{-p+1})'$ の初期値は以下の分布に従う。

$$\bar{y}_0 \sim N(\underline{y}_0, \underline{V}_0) \quad (\text{A1-13})$$

$$\tilde{y}_{0:-p+1} \sim N(0, V(\Phi, \Sigma_\epsilon)) \quad (\text{A1-14})$$

ただし、 $V(\Phi, \Sigma_\epsilon)$ は(A1-7)から示唆される定常分布の分散を表す。

次に、推計に使用したデータについて概説する。まず、推計期間は 1992 年第 1 四半期～2023 年第 1 四半期であり、岩崎他 (2016)等の先行研究でも指摘されている、わが国において自然利子率の低下が観察され始めたと言われる 1990 年代をカバーしている。次に、具体的に使用するデータについて、短期名目金利 R_t^{short} としてコールレート、名目長期金利 R_t^{long} として 10 年物の国債金利を使用する。ただし、推計対象となる大部分の期間において、コールレートは実効下限制約の影響を受けており、トレンド・サイクルの推計にも歪みを生じさせる恐れがある。こうした問題意識から Del Negro et al. (2017)と同様に、本行がゼロ金利・マイナス金利政策を導入している期間（1999 年第 2 四半期～2006 年第 2 四半期、2010 年第 4 四半期～）については、コールレートを推計に使用しない。次に、名目長期金利の予想短期金利成分 $R_t^{e,short}$ は、開発他 (2024)にもとづく 10 年物ゼロクーポンイールドに対応する予想短期金利成分を用いる。通常、名目長期金利の予想短期金利成分は何らかの金利の期間構造モデルやマクロ経済モデルを用いて推計される。本稿では、開発他 (2024)において、Imakubo and Nakajima (2015)が提案した金利の期間構造モデルを用いて推計した結果を用いている。最後に、インフレ率 π_t については、消費者物価指数（総合除く生鮮食品、消費税調整済み）の前年比、予想インフレ率 π_t^e については、「コンセンサス・フォーキャスト」の 6～10 年先（消費税調整済み）を使用している。また、事前分布等のパラメータに関しても Del Negro et al. (2017)と整合的な値を使用している。まず、トレンド項の初期値 $N(\underline{y}_0, \underline{V}_0)$ に関して、 $\underline{y}_0 = (\underline{\pi}_0, \underline{r}_0)'$ は、わが国の自然利子率の先行研究やインプットデータをもとに $(\underline{\pi}_0, \underline{r}_0, \underline{tp}_0)' = (1, 1, 0.5)'$ としており、トレンド項の初期値に係る分散共分散行列 $\underline{V}_0$ は、0.1 を対角成分とする対角行列とした。トレンド項の分散に関する事前分布 $p(\Sigma_e)$ について、 $\underline{\Sigma}_e$ は $(\underline{\pi}_t, \underline{r}_t, \underline{tp}_t)$ に対応する対角成分が $(2/400, 2/400, 1/1600)$ となる対角行列であり²⁰、 κ_e は 100 をとる。次に、サイクル項が従う VAR 過程の次数については Del Negro et al. (2017)と同様 $p = 5$ とし、VAR 過程の係数に係る事前分布 $p(\varphi|\Sigma_\epsilon)$ についても自己ラグ係数を 0 とする以外は標準的な Minnesota Prior に従う。サイクル項の分散に関する事前分布 $p(\Sigma_\epsilon)$ については、 $\underline{\Sigma}_\epsilon$ は $(\tilde{R}_t^{short}, \tilde{R}_t^{long}, \tilde{R}_t^{e,short}, \tilde{\pi}_t, \tilde{\pi}_t^{short})$ に対応する対角成分が $(1, 1, 0.5, 2, 1)$ となる対角行列であり、 κ_ϵ は 100 をとる。最後に、バイアス項 μ^π の事前分布 $p(\mu^\pi)$ については、 $\underline{\mu}^\pi = 1, \sigma_{\mu^\pi}^2 = 1$ としている。

²⁰ ① $\tilde{r}_t$ の分散が、先行研究で示されるわが国を対象とした自然利子率の推計値の分散と整合的となる、② $\tilde{r}_t \cdot \tilde{tp}_t$ の分散の和が、日本銀行推計の潜在成長率の分散と整合的となるようなパラメータを選択している。

