



日本銀行ワーキングペーパーシリーズ

ブレイクイーブン・インフレ率から抽出される 日本の市場参加者の長期インフレ予想

平木一浩*

kazuhiro.hiraki@boj.or.jp

平田渉*

wataru.hirata@boj.or.jp

No.20-J-6
2020年9月

日本銀行
〒103-8660 日本郵便（株）日本橋郵便局私書箱30号

* 企画局

日本銀行ワーキングペーパーシリーズは、日本銀行員および外部研究者の研究成果をとりまとめたもので、内外の研究機関、研究者等の有識者から幅広くコメントを頂戴することを意図しています。ただし、論文の中で示された内容や意見は、日本銀行の公式見解を示すものではありません。

なお、ワーキングペーパーシリーズに対するご意見・ご質問や、掲載ファイルに関するお問い合わせは、執筆者までお寄せ下さい。

商用目的で転載・複製を行う場合は、予め日本銀行情報サービス局 (post.prd8@boj.or.jp) までご相談下さい。転載・複製を行う場合は、出所を明記して下さい。

ブレイクイーブン・インフレ率から抽出される 日本の市場参加者の長期インフレ予想*

平木 一浩[†] 平田 渉[‡]

2020年9月

要旨

ブレイクイーブン・インフレ率（BEI）は市場参加者のインフレ予想を捉えた指標としてみられているが、日本の BEI は様々なサーベイ調査における長期インフレ予想指標よりも低位で推移している。先行研究では、長期の BEI の変動要因として、長期インフレ予想に加え、①物価連動国債の元本保証プレミアム、②同国債の流動性プレミアム、③名目タームプレミアムと実質タームプレミアムの較差（TP 較差）を挙げている。本稿では、アフィン期間構造モデルを推計して日本の BEI を要因分解し、日本の市場参加者の長期インフレ予想を抽出した。推計結果からは、物価連動国債の元本保証プレミアムは BEI の押し上げに、同国債の流動性プレミアムと TP 較差は下押しに、それぞれ無視しえない寄与をしていることが分かった。このことは、日本の BEI の動きが日本の市場参加者の長期インフレ予想以外の要因によっても変動してきたことを示唆している。その結果、BEI からこれら 3 つの要因を取り除いて抽出された長期インフレ予想は、ほぼ一貫して日本の BEI よりも高い水準で推移している。

JEL 分類番号 : E31、E43、G12

キーワード : ブレイクイーブン・インフレ率、インフレ予想、流動性プレミアム、元本保証プレミアム、タームプレミアム

* 本稿の作成にあたり、一上響氏、上野陽一氏、大石凌平氏、北村富行氏、黒住卓司氏、小林悟氏、田中雅樹氏、長野哲平氏、西崎健司氏、嶺山友秀氏および日本銀行スタッフから有益なコメントを頂戴した。ただし、本稿のありうべき誤りは全て筆者ら個人に属する。なお、本稿に示される内容や意見は、筆者ら個人に属するものであり、日本銀行及び企画局の公式見解を示すものではない。

[†] 日本銀行企画局（kazuhiro.hiraki@boj.or.jp）

[‡] 日本銀行企画局（wataru.hirata@boj.or.jp）

1 はじめに

名目長期国債と物価連動国債の利回り較差であるブレイクイーブン・インフレ率（BEI）は、市場参加者のインフレ予想を捉えた代表的な指標としてみられている。そうしたなか、日本では、図1に示されているように、BEIが様々なサーベイ調査における長期インフレ予想指標よりも概ね低位で推移している。このようなBEIとサーベイ調査のインフレ予想との乖離は、直接観察することのできないインフレ予想の評価において、一つの問題となりうる。この点、中央銀行関係者などの間では、BEIは、物価連動国債の流動性プレミアムをはじめとする様々な要因を含んでいることから、市場参加者のインフレ予想から乖離する可能性があり、機械的にBEIをインフレ予想指標とみなすには留意を要することが指摘されている（例えば、[Bernanke 2004](#) や [Yellen 2015](#)）。

先行研究では、長期のBEIの変動要因として、長期インフレ予想に加え、①物価連動国債の元本保証プレミアム、②同国債の流動性プレミアム、③名目タームプレミアムと実質タームプレミアムの較差（以下、TP較差）が挙げられている。そこで、これら3つの要因をBEIから取り除くことで市場参加者の長期インフレ予想を抽出することが考えられる。本稿では、米国のBEIを対象にした研究 [Andreasen, Christensen, and Riddell \(2018\)](#)（以下、ACR）に倣い、アフィン期間構造モデルを推計して日本のBEIから上記3つの要因を取り除き、日本の市場参加者の長期インフレ予想を抽出している。なお、推計にあたっては、ACRのアフィン期間構造モデルを、日本の物価連動国債のデータ制約や日米間における物価連動国債市場の環境の違いといった点を考慮して修正している。

長期のBEIが市場参加者の長期インフレ予想と上記①～③の要因から構成されることは、次のように確認することができる。まず、名目長期国債利回りは、将来の名目短期金利の予想経路に基づく名目長期金利の予想成分と、名目タームプレミアムに分解できる。

$$\text{名目長期国債利回り} = \text{名目長期金利の予想成分} + \text{名目タームプレミアム}$$

他方、物価連動国債利回りは、将来の実質短期金利の予想経路に基づく実質長期金利の予

想成分と、実質タームプレミアム、元本保証プレミアム、流動性プレミアムに分解できる。

$$\begin{aligned} \text{物価連動国債利回り} &= \text{実質長期金利の予想成分} + \text{実質タームプレミアム} \\ &\quad - \text{元本保証プレミアム} + \text{流動性プレミアム} \end{aligned}$$

元本保証プレミアムと流動性プレミアムは、物価連動国債特有の要因である。元本保証プレミアムについては、米国をはじめ多くの先進国の物価連動国債や、2013年に発行が開始された日本のいわゆる新物価連動国債において、仮に発行時点から償還時点の間で物価水準が下落しても、額面金額（発行時点の想定元本額）が償還される元本保証が付されており、物価連動国債利回りの下押し要因となりうる。他方、流動性プレミアムについては、物価連動国債市場が名目国債市場に比べて流動性が低いことから、これが物価連動国債利回りの押し上げ要因となりうる（例えば、[D'Amico et al. 2018](#) や [湯山・森平 2017](#)）。

ここで、名目長期国債利回りから物価連動国債利回りを差し引くと、次の長期の BEI に関する要因分解式が得られる。

$$\begin{aligned} \text{長期の BEI} &= \text{市場参加者の長期インフレ予想} + \text{物価連動国債の元本保証プレミアム} \\ &\quad - \text{物価連動国債の流動性プレミアム} + \text{TP 較差} \end{aligned}$$

すなわち、長期の BEI は、市場参加者の長期インフレ予想と上記①～③の要因（物価連動国債の元本保証プレミアム、同国債の流動性プレミアム、TP 較差）から構成される¹。

本稿の主な分析結果を予め述べると以下のとおりである。まず、日本の BEI において、①～③の要因はいずれも無視しえない影響を及ぼしていることが分かった。①物価連動国債の元本保証プレミアムは、新物価連動国債の発行開始以来、日本の BEI の押し上げに寄与している。直近の新型コロナウイルス感染症の世界的大流行時には、押し上げ寄与が拡大した。②物価連動国債の流動性プレミアムについては、新旧物価連動国債の移行期を除き、日本の BEI の下押しに寄与している。世界金融危機時には下押し寄与を一時的に急拡大させる局面

¹教科書的な資産価格理論では、TP 較差は、将来のインフレに関する不確実性に対して投資家が要求する対価と解釈可能なため、「インフレリスクプレミアム」と呼ばれている。もっとも、近年では、主要中央銀行による大規模な資産買入れが、名目タームプレミアムを相対的に大きく低下させているとみられるほか（[須藤・田中 2018](#) など）、安全資産需要を背景とした名目金利の低下圧力（例えば、[Krishnamurthy and Vissing-Jorgensen 2012](#) や [一上ほか 2012](#)）も、名目タームプレミアムを下押ししている可能性がある。これらの要因も、他を一定とすれば TP 較差の低下要因となるが、これらを投資家がインフレリスクに対して要求するプレミアムの変化と解釈することは、実態にそぐわない可能性がある。このため、本稿では、先行研究に言及するうえで必要な場合を除いて、インフレリスクプレミアムという表現は用いず、単に TP 較差と記述する。

もみられたが、新物価連動国債の発行開始後は、緩やかな下押し寄与が続いている。③ TP 較差は、大部分の期間において、日本の BEI の下押しに寄与し、近年、下押し寄与が拡大傾向にある。

次に、これら 3 つの要因を日本の BEI から取り除いて得られる日本の市場参加者の長期インフレ予想については、ほぼ一貫して BEI よりも高い水準で推移していることが分かった。市場参加者の長期インフレ予想は、世界金融危機時に原油価格が大幅に下落するなか大きくマイナスになったが、その後は上昇を続け、日本銀行による量的・質的金融緩和（QQE）導入後の 2014 年半ばには 2% 程度に達した²。その後、サーベイ調査の長期インフレ予想指標と同様に、2016 年前半にかけて原油価格が下落するなか 1% 程度まで低下し、2020 年初まで概ね 1% 前後で推移した。直近の新型コロナウイルス感染症の世界的大流行時には、世界経済が急速に落ち込み、原油価格が下落するなか、弱含んだ。

BEI を巡る学術的な研究は、①～③の要因に関する評価を中心に、近年、急速に進展している。米国の BEI を対象とした研究では、例えば、世界金融危機時における TIPS（米国の物価連動国債）の利回り急上昇などを受けて、物価連動国債の流動性プレミアムに関する研究の蓄積が進んでいる（Kajuth and Watzka 2011、Haubrich et al. 2012、Abrahams et al. 2016、D'Amico et al. 2018 など）。また、世界金融危機後の低インフレ環境が続いていることなどを背景に、銘柄別 TIPS データを用いて TIPS の元本保証プレミアムを推計する研究も発展している（Grishchenko et al. 2016、ACR など）。TP 較差（インフレリスクプレミアム）に関しては、Campbell and Shiller (1996) 以来、多くの研究がみられる（詳細については、Kupfer 2018 によるサーベイを参照）。これらの先行研究のうち、本稿のモデルが準拠している ACR は、アフィン期間構造モデルに基づいて、3 つの要因すべてを推計する画期的な手法を提案している。

日本の BEI を対象とした研究は、米国のそれに比べると少ないが、湯山 (2016)、湯山・森平 (2017)、Christensen and Spiegel (2019)（以下、CS）が、3 つの要因のうち 1 つないし 2 つを取り上げて分析している³。湯山 (2016) は、金利の確率的変動モデルをインフレ率の

²市場参加者のインフレ予想が原油価格動向の影響を受けやすいとの結果を報告している海外の研究（Owyang and Shell 2019 など）と同様に、本稿で推計した日本の市場参加者の長期インフレ予想もそのような特徴を有している。

³なお、BEI 以外の市場データを用いた研究として、Imakubo and Nakajima (2015) が挙げられる。彼らは、インフレスワップのデータを用いてアフィン期間構造モデルを推計し、日本の市場参加者のインフレ予想が、本稿と同様に、世界金融危機後に大きなマイナスになったあと、2012 年から 2014 年にかけて上昇傾向にあったことを報告している。