補論 2. Holston, Laubach and Williams (2023)の手法の概要

Holston, Laubach and Williams (2023、以下 HLW)の手法をわが国に適用した r^* の推計について概説する。オリジナルとなる米国の r^* の推計手法である Laubach and Williams (2003)および HLW (2017)は、準構造モデルのベンチマークとして長年参照されてきた手法であったが、コロナ禍においてインプットデータが当該モデルの前提から大きく外れ、推計値の不確実性が高まるといった問題が生じた。HLW (2023)の手法は、①コロナ禍に伴う持続的な供給制約が潜在産出量に与える影響を考慮したうえで、②需給ギャップやインフレ率に係るコロナ禍以降の分散に柔軟性を与えることで、こうした問題に対処した。以下で解説する推計手法は、Laubach and Williams (2003)の手法をわが国に適応した岩崎他 (2016)をベースに、HLW (2023)の手法を参考として、コロナ禍へ対応するための変更を行ったものである。

本手法は、IS 曲線とフィリップス曲線を観測方程式に、 r^* や潜在 GDP 等の状態変数の動学式を状態方程式にとった状態空間表現を最尤法で推計したもの、と表現できる。具体的に、まず観測方程式は以下で与えられる。

$$\tilde{y}_t^{adj} = a_{y,1}\tilde{y}_{t-1}^{adj} + a_{y,2}\tilde{y}_{t-2}^{adj} + a_r \frac{r_{t-1}-r_{t-1}^*+r_{t-2}-r_{t-2}^*}{2} + \varepsilon_t^y, \varepsilon_t^y \sim N(0, \sigma_y^2) \quad (A2-1)$$

$$\begin{aligned} \pi_t = & \beta_1\pi_{t-1} + \beta_2 \sum_{i=2}^4 \frac{\pi_{t-i}}{3} + (1 - \beta_1 - \beta_2) \sum_{i=5}^8 \frac{\pi_{t-i}}{4} + \beta_3(y_{t-1} - y_{t-1}^*) \\ & + \beta_4(\pi_t^l - \pi_t) + \beta_5(\pi_t^o - \pi_t) + \varepsilon_t^\pi, \varepsilon_t^\pi \sim N(0, \sigma_\pi^2) \end{aligned} \quad (A2-2)$$

ここで、 $\tilde{y}_t^{adj}$ は供給制約調整済み需給ギャップ、 r_t は実質短期金利、 π_t はインフレ率、 y_t は GDP、 y_t^* は潜在 GDP、 π_t^l は輸入インフレ率、 π_t^o は原油価格上昇率を表す。次に、HLW (2023)の手法のポイントの一つである、供給制約調整済み需給ギャップ $\tilde{y}_t^{adj}$ と y_t 、 y_t^* の間に、以下のような関係を想定する。

$$\tilde{y}_t^{adj} = y_t - (y_t^* + \phi d_t) \quad (A2-3)$$

ここで、 d_t は負の供給制約ショックを表す。従って、(A2-2)で表されるフィリップス曲線は、負の供給制約ショック d_t の影響を含む需給ギャップ $(\equiv y_t - y_t^*)$ に基づいて定式化されている一方、(A2-1)で表される IS 曲線は、負の供給制約ショック d_t の影響を控除した供給制約調整済み需給ギャップ $\tilde{y}_t^{adj}$ によって定式化されている。言い換えれば、コロナ禍における GDP の低下や需給ギャップの悪化は、それが負の供給制約ショックによって引き起こされたと考えられる限りにおいて、 r^* の推計値には影響を与えない、と想定している。

また、HLW (2023)は、IS 曲線・フィリップス曲線の誤差項に柔軟性を与えることによって、コロナ禍の影響を捉えようと試みている。つまり、各誤差項が $\varepsilon_t^{\tilde{y}} \sim N(0, (\kappa_t \sigma_{\tilde{y}})^2)$ 、 $\varepsilon_t^{\pi} \sim N(0, (\kappa_t \sigma_{\pi})^2)$ という形で正規分布に従う下、時変パラメータ κ_t を

$$\kappa_t = \begin{cases} \kappa_{2020}, & 2020: Q2 \leq t \leq 2020: Q4 \\ \kappa_{2021}, & 2021: Q1 \leq t \leq 2021: Q4 \\ \kappa_{2022}, & 2022: Q1 \leq t \leq 2022: Q4 \\ 1, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (\text{A2-4})$$

のような形で与えることで、コロナ禍によって大きく減少した GDP 等の影響を軽減している。こうした手法はわが国の r^* の推計においても適用可能であるが、後述のインプットデータを用いて推計を行ったところ、 κ_{2020} の値が、1 を下回る結果となった。これは、IS 曲線・フィリップス曲線では捉えきれない供給制約調整済み需給ギャップ $\tilde{y}_t^{adj}$ やインフレ率 π_t の変動がコロナ禍以降増加したと考える HLW (2023) の結果に反するものであり、言い換えるとわが国においては負の供給制約ショック d_t による調整のみで十分 IS 曲線・フィリップス曲線による説明力を高めたと考えられる。こうした結果から、本稿における推計手法では、全期間にわたって $\kappa_t = 1$ とした。

使用したインプットデータは岩崎他 (2016) と基本的に同じものとなっている。産出量は実質 GDP (対数値)、一般物価上昇率は消費者物価指数 (総合除く生鮮食品、1969 年以前は総合除く季節商品、季節調整済・消費税調整済) 前年比、輸入物価上昇率は輸入物価指数前年比、原油価格上昇率は貿易統計ベースの石油価格前年比、実質短期金利は無担保コールレート (翌日物、1985 年第 2 四半期以前は有担保コールレートから推計) から 1 年後の一般物価上昇率の AR(3) モデルによる予測値を除いた系列、をそれぞれ使用した。

また、HLW (2023) では、式(A2-3)の負の供給制約ショック d_t に対して、オックスフォード大学が公表する「公衆衛生上の措置の厳格化指数」を利用している。わが国における同指数の動きを確認すると、厳格化のピークは 2021 年第 3 四半期にあり、コロナ禍において最も GDP が悪化した 2020 年第 2 四半期と一致せず、少なくともわが国においては同指数がわが国における供給制約を捉えるための代理指標としてふさわしくない可能性が示唆される。こうした問題意識の下、本稿では厳格化指数に代わる指標として、同様にコロナ禍の影響を捉える人出に関するデータであり 2020 年第 2 四半期にボトムを付ける、Google 人出指数 (小売娯楽) を用いている²¹。

²¹ 供給制約を表す変数としては、多くの候補が考えられる。本推計に際しては、公衆衛生上の措置の厳格化指数のほか、Google 人出指数 (小売娯楽等の各内訳指数)、Google trends (「供給制約」

補論3. 今久保・小島・中島 (2015)、Nakajima et al. (2023)の手法（均衡イールドカーブモデル）の概要

ここでは、今久保・小島・中島 (2015)、Nakajima et al. (2023)の手法について概説する。本手法は先に紹介した Laubach and Williams (2003)等と同様、IS 曲線に基づいて景気循環を捉える。ただし、伝統的なモデル・推計手法が、IS 曲線において、短期実質金利と短期自然利子率の差によって定義される金利ギャップと需給ギャップの間に関係を見出すのに対して、今久保・小島・中島 (2015)や Nakajima et al. (2023)は、こうした自然利子率の概念を年限方向に拡張している。つまり、景気中立的な短期実質金利に対応する概念として、景気中立的なイールドカーブの水準を均衡イールドカーブとして定義し、実際のイールドカーブとの差分で与えられるイールドカーブギャップと需給ギャップに基づいた IS 曲線を考える。

推計手法については、Brzoza-Brzezina and Kotłowski (2014)に倣って（１）動学的ネルソン・シーゲル分解に基づく実質イールドカーブのファクターの推計、（２）均衡イールドカーブの推計、の２段階で行う。第一段階について、以下の式形を考える。

$$r_{\tau,t} = L_t + S_t \frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} + C_t \left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau} \right) + \varepsilon_{\tau,t}, \quad \varepsilon_{\tau,t} \sim N(0, \sigma_{\varepsilon_\tau}^2) \quad (\text{A3-1})$$

$$\begin{bmatrix} L_t - \mu_L \\ S_t - \mu_S \\ C_t - \mu_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{t-1} - \mu_L \\ S_{t-1} - \mu_S \\ C_{t-1} - \mu_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi_t^L \\ \xi_t^S \\ \xi_t^C \end{bmatrix}, \quad \xi_t^i \sim N(0, \sigma_{\xi^i}^2) \text{ for } i = L, S, C \quad (\text{A3-2})$$

ただし、 $r_{\tau,t}$ は年限 τ の実質金利、 λ はネルソン・シーゲル・モデルのパラメータ、 L_t は水準、 S_t は傾き、 C_t は曲率ファクターを示す。(A3-1)式は、実質イールドカーブの観測方程式、(A3-2)式は各ファクターの遷移方程式である。第一段階では、カルマン・フィルターによる最尤法を用いて各ファクターの推計を行う。