モデル化に援用することで、元本保証プレミアムをシミュレーションによって推計し、推計値が小さいことを示している。次に、湯山・森平 (2017) は、流動性プレミアムとインフレリスクプレミアムの代理指標を観測可能なデータから作成したうえで、インフレ予想を状態変数とする状態空間モデルを推計している。その結果、2005～2014年の平均で、流動性プレミアムとインフレリスクプレミアムが日本のBEIの下押しに、それぞれ無視しえない寄与をしていると報告している。最後に、CS は、アフィン期間構造モデルを用いて、元本保証プレミアムを考慮した推計を行っている。推計結果からは、非常に大きな元本保証プレミアムが示唆されている。このように、日本のBEIを対象とした先行研究では、3つの要因の推計値に大きなばらつきがみられる。これには、湯山・森平 (2017) では物価連動国債の元本保証プレミアムが推計されていない、また、CS では同国債の流動性プレミアムが考慮されていないなど、いずれの先行研究も3つの要因のうちの一部を捨象していることが影響していると考えられる。この点、本稿は、日本のBEIを対象に初めて3つの要因すべてを同時推計することで、市場参加者の長期インフレ予想と3つの要因に関する推計精度を高めることに貢献している。

BEIにおける長期インフレ予想と3つの要因を同時推計する際には、物価連動国債の流動性プレミアムの識別手法がとくに重要となる。本稿では、BEIとインフレスワップレートの較差に物価連動国債の流動性プレミアムに関する情報が含まれていることを理論的・実証的に示した研究 (Haubrich et al. 2012 など) と、銘柄別の物価連動国債価格データから流動性プレミアムの形成に関する情報を抽出しつつアフィン期間構造モデルを推計した研究 (ACR) から、それぞれの長所を取り入れた新たな流動性プレミアムの識別手法を提案している⁴。すなわち、本稿では、物価連動国債の流動性プレミアムは、インフレスワップレートの流動性プレミアム対比でみて相応に大きいことを報告している先行研究を踏まえて、物価連動国債価格とインフレスワップレートの両方の情報を用いて物価連動国債の流動性プレミアムを識別している。かつ、物価連動国債価格については、個別銘柄のデータを活用することで、クロスセクション方向からも流動性プレミアムの形成に関する情報を得ている。このように、本稿では、物価連動国債とインフレスワップレートの情報を併用してアフィン期間構造モデル

⁴このほかにも、ビッド・アスク・スプレッドやVIX等、物価連動国債の流動性を表す代理変数を利用する方法 (Abrahams et al. 2016, Pflueger and Viceira 2016, 湯山・森平 2017) や、サーベイ調査のインフレ予想指標とBEIを組み合わせることで、流動性プレミアムを推計する方法 (D'Amico et al. 2018) が提案されている。ただし、これら手法は、使用する代理変数やサーベイデータの選択に推計結果が依存する。

を推計するという、先行研究では行われていない新たなアプローチによって、物価連動国債のデータ制約が大きい日本についても、より精度の高い流動性プレミアムの推計を実施している。

本稿の構成は以下のとおりである。2 節では、日本の物価連動国債の商品設計や市場環境について概観したうえで、そこから示唆される分析上の留意点を示す。3 節では、本稿で用いる理論モデルについて解説する。4 節では、推計に使用するデータと推計アプローチの詳細について解説する。5 節では、推計結果を報告する。6 節は本稿のまとめである。

2 日本の物価連動国債市場の特徴と分析上の留意点

2.1 物価連動国債の商品設計・市場規模

物価連動国債は、元本とクーポンが物価指数に連動する国債であり、日本では、消費者物価指数（CPI、総合除く生鮮食品）に連動する債券の発行が、2004 年に開始された⁵。その後、世界金融危機の発生を背景とした需要減少を受けて、2008 年には一旦発行が中断されたが、2013 年 10 月に発行が再開され、2020 年現在においても四半期ごとの入札が行われている。このうち、中断前の期間（2004～2008 年）に発行された銘柄は「旧物価連動国債」と呼ばれる一方、2013 年以降に発行されている銘柄は「新物価連動国債」と呼ばれる。

この新旧物価連動国債の間には、元本保証の有無という決定的な違いがある。すなわち、旧物価連動国債は、元本保証が付されておらず、償還時点の物価水準が発行時点の物価水準を下回ると、償還額が額面金額（発行時点の想定元本額）を下回る一方、新物価連動国債は、元本保証が付されており、償還時点の物価水準が発行時点の物価水準を下回る場合でも、額面金額が償還される。

次に、日本の物価連動国債の市場規模を、米国の物価連動国債（TIPS）市場と比較する（図 2（1））。まず発行残高については、日本では 2020 年 3 月末時点で約 12 兆円となっており、これは利付国債の発行総額の 1.2% に相当する。一方、同時期の TIPS の発行残高は約 1.5 兆ドル、市場性米国債の発行残高に占める割合は 8.9% となっており、日本の市場規模の方が小さいことがわかる。また、発行銘柄数についても、米国の TIPS は、1997 年の発行開

⁵物価連動国債が参照する物価指数は「適用指数」と呼ばれ、約 3 か月前の CPI に等しい。詳細な解説については、次の財務省のウェブサイト参照（https://www.mof.go.jp/jgbs/topics/bond/10year_inflation-indexed/keisuu/index.htm）。

始以降、4年限（5年・10年・20年・30年）計77銘柄が発行されている一方（2020年3月時点）、日本の物価連動国債は10年債のみの発行であり、2004年の発行開始以降、24銘柄の発行（2020年3月時点）にとどまっている。

2.2 物価連動国債市場の市場環境と流動性

日本の物価連動国債市場の市場環境を巡っては、「投資家層の拡がりが限定的」であるなか、「恒常的な需給の不均衡が生じている」状況が指摘されてきた（財務省 2016）。また、流動性を測る指標の一つである売買回転率（＝売買高／流通残高）は、米国と比べてかなり低位で推移しており、日本の物価連動国債市場の流動性が恒常的に低いことが窺われる（図2（2））。こうしたなか、財務省は、2007年以降、とりわけ物価連動国債の需要が低下した局面において、同国債の買入消却を累次にわたって実施してきた。

このような市場環境のもとでは、市場の混乱などを契機とした投資家の短期的な投資行動や、特定の市場参加者の大規模な売買が、物価連動国債の利回りに無視しえない影響を及ぼしうる。例えば、物価連動国債の発行再開期（2013年10月～2015年1月）に、新物価連動国債の落札を条件に実施された旧物価連動国債の大規模な追加買入消却は、旧物価連動国債の価格を押し上げ、同利回りを低下させる効果を生んだ可能性がある⁶。実際、新旧物価連動国債の利回りの推移を銘柄ごとにみると（図3）、世界金融危機が深刻化した2008年後半には旧物価連動国債の利回りが大幅に上昇する局面がみられたほか、2013年の物価連動国債再発行から数年の間、新旧物価連動国債の利回りの間に、残存年限や商品設計の違いだけでは説明が難しいほど大きな断絶が存在する⁷。

2.3 分析上の留意点と本稿における工夫

アフィン期間構造モデルを用いて日本の物価連動国債市場を分析するにあたっては、2.1～2.2節でみてきた物価連動国債の商品特性や市場環境を適切に織り込む必要がある。また、発行の断絶等により生じるデータ制約に関する対応を工夫する必要がある。具体的な留

⁶新物価連動国債発行再開時に実施された追加買入消却に関する詳細については、財務省（2013）を参照。

⁷なお、新物価連動国債に付された元本保証は、新物価連動国債の利回りを旧物価連動国債対比で下押しすることを踏まえると、旧物価連動国債の追加買入消却等に起因する新旧物価連動国債間の利回りの断絶は、観察される利回り較差以上に大きい可能性が示唆される。

意点としては、以下の3点が挙げられる⁸。

第一に、元本保証が新物価連動国債のみに付されていることにより、元本保証プレミアムも新物価連動国債に対してのみ発生し、新旧物価連動国債の間で BEI に断絶が生まれることである (CS、湯山 2016)。このため、元本保証プレミアムが新物価連動国債の利回りをどの程度押し下げているかを推計することが必要となるが、本稿では、Christensen et al. (2012) に倣い、新物価連動国債の元本保証プレミアムを解析的に求めることが可能となる定式化を採用して対応する (3.2 節参照)。

第二に、物価連動国債の発行が5年間中断されたことや、発行年限が10年のみであるため、物価連動国債利回りのデータを幅広い残存年限でかつ連続的に入手することが不可能であり、実質金利期間構造の安定的な推計や、流動性プレミアムの識別などに際して支障となることである⁹。これに対し本稿では、物価連動国債のデータに加えて、インフレスワップの情報を併用することで対処する。インフレスワップは、満期時点において、実現したインフレ率と、契約時点で定められるインフレスワップレートを交換するスワップ取引である。このため、インフレスワップレートと名目金利データを組み合わせることで、実質金利に関する追加情報を得ることが可能となる。日本においては、2007年3月以降の期間について、1年先から10年先まで幅広い年限のインフレスワップレートのデータが連続的に入手可能であるため、これを活用することは、実質金利期間構造の安定的な推計に資する。また、3.3 節で後述するとおり、インフレスワップレートと BEI の較差から、物価連動国債の流動性プレミアムに関する情報を抽出することもできる (例えば、Haubrich et al. 2012 や D'Amico et al. 2018)。

第三に、物価連動国債市場は流動性が低いなどの環境にあるため、流動性プレミアムの推計にあたって、米国 TIPS の市場環境を踏まえた ACR の定式化をそのまま援用することの問題があることである。これに対し本稿では、物価連動国債の銘柄ごとの流動性が、発行からの経過年数に応じてどの程度変化するかについて、予備的な実証分析を行い、そこで得ら

⁸ このほか、物価連動国債およびインフレスワップが、消費税率引き上げの影響を含む CPI を参照している点にも留意が必要である。すなわち、消費税率の段階的な引き上げが市場参加者の予想に織り込まれる時期から、物価連動国債の参照 CPI に増税の影響が反映されるまでの期間におけるデータは、消費税率引き上げによる物価上昇効果を含むため、推計結果の定量的な解釈において注意を払う必要がある。

⁹ 例えば、Christensen et al. (2020) は、日米仏加の4か国について、新型コロナウイルス感染症の世界的大流行時における物価連動国債の元本保証プレミアムの動向を比較しているが、米仏加については物価連動国債の流動性プレミアムを考慮した ACR モデルを用いた推計を行っている一方、日本については流動性プレミアムを考慮していない CS モデルを用いた推計を行っている。日本についてのみ流動性プレミアムを考慮していない点について、Christensen et al. (2020) は、日本の物価連動国債のデータ制約を理由として挙げている。

れた日本固有の特徴を定式化に反映させることにより対応している（3.3 節参照）。

なお、物価連動国債の流動性プレミアムの推計を回避しつつ、市場参加者のインフレ予想を推計する方法として、Imakubo and Nakajima (2015) のように、インフレスワップのデータのみを用いることも考えうる。もっとも、日本のインフレスワップ市場は、物価連動国債市場対比でも取引が活発ではないため、インフレ予想に関する新たな情報がインフレスワップレートに織り込まれるまで、物価連動国債対比、長い時間がかかる可能性も否定できない。このことは、テクニカルには、インフレスワップレートに、相対的に大きな観測誤差が含まれる可能性を示唆する。このため、流動性プレミアムは相対的に大きいものの、インフレ率や実質金利に関する市場参加者の予想をより素早く反映する可能性のある物価連動国債価格をインフレスワップレートと併用することは、実質金利やインフレ予想をより頑健に推計するうえで有用であると考えられる¹⁰。このほか、本稿では、新物価連動国債の発行開始以降の期間については、旧物価連動国債のデータを使用しない。これは、2.2 節で述べたとおり、旧物価連動国債価格が、財務省による追加買入消却の影響等を大きく受けており、データの指標性が著しく低下している可能性が高いと判断したためである。

3 理論モデル

本節では、本稿で推計に用いるアフィン期間構造モデルについて解説する。まず、3.1 節では、アフィン期間構造モデル一般で成立する理論的結果を、本稿の分析で必要となる範囲で示す。そのうえで、3.2 節で、本稿で用いる具体的なモデルについて解説する。3.3 節では、流動性プレミアムについて、その定式化および識別に関する理論的背景について解説する。

3.1 アフィン期間構造モデルに関する一般的結果

アフィン期間構造モデルは、金利の期間構造を少数のファクターによって表現する。ここで、 X_t を N 個のファクターからなるベクトルとする。また、 N 個のファクターのうち、最初の $N - 1$ 個のファクターは、摩擦のない市場における名目金利および実質金利を規定するファクター（ファンダメンタル・ファクター）とし、 X_t^f で表す。最後の 1 ファクターは、物価連動国債の流動性プレミアムを規定するファクターとし、 X_t^{liq} で表わす。瞬間的名目金利

¹⁰実際、5.1 節では、物価連動国債の観測誤差の推計値が、インフレスワップレートの観測誤差の推計値よりも大幅に小さいことが示される。

は、次の式で与えられる。

$$r_t^N = \rho_0^N + (\rho_x^N)^\top X_t^f \quad (1)$$

ただし、 ρ_0^N はスカラー、 ρ_x^N は $(N-1) \times 1$ の定数ベクトルである。また、 \top はベクトルおよび行列の転置を表す。流動性ファクターは、名目金利には影響を与えないと仮定されることから、ファンダメンタル・ファクターのみが式 (1) に現れていることに留意されたい。

次に、物価連動国債に関する瞬時的実質金利を定義する。本稿では ACR に倣い、流動性ファクターは、物価連動国債の銘柄ごとに異なる影響を与えると考える。このため、物価連動国債に関する瞬時的実質金利は銘柄ごとに定義されることとなり、第 i 銘柄に関する瞬時的実質金利は次の式で与えられる。

$$r_t^{R,i} = \underbrace{\rho_0^R + (\rho_x^R)^\top X_t^f}_{r_t^{R,f}} + h^i(t) X_t^{liq} \quad (2)$$

ただし、 ρ_0^R はスカラー、 ρ_x^R は $(N-1) \times 1$ の定数ベクトルである。右辺の最初の 2 項の和 $r_t^{R,f}$ は、摩擦のない市場における瞬時的実質金利（ファンダメンタル実質金利）を表す。また、右辺最終項は、流動性ファクターの瞬時的実質金利への寄与を表す。ここで、 $h^i(t)$ は各物価連動国債銘柄への流動性ファクターの影響度を表す係数（流動性ファクター係数）である。

ファクター X_t は、リスク中立確率測度 \mathbb{Q} のもとで、次の確率微分方程式に従うとする。

$$dX_t = \mathcal{K}^\mathbb{Q}(\theta^\mathbb{Q} - X_t)dt + \Sigma dW_t^\mathbb{Q} \quad (3)$$

ただし、 $\mathcal{K}^\mathbb{Q}$ と Σ は $N \times N$ 行列、 $\theta^\mathbb{Q}$ は $N \times 1$ ベクトルであり、 $W_t^\mathbb{Q}$ はリスク中立確率測度下での N 次元標準ブラウン運動である。

この定式化のもと、アフィン期間構造モデルの理論的結果を用いると、時点 t における満期が時点 T の名目割引債価格 $P_t^N(T)$ 、および実質割引債価格 $P_t^{R,i}(T)$ は、次のように表すことができる。

$$P_t^N(T) = \exp\left(A_t^N(T) + B_t^N(T)^\top X_t^f\right) \quad (4)$$

$$P_t^{R,i}(T) = \exp\left(A_t^{R,i}(T) + B_t^{R,f}(T)^\top X_t^f + B_t^{R,i}(T) X_t^{liq}\right) \quad (5)$$

ここで、 $A_t^N(T)$ 、 $A_t^{R,i}(T)$ 、 $B_t^N(T)$ 、 $B_t^{R,f}(T)$ 、 $B_t^{R,i}(T)$ は、モデル・パラメータが与えら

れたもとで、適当な常微分方程式の解として得られる（本稿で用いるモデルにおける具体的な表現については補論 A を参照）。

式 (4)~(5) より、名目ゼロクーポンレート $R_t^N(T)$ と実質ゼロクーポンレート $R_t^{R,i}(T)$ は、以下のファクターに関するアフィン関数で与えられる。

$$R_t^N(T) = -\frac{1}{T-t} \left(A_t^N(T) + B_t^N(T)^\top X_t^f \right) \quad (6)$$

$$R_t^{R,i}(T) = -\frac{1}{T-t} \left(A_t^{R,i}(T) + B_t^{R,f}(T)^\top X_t^f + B_t^{R,i}(T) X_t^{liq} \right) \quad (7)$$

次に、インフレ率についての定式化を行う。フィッシャー方程式を踏まえると、将来のインフレ率の経路は、名目短期金利と実質短期金利の差の経路に等しい。さらに、物価連動国債に関する流動性ファクターは物価変動とは独立な市場の摩擦要因であることを踏まえると、瞬間的インフレ率は、瞬間的名目金利とファンダメンタル実質金利の差 $r_t^N - r_t^{R,f}$ に等しいことがわかる。このため、 Π_t を時点 t における物価水準としたとき、時点 t から T までのインフレ率は

$$\frac{\Pi_T}{\Pi_t} = e^{\int_t^T (r_s^N - r_s^{R,f}) ds} \quad (8)$$

と表わすことができる。瞬間的名目金利とファンダメンタル実質金利の差 $r_s^N - r_s^{R,f}$ は、ファンダメンタル・ファクター X_t^f のアフィン結合で表すことができるため、インフレ率のリスク中立確率測度下での期待値は以下のように表現することができる。

$$\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[\frac{\Pi_T}{\Pi_t} \right] = \exp \left(A_t^{IS}(T) + B_t^{IS}(T)^\top X_t^f \right) \quad (9)$$

ただし、割引債価格同様、 $A_t^{IS}(T)$ 、 $B_t^{IS}(T)$ は、適当な常微分方程式の解として得られる（本稿で用いるモデルにおける具体的な表現については補論 A を参照）。

以上の結果を踏まえて、インフレスワップレートの定式化を行なう。インフレスワップは、満期時点のみでキャッシュフローが発生するスワップ契約である。具体的には、時点 t における n 年満期のインフレスワップレートを $IS_t(n)$ とすると、固定サイドが $(1 + IS_t(n))^n$ 、変動サイドが Π_{t+n}/Π_t を満期時点で交換する契約となっている。このため、リスク中立価格評価式に基づくと、インフレスワップレートは次の式を満たす。

$$(1 + IS_t(n))^n = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[\frac{\Pi_{t+n}}{\Pi_t} \right]$$

この式を、式 (9) を踏まえて対数近似することで、インフレスワップレートは、次の式のよ

うに、ファクターのアフィン関数で表すことができる¹¹。

$$IS_t(n) = \frac{1}{n} \left(A_t^{IS}(t+n) + B_t^{IS}(t+n)^\top X_t^f \right) \quad (10)$$

3.2 本稿で用いるアフィン期間構造モデル

本稿では、4つのファンダメンタル・ファクター $X_t^f = [L_t^N, S_t^N, L_t^R, S_t^R]^\top$ と、流動性ファクター X_t^{liq} から構成される、5ファクター・アフィン期間構造モデルを用いる。4つのファンダメンタル・ファクターは、CSの定式化に倣い、名目金利の期間構造の水準と傾きを表わすファクター (L_t^N, S_t^N) と、実質金利の期間構造の水準と傾きを表わすファクター (L_t^R, S_t^R) から構成される¹²。さらに、3.1節で導入した各種モデル・パラメータについて、以下で詳述する定式化を行なう。これにより、観測方程式の具体的な形状を導出することができる。

まず、瞬時的名目金利は、名目水準ファクター L_t^N と、名目傾きファクター S_t^N を用いて、次のように定義される。

$$r_t^N = L_t^N + S_t^N \quad (11)$$

すなわち、式(1)において、 $\rho_0^N = 0$ 、 $\rho_x^N = [1, 1, 0, 0]^\top$ である。

瞬時的実質金利は、実質水準ファクター L_t^R 、実質傾きファクター S_t^R 、流動性ファクター X_t^{liq} を用いて、次のように定義される。

$$r_t^{R,i} = L_t^R + S_t^R + h^i(t) X_t^{liq} \quad (12)$$

すなわち、式(2)において、 $\rho_0^R = 0$ 、 $\rho_x^R = [0, 0, 1, 1]^\top$ である。流動性ファクター係数 $h^i(t)$ の定式化については、3.3節で詳述する。

ファクター X_t がリスク中立確率測度下で従う確率微分方程式（式(3)）のパラメータについては、ACRとCSに倣って、次の無裁定 Nelson-Siegel モデル（Christensen et al. 2011）

¹¹式(10)の対数近似 ($\log(1 + IS_t(n)) \doteq IS_t(n)$) の誤差は、一般的なインフレスワップレート値に対して非常に小さい。このため、以下の分析では、この対数近似誤差は無視する。

¹²なお、ACRはファンダメンタル・ファクターを、名目水準ファクター、実質水準ファクター、名目金利と実質金利に共通の傾き・曲率ファクターの4ファクターで構成している。CSの4ファクターモデルによる定式化は、Kim and Singleton (2012) による「日本の名目金利の期間構造は2ファクターモデルで良好に表現することができる」という結果に基くものである。

を仮定する。

$$\mathcal{K}^{\mathbb{Q}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa^{liq} \end{bmatrix}, \quad \theta^{\mathbb{Q}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \theta^{liq} \end{bmatrix}$$

さらに、 Σ については、ACR と同様、対角行列 $\Sigma = \text{diag}(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \dots, \sigma_{55})$ であると仮定する。

以上の定式化のもと、Christensen et al. (2011) や ACR の理論的結果を基に式 (6)・(7)・(10) を解くと、ゼロクーポンレートおよびインフレスワップレートを以下のとおり表すことができる。

$$R_t^N(T) = L_t^N + \frac{1 - e^{-\lambda^N(T-t)}}{\lambda^N(T-t)} S_t^N + A_t^N(T) \quad (13)$$

$$R_t^{R,i}(T) = L_t^R + \frac{1 - e^{-\lambda^R(T-t)}}{\lambda^R(T-t)} S_t^R + B_t^{R,i}(T) X_t^{liq} + A_t^{R,i}(T) \quad (14)$$

$$IS_t(T) = \left(L_t^N + \frac{1 - e^{-\lambda^N(T-t)}}{\lambda^N(T-t)} S_t^N \right) - \left(L_t^R + \frac{1 - e^{-\lambda^R(T-t)}}{\lambda^R(T-t)} S_t^R \right) + A_t^{IS}(T) \quad (15)$$