続く第二段階では、各ファクターを所与として、年限方向に拡張された IS 曲線から均衡イールドカーブの推計を行う。具体的な式形としては、以下の通り。

と検索された回数）等を候補として、複数のスペックを比較した。その結果、推計される ϕ が最も大きく、感染症拡大下における供給制約をより適切に反映しているとみられる Google 人出指数（小売娯楽）を採用した。

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} y_t - y_t^* \\ L_t \\ S_t \\ C_t \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_y & b_L & b_S & b_C \\ 0 & a_L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} - y_t^* \\ L_{t-1} \\ S_{t-1} \\ C_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_L & b_S & b_C \\ 1 - a_L & 0 & 0 \\ 0 & 1 - a_S & 0 \\ 0 & 0 & 1 - a_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_t^* \\ S_t^* \\ C_t^* \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ g_{yL} & 1 & 0 & 0 \\ g_{yS} & 0 & 1 & 0 \\ g_{yC} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_t^y \\ \varepsilon_t^L \\ \varepsilon_t^S \\ \varepsilon_t^C \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{A3-3}$$

ただし、 $y_t - y_t^*$ は需給ギャップ、 L_t^*, S_t^*, C_t^* は均衡イールドカーブの水準、傾き、曲率ファクターである。(A3-3) 式の1行目は、年限方向に拡張されたIS曲線、その他の行は、実質イールドカーブの動学を規定している。また、パラメータ b_L, b_S, b_C は、 $\phi(\tau)$ を年限ごとの金利ギャップ ($g_{\tau,t} \equiv r_{\tau,t} - r_{\tau,t}^*$) に対する需給ギャップの感応度の違いを表すパラメータとして、以下を満たす。

$$\frac{b_L}{b} = \int_0^T \phi(\tau) d\tau \tag{A3-4}$$

$$\frac{b_S}{b} = \int_0^T \left\{ \phi(\tau) \frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} \right\} d\tau \tag{A3-5}$$

$$\frac{b_C}{b} = \int_0^T \left\{ \phi(\tau) \left(\frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau} \right) \right\} d\tau \tag{A3-6}$$

なお、基準化のため、 $\phi(\tau) \geq 0, \int_0^T \phi(\tau) d\tau \equiv 1$ とする。次に、均衡イールドカーブの各ファクターの動学については潜在成長率 ($g_{y,t}^* \equiv y_t^* - y_{t-1}^*$) との関係で与えられるが、各ファクターと潜在成長率の変化率を対応させるか、水準を対応させるかで異なった定式化が考えられる。

$$\begin{bmatrix} L_t^* \\ S_t^* \\ C_t^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{t-1}^* \\ S_{t-1}^* \\ C_{t-1}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_{yL} \\ h_{yS} \\ h_{yC} \end{bmatrix} (g_{y,t}^* - g_{y,t-1}^*) + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ h_{LS} & 1 & 0 \\ h_{LC} & h_{SC} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_t^{L^*} \\ \varepsilon_t^{S^*} \\ \varepsilon_t^{C^*} \end{bmatrix} \tag{A3-7}$$

$$\begin{bmatrix} L_t^* \\ S_t^* \\ C_t^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_L^* & 0 & 0 \\ 0 & p_S^* & 0 \\ 0 & 0 & p_C^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{t-1}^* \\ S_{t-1}^* \\ C_{t-1}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_{yL} \\ h_{yS} \\ h_{yC} \end{bmatrix} g_{y,t}^* + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ h_{LS} & 1 & 0 \\ h_{LC} & h_{SC} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_t^{L^*} \\ \varepsilon_t^{S^*} \\ \varepsilon_t^{C^*} \end{bmatrix} \tag{A3-8}$$

変化率を対応させる定式化(A3-7)は今久保・小島・中島 (2015)で、水準を対応させ

る定式化(A3-8)は Nakajima et al. (2023)で用いられた定式化である。

推計に使用するデータは、名目ゼロクーポン金利、インフレ予想、需給ギャップと潜在成長率に大別される。推計上のインプットデータとなる実質ゼロクーポン金利は、名目ゼロクーポン金利を「コンセンサス・フォーキャスト」の期間別インフレ予想で実質化した系列を採用する。インフレ予想の調査対象期間が 10 年先までに限られているため、10 年以降の予想については、6～10 年先の予想で不変と仮定している。また、半期ごとの調査であるため、線形補間により四半期化している。推計に使用した実質ゼロクーポン金利の年限は、1、2、3、7、10、20 年であり、需給ギャップと潜在成長率は、日本銀行調査統計局による試算値である。最後に、サンプル期間は、1992 年第 3 四半期から 2023 年第 1 四半期までである。