これらの表現は、4つのファンダメンタル・ファクターが、それぞれ名目金利・実質金利に対する Nelson-Siegel モデルにおける水準・傾きファクターに対応していると解釈可能であることを示している。各式の右辺最終項は、Nelson-Siegel モデルが無裁定条件を満たすために必要な調整項である。なお、これらの調整項および実質ゼロクーポンレートの流動性ファクターに関する係数 $B_t^{R,i}(T)$ は、非常に煩雑な形をしているため、具体的な計算結果は [補論 A](#) で示す。

式 (14) で導出した実質金利は、元本保証を持たない実質ゼロクーポンレートである。一方、本稿の分析では、元本保証を持つ利付物価連動国債価格をデータとして用いる。日本における物価連動国債のクーポン支払いが年2回であることを考慮すると、元本保証を持つ利付物価連動国債価格の理論値は、次のように表される。

$$\begin{aligned} \widehat{P}_t^{R,i} \left(T^i, \frac{\Pi_t}{\Pi_{t_0}^i} \right) &= \frac{c}{2} \frac{\tau_1}{1/2} e^{-\tau_1 R_t^{R,i}(\tau_1)} + \sum_{k=2}^{N_t^i-1} \frac{c}{2} e^{-\tau_k R_t^{R,i}(\tau_k)} \\ &+ \left(1 + \frac{c}{2} \right) e^{-\tau_{N_t^i} R_t^{R,i}(\tau_{N_t^i})} + POP_t \left(T^i, \frac{\Pi_t}{\Pi_{t_0}^i} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

ただし、 c はクーポン利率（年率）、 t_0^i は第 i 銘柄の物価連動国債の発行日、 N_t^i は時点 t における当該物価連動国債の残存期間におけるクーポン支払いの回数、 τ_k は時点 t から k 回目のクーポン支払い日までの期間を表す¹³。右辺最終項の POP_t は元本保証プレミアムを表わす項であり、日本においては新物価連動国債（ $i \geq 17$ ）について、この項を考慮する必要がある。ここで、元本保証プレミアムが発行時点から現時点までのインフレ率の関数となっていることに留意されたい。これは、他の条件を一定とすれば、発行時点から現時点まで既にインフレが進行している状況のほうが、償還時点の物価水準が発行時点の物価水準を下回る可能性が低くなることを反映している。元本保証プレミアム項の推計は、Duffie et al. (2000) および Christensen et al. (2012) による理論的結果を用いて算出する。詳細については、補論 B を参照されたい。

最後に、実確率測度 \mathbb{P} のもとで、ファクター X_t は次の確率微分方程式に従うものとする。

$$dX_t = \mathcal{K}^{\mathbb{P}}(\theta^{\mathbb{P}} - X_t)dt + \Sigma dW_t^{\mathbb{P}} \quad (17)$$

ここで、 $\mathcal{K}^{\mathbb{P}}$ と $\theta^{\mathbb{P}}$ は、各ファクターに関するリスクの市場価格を通じて、 $\mathcal{K}^{\mathbb{Q}} \cdot \theta^{\mathbb{Q}}$ とそれぞれ結びついている。本稿では、ACR に倣い、 $\mathcal{K}^{\mathbb{P}}$ は対角行列 $\mathcal{K}^{\mathbb{P}} = \text{diag}(\kappa_{11}, \kappa_{22}, \dots, \kappa_{55})$ 、 $\theta^{\mathbb{P}}$ は任意のベクトル $\theta^{\mathbb{P}} = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_5]^T$ であると仮定する。

なお、本稿における推計では、名目金利の下限を考慮していない。これは、本稿が採用した物価連動国債の元本保証プレミアムの推計方法が、名目金利がガウシアン・アフィン期間構造モデルに従うことを前提としているためであり、CS も同様の理由から名目金利の下限を考慮しないアフィン期間構造モデルを用いた推計を行っている¹⁴。

3.3 流動性プレミアムの識別方法と定式化

本稿では、3.1～3.2 節でみたとおり、銘柄別の物価連動国債価格とインフレスワップレートの両方を観測変数として含む定式化をとったうえで、流動性ファクターは物価連動国債価格に影響を与える一方、インフレスワップレートには影響を与えない、という仮定を置いたモデルを構築している。これにより本稿では、インフレスワップレートと BEI の較差（以下、

¹³債券を売買する際、債券の購入者は売却者に対して、取引後の初回クーポンについて経過利息を支払う必要がある。金融市場で提示される債券価格は、この経過利息分を調整した価格（clean price）である。このため、式 (16) において、初回クーポン支払い額は、係数 $\tau_1/(1/2)$ によって調整される。

¹⁴名目金利の下限を考慮した非線形モデルにおいて、現実的な計算負荷の範囲内で元本保証プレミアムを算出する手法を構築することは、今後の研究課題である。

IS-BEI 較差) を情報源として物価連動国債の流動性プレミアムを識別する。

IS-BEI 較差が、物価連動国債の流動性プレミアムの識別において有益な情報を含むことは、先行研究において理論的・実証的に示されている。まず、Christensen and Gillan (2012) は、名目国債の流動性プレミアムと物価連動国債の元本保証プレミアムが存在しない場合、IS-BEI 較差がインフレスワップと物価連動国債の流動性プレミアムの和に等しいことを理論的に示している¹⁵。こうした式が成立するもとの、近年発展している有力な資産価格理論である金融仲介機関資産価格モデル (intermediary asset pricing model)¹⁶ は、金融仲介機関にとって担保やバランスシートの観点から保有コストの重い現物金融資産、例えば物価連動国債については大きめの流動性プレミアムが発生する一方、インフレスワップ等のデリバティブは、担保負担などが軽い場合が多いため、対応する現物金融資産対比、相対的に流動性プレミアムが小さくなる傾向にあることを示している¹⁷。実際、米国を対象とした複数の実証研究は、インフレスワップの流動性プレミアムは、物価連動国債の流動性プレミアム対比、非常に小さいことを指摘している (例えば、Campbell et al. 2009、Haubrich et al. 2012、Fleckenstein et al. 2014)。これらの結果は、IS-BEI 較差の大部分は、物価連動国債の流動性プレミアムに起因することを示唆している。

日本においても、Imakubo and Nakajima (2015) や水門・内山 (2019) が、現物資産である物価連動国債は、デリバティブと異なり、市場で取引可能な国債量や需給状況の影響を直接受けうることを指摘している。とくに、物価連動国債市場における需給状況がより強く意識される日本においては、同国債の流動性プレミアムも相対的に大きなものになる可能性がある。もっとも、インフレスワップの流動性プレミアムは厳密にはゼロとは等しくはない。とくに、取引量が少ない日本のインフレスワップレートには、局面によっては無視しえない

¹⁵このことは、 \hat{y}^N 、 \hat{y}^R 、 \widehat{IS} を、それぞれ、名目国債利回り、物価連動国債利回り、インフレスワップレート、 y^N 、 y^R 、 IS を、それぞれ、摩擦のない市場における名目国債利回り、物価連動国債利回り、インフレスワップレート、 δ^R 、 δ^{IS} を、それぞれ、物価連動国債とインフレスワップの流動性プレミアムとすると、

$$\widehat{IS} - BEI = \widehat{IS} - (\hat{y}^N - \hat{y}^R) = (IS + \delta^{IS}) - (y^N - y^R - \delta^R) = \delta^{IS} + \delta^R$$

となることから分かる。

¹⁶金融仲介機関資産価格モデルは、同質的な市場参加者を想定する代表的個人モデルとは異なり、異質な市場参加者を想定しつつ、その中でも金融仲介機関 (ブローカー・ディーラー、マーケット・メーカー) が直面する最適化問題や、担保制約やレバレッジ制約をはじめとする市場の摩擦を重視するモデルである。詳細については、He and Krishnamurthy (2013)、Adrian et al. (2014)、He et al. (2017)、Brunnermeier and Pedersen (2009)、Gârleanu and Pedersen (2011)、Nagel (2012) などを参照。

¹⁷例えば、Gârleanu and Pedersen (2011) は、世界金融危機時に、社債利回りが CDS 対比、大幅に上昇した理由として、社債保有に対する担保負担が、CDS 保有に対する担保負担対比、相対的に大きかったことを指摘している。

流動性プレミアムが生じる可能性もある。このため、IS-BEI 較差を、物価連動国債の流動性プレミアムと完全に同一視することはできない。この点、本稿では、インフレスワップの流動性プレミアムはインフレスワップレートの観測誤差に含まれると仮定して推計を行う。これは、金融機関はデリバティブについてネットの買い手と売り手の何れにもなりうるため、インフレスワップの流動性プレミアムの符号は正にも負にもなりうるという金融仲介機関資産価格モデルの含意 (Christoffersen et al. 2018) を踏まえた対応である。

次に、銘柄別の流動性ファクター係数 $h^i(t)$ (式 (2)) の定式化について検討する。物価連動国債に関する流動性ファクターは、発行からの経過年数や個別銘柄固有の要因などにより、銘柄ごとに異なる影響を与えると考えられる。流動性ファクター係数は、こうした物価連動国債銘柄ごとの異質性を捉えるための係数である。この点、ACR は、発行からの経過年数が長い TIPS 銘柄ほど流動性プレミアムの代理変数であるビッド・アスク・スプレッドが広いという予備分析の結果から、流動性ファクター係数を、発行からの経過年数に関する増加関数とする、以下の定式化を採用している。

$$h_{ACR}^i(t) = \beta^i \left(1 - e^{-\lambda^{liq,i}(t-t_0^i)} \right)$$

ただし、 β^i と $\lambda^{liq,i}$ は、銘柄ごとに異なるパラメータである。

しかし、この定式化を、日本を対象とした分析にそのまま援用することは、日米の物価連動国債市場の環境の違いを踏まえると適当ではない可能性がある。そこで、本稿では、ACR が行った予備分析を念頭に置き、物価連動国債の流動性プレミアムの代理変数である銘柄別 IS-BEI 較差と、物価連動国債の発行からの経過年数の関係に関するパネル分析を行った。

推計結果は、表 1 のとおりである。これによれば、データ頻度や固定効果の定式化に依存せず、経過年数の係数が有意に負の値をとっていることがわかる。この結果は、発行からの経過年数が長い物価連動国債銘柄ほど IS-BEI 較差が低い値をとること、すなわち流動性プレミアムが小さい可能性を示唆する。これは、発行からの経過年数と流動性プレミアムに正の関係があることを示唆する結果を報告した ACR とは、正反対の結果であり、2.2 節で言及した日本の物価連動国債市場が供給超過傾向にある事実を反映しているとみられる。すなわち、日本においては、発行から時間が経過するにつれて、最終投資家保有分の増加や財務省による買入消却等により、金融仲介機関における物価連動国債の在庫負担が軽減していく効果が背景にある可能性がある。

こうした予備分析の結果を踏まえ、本稿では流動性ファクター係数を以下のように定める。

$$h^i(t) = \left(1 - e^{-\lambda^{liq,i}(T^i-t)}\right) \quad (18)$$

ただし、 T^i は第 i 銘柄の満期、 $\lambda^{liq,i}$ は銘柄ごとに異なるパラメータである。この定式化では、流動性ファクター係数は発行からの経過年数の減少関数となっている。

4 データと推計アプローチ

4.1 データ

本稿の分析対象期間は、インフレスワップレートのデータが利用可能となる 2007 年 3 月から、2020 年 5 月までである。名目金利は、Bloomberg より入手したゼロクーポンレートのうち、6 か月・1 年・2 年・3 年・5 年・7 年・10 年の 7 系列を使用する。物価連動国債については、第 1 回債から第 24 回債までの 24 銘柄の債券価格と利回りデータを、Bloomberg より入手した¹⁸。また、インフレスワップレートは、1 年から 10 年の間の 10 年限に関するデータを、Bloomberg より入手した。物価連動国債の連動係数は、財務省が公表している参考値を使用する¹⁹。

推計に際しては、ACR と同様、金曜日のデータを用いた週次推計を行っている²⁰。また、2.3 節で述べたとおり、2013 年 10 月 10 日以降の旧物価連動国債のデータは使用しない。以下の推計で使用するデータ系列の推移は、図 4 のとおりである。

4.2 推計アプローチ

本稿では、名目ゼロクーポンレート、物価連動国債価格、インフレスワップレートを観測変数、3.2 節で定義した 5 つのファクターを状態変数とする状態空間モデルを、カルマン・フィルターにより推計する。具体的には、状態変数の遷移方程式として、式 (17) を離散化した次

¹⁸2020 年 5 月 11 日に発行された第 25 回債については、分析対象期間におけるサンプル数の少なさを考慮して、推計には使用していない。

¹⁹https://www.mof.go.jp/jgbs/topics/bond/10year_inflation-indexed/keisuu/index.htm より入手可能。

²⁰金曜日が休場の場合は、前営業日のデータを用いている。ただし、週を通じて休場であった 2019 年 4 月 29 日～5 月 3 日週は欠損値とした。

の式を用いる。

$$X_{t+\Delta t} = \left(I - e^{-\mathcal{K}^{\mathbb{P}} \Delta t} \right) \theta^{\mathbb{P}} + e^{-\mathcal{K}^{\mathbb{P}} \Delta t} X_t + \xi_t \quad (19)$$

ここで、 I は 5 次元の単位行列であり、状態変数のイノベーション項 ξ_t は正規分布に従う ($\xi_t \sim N(0, Q(t, t + \Delta t))$)。ただし、状態変数の (条件付) 共分散行列 $Q(t, s)$ は

$$Q(t, s) = \text{Var}^{\mathbb{P}}(X_s | X_t) = \int_t^s e^{-\mathcal{K}^{\mathbb{P}}(s-u)} \Sigma \Sigma^{\top} e^{-(\mathcal{K}^{\mathbb{P}})^{\top}(s-u)} du$$

で与えられる。また、本稿では週次データを用いた推計を行なうため、 $\Delta t = 7/365$ としている。また、先行研究に倣い、ファクターが実確率測度下で定常となるよう、 $\mathcal{K}^{\mathbb{P}}$ の固有値の最小値が正となるようパラメータ制約を課している。カルマン・フィルタにおけるファクターおよびその誤差共分散行列の初期値は、それぞれ、ファクターの無条件平均 ($\theta^{\mathbb{P}}$)・無条件共分散行列 ($Q(t, \infty)$) としている。共分散行列 $Q(t, s)$ は、[Fisher and Gilles \(1996\)](#) による理論的結果に基づいて解析的に算出している。

観測方程式については、次のとおりである。まず、名目ゼロクーポンレートについては式 (13)、インフレスワップレートについては式 (15) で与えられる理論値に観測誤差を加えたものが実際の観測値であるとする。ここで、[ACR](#) に倣って、観測誤差は独立同分布の正規分布に従うとする。また、標準偏差は年限にかかわらず一定であり、名目ゼロクーポンレートについては σ^N 、インフレスワップレートについては σ^{IS} で与えられると仮定する。物価連動国債については、式 (16) の右辺で与えられる理論値に観測誤差が加わった次の式を仮定する。

$$P_t^{R,i} \left(T^i, \frac{\Pi_t}{\Pi_{t_0^i}} \right) = \widehat{P}_t^{R,i} \left(T^i, \frac{\Pi_t}{\Pi_{t_0^i}} \right) + \varepsilon_t^{R,i} \quad (20)$$

ここで、観測誤差の標準偏差は、[ACR](#) に倣って各銘柄のデュレーションに比例すると仮定する。すなわち、 dur_t^i を時点 t における第 i 銘柄のデュレーション、 σ^R を銘柄によらない定数とすると、 $\varepsilon_t^{R,i} \sim N(0, dur_t^i \cdot \sigma^R)$ である²¹。式 (20) はファクターに関する非線形関数であるため、推計においては拡張カルマン・フィルタを用いる (詳細は[補論 C](#)を参照)。

以上の状態方程式・観測方程式から成り立つ状態空間モデルについて、観測誤差に関する対数尤度を最大化することでパラメータを推計する。ただし、本稿のモデルは、24 個の物価連動国債銘柄固有のパラメータと 19 個の共通パラメータの、計 43 個のパラメータから構成

²¹物価連動国債のデュレーションは、Bloomberg より入手した物価連動国債価格と利回りを基に算出している。

されるほか、物価連動国債の元本保証プレミアムがこれらパラメータ及び状態変数の複雑な非線形関数となっているため、最尤推計を行う際の計算負荷が非常に大きい。このため、本稿では ACR と同様、EM アルゴリズムと呼ばれる手法を利用することで計算負荷の軽減を図っている。EM アルゴリズムの詳細については、補論 D を参照されたい。

上記の手法によって得られたモデル・パラメータや状態変数（ファクター）の推計値から、本稿の主要な分析対象である市場参加者のインフレ予想と、BEI に影響を与えうる 3 つの要因を、以下のとおり推計する。

時点 t から T までの市場参加者のインフレ予想（年率平均値） $\pi_t^*(T)$ は、次の式に基づいて算出する。

$$\pi_t^*(T) = \frac{1}{T-t} \log \mathbb{E}_t^{\mathbb{P}} \left[\frac{\Pi_T}{\Pi_t} \right] = \frac{1}{T-t} \log \mathbb{E}_t^{\mathbb{P}} \left[e^{\int_t^T (r_s^N - r_s^{R,f}) ds} \right] \quad (21)$$

ただし、式 (21) の最右辺の期待値は、Christensen et al. (2012) による結果に基づいて算出している（詳細は補論 E を参照）。なお、インフレ予想は、式 (21) に基づいて、任意の満期について算出可能である。本稿の実証分析では、固定満期（例えば 10 年インフレ予想、 $T = t + 10$ ）に対応する長期インフレ予想を算出するほか、BEI の要因分解を行う際には、各物価連動国債の満期 T^i に対応するインフレ予想を算出している。

次に、BEI に影響を与えうる 3 つの要因の推計方法を述べる。この説明にあたり、物価連動国債価格 P_t^i に対応する最終利回り（yield to maturity）を、次の式を満たす y_t^i として定義する。

$$P_t^i = \frac{c}{2} \frac{\tau_1}{1/2} e^{-\tau_1 y_t^i} + \sum_{k=2}^{N_t^i-1} \frac{c}{2} e^{-\tau_k y_t^i} + \left(1 + \frac{c}{2}\right) e^{-\tau_{N_t^i} y_t^i}$$

元本保証プレミアムの BEI への寄与 $POP_t^{i,y}$ は、補論 D で詳述している EM アルゴリズムを用いたパラメータ推計の過程で得られる元本保証プレミアムの実額 POP_t^i を基に、元本保証プレミアムの有無による最終利回りの較差として算出する。すなわち、 $y_t^{i,obs}$ を物価連動国債価格の観測値 $P_t^{i,obs}$ に対応する最終利回り、 $y_t^{i,exPOP}$ を $P_t^{i,obs} - POP_t^i$ に対応する最終利回りとして、 $POP_t^{i,y} = y_t^{i,exPOP} - y_t^{i,obs}$ を算出する。なお、元本保証プレミアムに密接に関連する指標として、デフレ発生確率 $\mathbb{P}_t(\Pi_T/\Pi_t < 1)$ も、Christensen et al. (2012) による結果に基づき算出している（詳細は補論 E を参照）。

流動性プレミアムについては、ACR に倣い、以下のとおり算出する。まず、流動性プレミ

アムの影響を含む物価連動国債価格の理論値 \hat{P}_t^i を、推計されたモデル・パラメータ、カルマン・フィルターによるファクターの推計値 $X_{t|t}$ 、および元本保証プレミアム実額の推計値 POP_t^i に基づき、式 (16) から算出する。そのうえで、 $\hat{P}_t^i - POP_t^i$ を最終利回り \hat{y}_t^i に変換する。次に、流動性プレミアムの影響を含まない物価連動国債価格の理論値 $\hat{P}_t^{i,exLP}$ を、流動性ファクターに関連するパラメータ κ^{liq} 、 θ^{liq} が現れる項と流動性ファクターの推計値 $X_{t|t}^{liq}$ をすべてゼロに置き換えて、式 (16) から算出する。そのうえで、 $\hat{P}_t^{i,exLP} - POP_t^i$ を最終利回り $\hat{y}_t^{i,exLP}$ に変換する。流動性プレミアムの推計値 LP_t^i は、これら 2 つの最終利回りの較差 $LP_t^i = \hat{y}_t^i - \hat{y}_t^{i,exLP}$ として算出する。

TP 較差の推計値 TPD_t^i は、上記の各種推計値が得られたうえで、BEI の要因分解式に基づき、次式で算出する。

$$TPD_t^i = BEI_t^i - POP_t^{i,y} + LP_t^i - \pi_t^*(T^i)$$

5 推計結果

本節では、本稿のアフィン期間構造モデルの推計結果を示したうえで、BEI に影響を与える 3 つの要因と市場参加者の長期インフレ予想の推計値それぞれについて報告するとともに、最長残存年限 BEI の変動をこれらの要因に分解する。

5.1 アフィン期間構造モデルの推計結果

表 2 は、名目ゼロクーポンレートとインフレスワップレートに関するモデルのフィット、具体的には、モデルにより推計された理論値の観測データに対する誤差を報告している。各表の 2 列目は平均誤差、3 列目は平均二乗偏差 (RMSE) を示している。名目ゼロクーポンレート 7 系列の RMSE は平均で約 7bps であり、名目金利の期間構造を 2 つのファクターのみで説明しているにもかかわらず、フィットは良好である。一方、インフレスワップレートの RMSE は、平均で 18bps と、名目ゼロクーポンレートと比べて大きい。このことは、日本のインフレスワップは取引量が少ないため、インフレ予想に関する新たな情報がインフレスワップレートに織り込まれるまで長い時間がかかり、観測誤差が大きくなっている可能性を

示唆する²²。

表3は、銘柄ごとの物価連動国債に関する推計値のフィットを示している。本稿の推計では、観測変数として物価連動国債価格を利用しているが、名目ゼロクーポンレート等との比較を容易にするため、ここでは、最終利回りベースのフィットに変換して報告している。これによれば、物価連動国債利回りのRMSEは全銘柄平均で5bps強と、CSによる報告（10bps弱）と比べて改善している。こうした結果は、CSが勘案していない流動性ファクターを導入したことにより、物価連動国債利回りに対するモデルのフィットが向上したと解釈できる。なお、銘柄固有パラメータ $\lambda^{liq,i}$ については、旧物価連動国債銘柄の値が新物価連動国債よりも大きい傾向がみられる。これには、旧物価連動国債に対応する推計期間において、世界金融危機や物価連動国債発行再開に合わせた追加買入消却など、流動性ファクターから大きく影響を受けるイベントが多数あったことが、影響している可能性がある。

表4は、物価連動国債の銘柄固有パラメータ $\lambda^{liq,i}$ 以外のパラメータの推計結果と、最大化された対数尤度の値を示している²³。ここで、名目ゼロクーポンレート、インフレスワップレート、物価連動国債利回りの観測誤差の標準偏差はそれぞれ、 $\sigma^N = 0.08\%$ 、 $\sigma^{IS} = 0.19\%$ 、 $\sigma^R = 0.06\%$ であり、表2や表3と整合的に、インフレスワップレートの観測誤差が相対的に大きい。

5.2 BEIに影響を与えうる3つの要因に関する推計値

次にBEIに影響を与えうる3つの要因の推計値を報告するとともに、先行研究の推計結果との違いについて議論する。

5.2.1 元本保証プレミアム

図5（1）は、元本保証プレミアムの推計値と密接に関連する、1年先デフレ発生確率の推計値を示している。1年先デフレ発生確率は、世界金融危機の発生に伴って2008年9月以降、急速に上昇し、2010年にかけて80%以上の非常に高い水準で推移した。2012年末以降、

²²なお、年限別にみると1年物のインフレスワップレートの観測誤差が、他の年限対比大きい。これは、年限が短いインフレスワップレートほど、消費税率引き上げをはじめとするCPIに影響を与える短期的な要因の影響を受けやすいためと考えられる。

²³なお、実確率測度に関連するパラメータの標準誤差は、リスク中立確率測度に関連するパラメータよりも大きくなる傾向がある。この傾向は、ACRでも報告されており、本稿の実確率測度に関連するパラメータの標準誤差は、ACR対比で大きくない点を確認している。

1年先デフレ発生確率は急速に低下し、その後も総じて低水準で推移してきた。これには、日本銀行による2%の物価安定目標の導入や、その後のQQEの導入と強化が影響している可能性がある。直近の新型コロナウイルス感染症の世界的大流行時には、幾分上昇した。

こうしたもとの、最長残存年限銘柄（概ね9～10年）でみた新物価連動国債の元本保証プレミアムの推計値は、2020年初までは、0.2～0.4%程度で変動してきたが（図5（2））、直近の局面では、0.6%程度まで上昇しており、BEIへの押し上げ寄与が拡大している。

本稿による元本保証プレミアムの推計値を既存研究と比較すると、CSによる推計値（平均で0.5～1.0%程度）と、湯山（2016）によるシミュレーション・ベースの推計値（0.1%以下）の中間に位置している。これら先行研究との違いは、流動性プレミアムやTP較差の取り扱いの違いに起因している可能性がある。まず、CSについては、モデルに流動性プレミアムを考慮していない点が推計結果に影響を与えている可能性がある。すなわち、ACRが指摘するように、流動性プレミアムを捨象したモデルを推計した場合、インフレ予想の推計値に下方バイアスが発生する可能性があるため、元本保証プレミアムにも上方バイアスが発生する可能性がある。次に、湯山（2016）については、シミュレーション分析におけるインフレ予想のパラメータの設定値が、元本保証プレミアムの推計結果に影響している可能性がある。湯山（2016）は、QQE導入前後の状況をもとに、インフレ予想パラメータを1%程度に設定しているが、これは、実確率測度下での情報に基づいてパラメータを設定していると解釈できる。もっとも、元本保証プレミアムの推計する場合、オプション価格評価理論に基づき、リスク中立確率測度下でのインフレ予想を用いる必要がある。理論的には、リスク中立確率測度下のインフレ予想は、実確率測度下のインフレ予想とTP較差の和に等しい。このため、後節で示すようにTP較差の推計値が負の値であることを踏まえると、実確率測度下のインフレ予想は、リスク中立確率測度下のインフレ予想よりも高い可能性が高い。このことが、湯山（2016）による小さめの元本保証プレミアムの推計値につながっている可能性がある。一方、本稿では、BEIに影響を与えうる3つの要因すべてを同時に推計していることから、元本保証プレミアムの推計値が、先行研究とは異なる水準となっていると考えられる。

5.2.2 流動性プレミアム

流動性プレミアムの推計値は、図6のとおりである。まず、図6（1）では、2007年3月から2013年10月初までの、旧物価連動国債に関する流動性プレミアムの推計値を示している。この期間中、流動性プレミアムの推計値は、世界金融危機の最中である2008年10月頃

に、1.5%弱まで急上昇しており、BEI への下押し寄与を拡大させた。その後は緩やかな低下傾向をたどり、2012 年以降はマイナス圏で推移した。このように流動性プレミアムの推計値がマイナス圏で推移したことは、新物価連動国債の発行開始時における、追加買入消却の実施予告が影響している可能性がある。すなわち、新物価連動国債の発行開始時に、旧物価連動国債の売却機会が発生するという予想のもと、旧物価連動国債がインフレスワップ対比でみて割高に取引されていた可能性が窺われる。

図6（2）では、2013 年 10 月以降の期間について、新物価連動国債に関する流動性プレミアムの推計値を示している。この期間の推計値は、新旧物価連動国債の移行期の振れを除いてみると、緩やかな上昇傾向を示しており、直近の局面では 0.5%弱となっている²⁴。このように、流動性プレミアムの推計値は、新旧物価連動国債の移行期を除いて正の値となっており、日本の BEI の下押しに寄与している。

本稿における流動性プレミアムの推計値は、湯山・森平（2017）による推計値（平均で 0.3～0.4%程度、世界金融危機時で 1.0%超）と概ね整合的である。また、米国を対象とした流動性プレミアムの平均的な推計値（平常時においては 0.1～0.3%程度、世界金融危機時において 1.0～1.5%程度）と比べると、やや大きめになっている。これは、日本の物価連動国債市場が、米国対比でみて、流動性が低いことや需給状況に関する懸念が強いことと整合的である。

なお、流動性プレミアムの推計値（全銘柄平均値）と、先行研究で市場流動性の代理変数として頻繁に利用されている株価指数のボラティリティ指標（日経平均ボラティリティ・インデックス）の間の相関係数は 0.40 であり、相応に大きな正の相関が観察される。この結果は、市場の不確実性が上昇し流動性が低下する局面で、推計された流動性プレミアムが上昇する傾向にあることを示している。

最後に、流動性プレミアムとマイナスの BEI の関係について付言する。日本では、新型コロナウイルス感染症の世界的大流行時において、BEI がマイナス値となる事象が観察された。仮に、流動性プレミアムが存在しない市場であれば、理論的には、元本保証が付された物価連動国債を用いて算出した BEI がマイナスの値となることはない²⁵。他方、流動性プレミア

²⁴この間、2016 年 4 月以降の物価連動国債の発行額減少や買入消却の再開、新型コロナウイルス感染症の世界的大流行により金融市場が動揺する局面で実施された追加買入消却（2020 年 3 月）などは、物価連動国債市場の需給改善を通じて、各時点で流動性プレミアムの低下に寄与した可能性が考えられる。こうした市場の需給状況と流動性プレミアムの関係に関するより詳細な分析は、今後の研究課題である。

²⁵このことは、名目割引債と元本保証のある実質割引債を比べることで、以下のように示すことができる。元本

ムにより物価連動国債利回りが押し上げられている場合には、理論的にみて BEI は、流動性プレミアムと絶対値でみて同じ範囲内でマイナスの値をとりうる。新型コロナウイルス感染症の世界的大流行時において観察された BEI の水準（約▲ 0.3%）は、同時期の流動性プレミアムの推計値（0.5% 弱）を踏まえると、理論的に許容される範囲に収まっている。

5.2.3 TP 較差

図 7 は TP 較差の推計値を示している。推計値は、推計期間の大部分においてマイナスで推移しており、日本の BEI の下押しに寄与している。また、TP 較差のマイナス幅は、近年拡大傾向にあり、直近の局面における水準は、▲ 0.9%Pt 程度である。

TP 較差がマイナスの値をとっているとの結果は、湯山・森平 (2017) や CS と整合的である²⁶。また、TP 較差のマイナス幅が近年拡大傾向にあるとの結果は、名目タームプレミアムの推計値が低下傾向にあることを反映している。これは、Ueno (2017) や須藤・田中 (2018) が、日本銀行による名目国債の大規模買入れが名目タームプレミアムの低下につながった可能性を指摘していることや、趨勢的な安全資産需要の高まりを背景とした名目国債利回りの低下圧力に注目した研究（一上ほか 2012）とも整合的である²⁷。本稿の推計結果は、名目タームプレミアム低下の原因を特定するものではないが、BEI を評価するうえで、近年では、名目タームプレミアムに影響を与える要因を考慮することが重要であることを示唆している²⁸。

保証のある実質割引債は、デフレ局面では額面金額（発行時点の元本額）が償還されることから、名目割引債と同等の経済的価値を有する。一方、インフレ局面では、実質割引債の償還額は名目債を上回る。このため、流動性プレミアムが存在しない市場では、実質割引債価格は名目割引債価格を下回ることなく、BEI は非負の値となる。利付債に関しては、クーポン利率の違いなどにより誤差が生じる可能性があるが、この影響は現在の低金利環境下においては、非常に小さいとみられる。

²⁶なお、消費 CAPM 理論などによれば、インフレリスクプレミアムと解釈される TP 較差は、実質確率的割引ファクターとインフレ予想の逆数との間の共分散についてマイナス符号をとったものと等しくなるため、正負両方の値をとることが知られている（CS、Imakubo and Nakajima 2015 など）。

²⁷本稿の結果からは、推計期間中の名目タームプレミアムの低下幅が相対的に大きいこと、それにより名目国債のイールドカーブのフラット化が、物価連動国債対比でみて大きいことが示唆されるが、大規模な国債買入れや安全資産需要といった要因が、実質タームプレミアムに与えた影響の検証は、様々な要因を考慮したうえで慎重に判断すべきであり、将来の研究課題としたい。

²⁸本稿では、名目国債利回りは、ファンダメンタル・ファクターのみにより記述できると仮定しているため、同利回りのうち、名目長期金利の予想成分では説明できない部分は、全てタームプレミアムの変動として説明される。この点、例えば Fleckenstein et al. (2014) が指摘するように、安全資産需要等を背景とした名目国債利回りの低下が、名目国債のいわば「負の流動性プレミアム」として解釈すべきである場合、本稿の推計結果は、物価連動国債の流動性プレミアムを過大評価する一方、TP 較差を過小評価している可能性がある。もっとも、両方の影響を総合すると、市場参加者のインフレ予想の推計値への影響は限定的であるとみられる。名目国債に対する流動性プレミアムや安全資産需要を考慮した期間構造モデルの推計を行うことは、今後の重要な研究課題の一つである。

5.3 市場参加者のインフレ予想の推計値

以上でみてきたように、BEIに影響を与えうる3つの要因は、いずれも日本のBEIの変動に無視しえない影響を及ぼしていることが分かった。そのうえで、図8(1)では、日本のBEIからこれら3つの要因を取り除いた市場参加者の長期インフレ予想(10年)の推計値を示している。また、図8(2)では、この市場参加者の長期インフレ予想を、Consensus Economicsの「コンセンサス・フォーキャスト」や、日本銀行の短観における「企業の物価見通し」、日本経済研究センターの「ESPフォーキャスト」といったサーベイ調査のインフレ予想指標と比較している。

市場参加者の長期インフレ予想の推計値は、ほぼ一貫してBEIよりも高い水準で推移している。市場参加者の長期インフレ予想は、世界金融危機時に大きくマイナスになったが、その後は上昇を続け、QQE導入後の2014年前半には2%程度に達した²⁹。その後、サーベイ調査の長期インフレ予想指標と同様に、2016年前半にかけて1%程度まで低下し、2016年後半から2020年初にかけて、概ね1%前後で推移した。直近の新型コロナウイルス感染症の世界的大流行時には、世界経済が急速に落ち込むなか、弱含んだ。

なお、海外の研究では、市場参加者のインフレ予想は、原油価格動向の影響を受けやすいとの結果が報告されている(Owyang and Shell 2019など)。本稿で推計した日本の市場参加者の長期インフレ予想についても、そのような特徴を有していることが窺われる。例えば、世界金融危機時や2014年後半から2016年にかけて、さらに新型コロナウイルス感染症の世界的大流行時など、原油価格が大幅に下落した局面で、そうした傾向が顕著に観察される(前掲図8(1)、図9(1))。この点を定量的に確認するため、原油価格、長期インフレ予想の推計値、CPI(除く生鮮食品)の前年比、の3変数によるベクトル自己回帰モデル(VAR)を推計した。原油価格に対するショックの識別には、上記の変数の並びに従ったコレスキー分解を用いている³⁰。原油価格水準が10%上昇するショックに対する長期インフレ予想のインパ

²⁹市場参加者の長期インフレ予想の推計値は、物価連動国債が参照している物価指数の特性上、消費税率引き上げの影響を受けうる。例えば、2012年前半から2014年央にかけての上昇には、2012年3月にいわゆる社会保障と税の一体改革法案が閣議決定されて以降の諸々のイベントを反映した、CPIインフレ率に対する消費税率引き上げの影響の折込みも反映されている可能性がある。ただし、消費税率引き上げの影響の理論値(5%から10%への累積的な税率変更を10年平均で均すと、最大0.5%Ptの押し上げ寄与)を考慮すると、同時期の市場参加者の長期インフレ予想の上昇には、消費税率引き上げ以外の要因も相応に寄与していると解釈される。

³⁰本稿のVARは、シンプルな識別方法にもかかわらず、原油価格ショックの消費者物価への波及の大きさを良く捉えている。すなわち、原油価格水準が10%上昇するショックに対するCPI前年比のインパルス応答をみると、

ルス応答をみると（図9（2））、ショック発生から1年程度にわたって有意に市場参加者の長期インフレ予想を押し上げている。また、反応のピーク時の定量的インパクトも、ショック発生の約半年後に0.2%Pt弱と、相応に大きい結果が得られた。このように市場参加者の長期インフレ予想と原油価格動向との間の連動性が、ガソリン等のエネルギー品目や生産コストへの波及による直接的効果では説明しきれないほど大きいことは、他の先進国を対象とした分析でも指摘されてきた（Lumsdaine 2009、Cette and de Jong 2013、Owyang and Shell 2019）。本稿の結果は、日本の市場参加者の長期インフレ予想についても、他の先進国同様、原油価格との連動性が高いことを示唆するものである。この理由に関する分析は、本稿の分析範囲を超えるものであるが、例えば、物価連動国債に投資するグローバルな投資家の短期的な投資行動を反映している可能性や、原油価格変動がグローバルな需要ショックとして捉えられている可能性などが、市場参加者や研究者から指摘されている。

5.4 最長残存年限 BEI の要因分解

本節では、以上でみてきた推計結果を踏まえて、最長残存年限 BEI を市場参加者のインフレ予想と 5.2.1～5.2.3 節で示した3つの要因に分解する（図10）。この要因分解から、まず、日本の市場参加者の長期インフレ予想の寄与は、前述のとおりほぼ一貫して日本の BEI を上回って推移しているほか、新物価連動国債が発行された2013年10月以降は、元本保証プレミアムも BEI の押し上げに寄与していることがわかる。こうしたもとでも、近年 BEI が低位で推移しているのは、流動性プレミアム（5.2.2 節の推計値にマイナスの符号を付けたもの）と TP 較差の下押し寄与が相対的に大きいためである。とくに、TP 較差の下押し寄与が緩やかに拡大しているため、市場参加者の長期インフレ予想と BEI の乖離は、近年拡大傾向にある。

最後に、新型コロナウイルス感染症の世界的大流行を背景とした2020年3月以降の BEI の低下について、欧米の金融市場における動向とも比較しつつ整理する。まず、日本の BEI について、2020年1月初時点と3月末時点と比較すると、最長残存年限 BEI は約0.2%Pt 低下した。この動きを要因分解すると、元本保証プレミアムは約0.2%Pt 上昇する一方、インフレ予想が約0.4%Pt 低下したことが主因となっている。この間、流動性プレミアムや TP

10～12 か月後にピークを迎え、ピーク時の上昇幅が0.2%Pt 程度となっており、これは Hirakata et al. (2019) のマクロ計量モデルのシミュレーション結果と整合的である。

較差には、大きな変動はみられなかった。

同時期の米国や欧州についても、BEI やインフレスワップレートの低下が観察されている(図 11)。米国の 10 年物 BEI は、2020 年 1 月初の約 1.8% から、3 月半ばには 0.6% まで下落したのち、3 月末時点でも 0.9% 程度と年初から 1%Pt 近く大幅に下落した。米国における BEI の下落に関しては、流動性プレミアムの急激な上昇はみられておらず、大部分はインフレ予想の下落を反映した動きである、とする予備的結果が一部の研究者から報告されている³¹。同様に、ユーロ圏における 5 年先 5 年物のインフレスワップレートは、2020 年 1 月初の約 1.3% から、3 月末の 0.9% まで約 0.4%Pt 程度下落した。この下落幅に対するインフレ予想下落の寄与は、少なくとも 0.3%Pt、推計手法によっては 1%Pt を超えるとの試算をオランダ中銀のエコノミストらは示している (Broeders et al. 2020)。欧米市場に関する分析は、予備的な分析であるため、推計結果は幅を持つてみる必要はあるものの、新型コロナウイルス感染症の世界的大流行は、原油価格の急落などのグローバルな要因を通じて、先進国共通に市場参加者のインフレ予想を押し下げていた可能性が示唆される。

6 まとめ

本稿では、名目金利と実質金利の期間構造を推計することで、日本の BEI を要因分解し、日本の市場参加者の長期インフレ予想と、他の 3 つの BEI 変動要因である①物価連動国債の元本保証プレミアム、②同国債の流動性プレミアム、③名目タームプレミアムと実質タームプレミアムの較差 (TP 較差) を推計した。推計にあたっては、日本の物価連動国債のデータ制約や日米間における物価連動国債市場の環境の違いを踏まえ、観測変数として、名目金利と物価連動国債価格のほか、インフレスワップレートも含むアフィン期間構造モデルを構築した。

本稿における推計結果からは、物価連動国債の元本保証プレミアムは日本の BEI の押し上げに、同国債の流動性プレミアムと TP 較差は BEI の下押しに、それぞれ無視しえない寄与をしていることが分かった。このことは、日本の BEI の動きが日本の市場参加者の長期イン

³¹2020 年 3 月 19 日に、シカゴ大学の Nagel 教授が Twitter で「TIPS 利回りの急上昇は、世界金融危機時と同様、流動性プレミアムの上昇によるものか？」と問いかけたところ、複数の研究者から、Fleckenstein et al. (2014) の手法の延長推計結果などに基づき「流動性プレミアムの大幅な上昇はみられていない」との返答があった。詳細については、当該 Twitter スレッド (<https://twitter.com/ProfStefanNagel/status/1240637482355621888>) および、リプライを参照。

フレ予想以外の要因によっても変動してきたことを示唆している。その結果、抽出された市場参加者の長期インフレ予想は、ほぼ一貫して日本の BEI よりも高い水準で推移しており、少なくとも過去 5 年間については、サーベイ調査の長期インフレ予想指標と概ね同様な動きを示している。また、市場参加者の長期インフレ予想は、原油価格動向の影響を受けやすい特徴を有しており、世界金融危機時や 2014 年後半から 2016 年にかけて、さらに新型コロナウイルス感染症の世界的大流行時などで、その傾向が顕著に観察されることも明らかとなった。

本稿における分析は、ファイナンスの基本的な分析枠組みの一つであるアフィン期間構造モデルを適切に用いることにより、BEI から市場参加者の長期インフレ予想を相応の精度をもって抽出できる可能性を示すものであるが、なお課題も残されている。第一に、推計されたインフレ予想や BEI に影響を与えうる他の 3 つの要因が変動するメカニズムについての分析である。例えば、市場参加者の長期インフレ予想が、なぜ原油価格と高い連動性を示すのか、本稿では必ずしも十分に踏み込んだ考察ができていない。第二に、名目金利の下限制約の定式化である。本稿では、元本保証プレミアムの推計に関連した制約を踏まえて名目金利の下限制約を明示的に定式化していない。これらの点については、今後の一段の分析が俟たれるところである。

参考文献

- Abrahams, M., Adrian, T., Crump, R. K., Moench, E., and Yu, R. (2016) “Decomposing Real and Nominal Yield Curves,” *Journal of Monetary Economics*, 84, 182–200.
- Adrian, T., Etula, E., and Muir, T. (2014) “Financial Intermediaries and the Cross-Section of Asset Returns,” *Journal of Finance*, 69, 2557–2596.
- Andreasen, M. M., Christensen, J. H. E., and Riddell, S. (2018) “The TIPS Liquidity Premium,” Federal Reserve Bank of San Francisco Working Paper Series 2017-11, Federal Reserve Bank of San Francisco.
- Bernanke, B. S. (2004) “What Policymakers Can Learn from Asset Prices,” Speech before The Investment Analysts Society of Chicago, Federal Reserve Board.
- Broeders, D., Goy, G., Petersen, A., and de Vette, N. (2020) “Gauging the Impact of COVID-19 on Market-Based Inflation Expectations,” VoxEU column, Centre for Economic Policy Research.
- Brunnermeier, M. K. and Pedersen, L. H. (2009) “Market Liquidity and Funding Liquidity,” *Review of Financial Studies*, 22, 2201–2238.
- Campbell, J. Y. and Shiller, R. J. (1996) “A Scorecard for Indexed Government Debt,” in *NBER Macroeconomics Annual*, edited by Bernanke, B. S. and Rotemberg, J. J., National Bureau of Economic Research, 155–208.
- Campbell, J. Y., Shiller, R. J., and Viceira, L. M. (2009) “Understanding Inflation-Indexed Bond Markets,” *Brookings Papers on Economic Activity*, Spring 2009, 79–120.
- Cette, G. and de Jong, M. (2013) “Market-Implied Inflation and Growth Rates Adversely Affected by the Brent,” *Journal of Asset Management*, 14, 133–139.
- Christensen, J. H. E., Diebold, F. X., and Rudebusch, G. D. (2011) “The Affine Arbitrage-Free Class of Nelson–Siegel Term Structure Models,” *Journal of Econometrics*, 164, 4–20.

- Christensen, J. H. E., Gamble IV, J. M., and Zhu, S. (2020) “Coronavirus and the Risk of Deflation,” FRBSF Economic Letter 2020-11, Federal Reserve Bank of San Francisco.
- Christensen, J. H. E. and Gillan, J. M. (2012) “Could the U.S. Treasury Benefit from Issuing More TIPS?” Federal Reserve Bank of San Francisco Working Paper Series 2011-16, Federal Reserve Bank of San Francisco.
- Christensen, J. H. E., Lopez, J. A., and Rudebusch, G. D. (2012) “Extracting Deflation Probability Forecasts from Treasury Yields,” *International Journal of Central Banking*, 8, 21–60.
- Christensen, J. H. E. and Spiegel, M. M. (2019) “Assessing Abenomics: Evidence from Inflation-Indexed Japanese Government Bonds,” Federal Reserve Bank of San Francisco Working Paper Series 2019-15, Federal Reserve Bank of San Francisco.
- Christoffersen, P., Goyenko, R., Jacobs, K., and Karoui, M. (2018) “Illiquidity Premia in the Equity Options Market,” *Review of Financial Studies*, 31, 811–851.
- D’Amico, S., Kim, D. H., and Wei, M. (2018) “Tips from TIPS: The Informational Content of Treasury Inflation-Protected Security Prices,” *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 53, 395–436.
- DeJong, D. N. and Dave, C. (2007) *Structural Macroeconometrics*, Princeton University Press.
- Duffie, D., Pan, J., and Singleton, K. J. (2000) “Transform Analysis and Asset Pricing for Affine Jump-Diffusions,” *Econometrica*, 68, 1343–1376.
- Fisher, M. and Gilles, C. (1996) “Estimating Exponential-Affine Models of the Term Structure,” Working paper.
- Fleckenstein, M., Longstaff, F. A., and Lustig, H. (2014) “The TIPS-Treasury Bond Puzzle,” *Journal of Finance*, 69, 2151–2197.
- Gârleanu, N. and Pedersen, L. H. (2011) “Margin-Based Asset Pricing and Deviations from the Law of One Price,” *Review of Financial Studies*, 24, 1980–2022.

- Grishchenko, O. V., Vanden, J. M., and Zhang, J. (2016) “The Informational Content of the Embedded Deflation Option in TIPS,” *Journal of Banking & Finance*, 65, 1–26.
- Haubrich, J., Pennacchi, G., and Ritchken, P. (2012) “Inflation Expectations, Real Rates, and Risk Premia: Evidence from Inflation Swaps,” *Review of Financial Studies*, 25, 1588–1629.
- He, Z., Kelly, B., and Manela, A. (2017) “Intermediary Asset Pricing: New Evidence from Many Asset Classes,” *Journal of Financial Economics*, 126, 1–35.
- He, Z. and Krishnamurthy, A. (2013) “Intermediary Asset Pricing,” *American Economic Review*, 103, 732–770.
- Hirakata, N., Kan, K., Kanafuji, A., Kido, Y., Kishaba, Y., Murakoshi, T., and Shinohara, T. (2019) “The Quarterly Japanese Economic Model (Q-JEM): 2019 Version,” Bank of Japan Working Paper Series 19-E-7, Bank of Japan.
- Imakubo, K. and Nakajima, J. (2015) “Estimating Inflation Risk Premia from Nominal and Real Yield Curves Using a Shadow-Rate Model,” Bank of Japan Working Paper Series 15-E-1, Bank of Japan.
- Kajuth, F. and Watzka, S. (2011) “Inflation Expectations from Index-Linked Bonds: Correcting for Liquidity and Inflation Risk Premia,” *Quarterly Review of Economics and Finance*, 51, 225–235.
- Kim, D. H. and Singleton, K. J. (2012) “Term Structure Models and the Zero Bound: An Empirical Investigation of Japanese Yields,” *Journal of Econometrics*, 170, 32–49.
- Krishnamurthy, A. and Vissing-Jorgensen, A. (2012) “The Aggregate Demand for Treasury Debt,” *Journal of Political Economy*, 120, 233–267.
- Kupfer, A. (2018) “Estimating Inflation Risk Premia Using Inflation-Linked Bonds: A Review,” *Journal of Economic Surveys*, 32, 1326–1354.
- Lumsdaine, R. L. (2009) “The Relationship between Oil Prices and Breakeven Inflation Rates,” Working paper.

- Nagel, S. (2012) “Evaporating Liquidity,” *Review of Financial Studies*, 25, 2005–2039.
- Owyang, M. and Shell, H. (2019) “The Oil Prices and Breakeven Inflation Rates Revisited,” The FRED blog, Federal Reserve Bank of St. Louis.
- Pflueger, C. E. and Viceira, L. M. (2016) “Return Predictability in the Treasury Market: Real Rates, Inflation, and Liquidity,” in *Handbook of Fixed-Income Securities*, edited by Veronesi, P., Wiley, 191–209.
- Ueno, Y. (2017) “Term Structure Models with Negative Interest Rates,” IMES Discussion Paper Series 2017-E-1, Institute for Monetary and Economic Studies, Bank of Japan.
- Yellen, J. (2015) “Transcript of Chair Yellen’s Press Conference: March 15, 2015,” Board of Governors of the Federal Reserve System.
- 一上響・木村武・中村俊文・長谷部光 (2012) 「安全資産の需給と国債の希少性プレミアム」、日銀レビュー 2012-J-1、日本銀行。
- 財務省 (2013) 「『物価連動債の発行再開に関するワーキング・グループ』最終報告」、https://www.mof.go.jp/about_mof/councils/meeting_of_ilbe/proceedings/outline/wgfinalhoukoku.pdf.
- (2016) 「国債投資家懇談会 (第 64 回) 議事要旨」、https://www.mof.go.jp/about_mof/councils/meeting_of_jgbi/proceedings/outline/160324.html.
- 水門善之・内山朋規 (2019) 「金融市場が織り込む消費税率引き上げの実施確率」、『証券アナリストジャーナル』、第 57 巻、80–89 頁。
- 須藤直・田中雅樹 (2018) 「日本における市場分断・特定期間選好仮説の D S G E モデルによる検証 —ストック効果とフロー効果の定量比較を中心に—」、日本銀行ワーキングペーパーシリーズ 18-J-9、日本銀行。
- 湯山智教 (2016) 「我が国の物価連動国債にかかる元本保証オプションプレミアムの推計」、『早稲田大学商学研究科紀要』、第 82 巻、47–65 頁。
- 湯山智教・森平爽一郎 (2017) 「リスクプレミアムを勘案した市場における期待インフレ率の

抽出に関する実証分析」、『現代ファイナンス』、第 39 巻、1-30 頁.

補論 A 観測方程式の解の詳細

ここでは、名目・実質ゼロクーポンレート、およびインフレスワップレートに関する観測方程式（式 (6)、(7)、(10)）の詳細について記述する。まず、名目ゼロクーポンレートの観測方程式は、以下の式で与えられる。

$$R_t^N(T) = L_t^N + \frac{1 - e^{-\lambda^N(T-t)}}{\lambda^N(T-t)} S_t^N + A_t^N(T)$$

$$A_t^N(T) = -\frac{1}{2} \left(\sigma_{11}^2 \frac{(T-t)^2}{3} + \frac{\sigma_{22}^2}{(\lambda^N)^2} \left[1 - 2 \frac{1 - e^{-\lambda^N(T-t)}}{\lambda^N(T-t)} + \frac{1 - e^{-2\lambda^N(T-t)}}{2\lambda^N(T-t)} \right] \right)$$

次に、実質ゼロクーポンレートに関する観測方程式は、以下の式で与えられる。

$$R_t^{R,i}(T) = L_t^R + \frac{1 - e^{-\lambda^R(T-t)}}{\lambda^R(T-t)} S_t^R + B_t^{R,i}(T) X_t^{liq} + A_t^{R,i}(T)$$

$$B_t^{R,i}(T) = - \left(\frac{1 - e^{-\kappa_{liq}^Q(T-t)}}{\kappa_{liq}^Q(T-t)} + \frac{e^{-\lambda^{liq,i}(T-t)} - e^{-\kappa_{liq}^Q(T-t)}}{(\lambda^{liq,i} - \kappa_{liq}^Q)(T-t)} \right)$$

$$A_t^{R,i}(T) = \theta_{liq}^Q \left(1 - \frac{1 - e^{-\kappa_{liq}^Q(T-t)}}{\kappa_{liq}^Q(T-t)} \right) - \frac{\kappa_{liq}^Q \theta_{liq}^Q}{\kappa_{liq}^Q - \lambda^{liq,i}} \left(\frac{1 - e^{-\lambda^{liq,i}(T-t)}}{\lambda^{liq,i}(T-t)} - \frac{1 - e^{-\kappa_{liq}^Q(T-t)}}{\kappa_{liq}^Q(T-t)} \right)$$

$$- \frac{1}{2} \left(\sigma_{33}^2 \frac{(T-t)^2}{3} + \frac{\sigma_{44}^2}{(\lambda^R)^2} \left[1 - 2 \frac{1 - e^{-\lambda^R(T-t)}}{\lambda^R(T-t)} + \frac{1 - e^{-2\lambda^R(T-t)}}{2\lambda^R(T-t)} \right] + \sigma_{55}^2 C \right)$$

ただし、 C は以下の式で与えられる。

$$C = \frac{1}{(\kappa_{liq}^Q)^2} \left(1 - 2 \frac{1 - e^{-\kappa_{liq}^Q(T-t)}}{\kappa_{liq}^Q(T-t)} + \frac{1 - e^{-2\kappa_{liq}^Q(T-t)}}{2\kappa_{liq}^Q(T-t)} \right)$$

$$- \frac{2}{\kappa_{liq}^Q(\kappa_{liq}^Q - \lambda^{liq,i})} \left(\frac{1 - e^{-\lambda^{liq,i}(T-t)}}{\lambda^{liq,i}(T-t)} - \frac{1 - e^{-\kappa_{liq}^Q(T-t)}}{\kappa_{liq}^Q(T-t)} \right.$$

$$\left. + \frac{1 - e^{-2\kappa_{liq}^Q(T-t)}}{2\kappa_{liq}^Q(T-t)} - \frac{1 - e^{-(\kappa_{liq}^Q + \lambda^{liq,i})(T-t)}}{(\kappa_{liq}^Q + \lambda^{liq,i})(T-t)} \right)$$

$$+ \frac{1}{(\kappa_{liq}^Q - \lambda^{liq,i})^2} \left(\frac{1 - e^{-2\lambda^{liq,i}(T-t)}}{2\lambda^{liq,i}(T-t)} - 2 \frac{1 - e^{-(\kappa_{liq}^Q + \lambda^{liq,i})(T-t)}}{(\kappa_{liq}^Q + \lambda^{liq,i})(T-t)} + \frac{1 - e^{-2\kappa_{liq}^Q(T-t)}}{2\kappa_{liq}^Q(T-t)} \right)$$

最後に、インフレスワップレートの観測方程式は、以下の式で与えられる。

$$IS_t(T) = L_t^N + \frac{1 - e^{-\lambda^N(T-t)}}{\lambda^N(T-t)} S_t^N - L_t^R - \frac{1 - e^{-\lambda^R(T-t)}}{\lambda^R(T-t)} S_t^R + A_t^{IS}(T)$$

$$A_t^{IS}(T) = \frac{1}{2} \left((\sigma_{11}^2 + \sigma_{33}^2) \frac{(T-t)^2}{3} + \frac{\sigma_{22}^2}{(\lambda^N)^2} \left[1 - 2 \frac{1 - e^{-\lambda^N(T-t)}}{\lambda^N(T-t)} + \frac{1 - e^{-2\lambda^N(T-t)}}{2\lambda^N(T-t)} \right] \right.$$

$$\left. + \frac{\sigma_{44}^2}{(\lambda^R)^2} \left[1 - 2 \frac{1 - e^{-\lambda^R(T-t)}}{\lambda^R(T-t)} + \frac{1 - e^{-2\lambda^R(T-t)}}{2\lambda^R(T-t)} \right] \right)$$

補論 B 元本保証プレミアムの推計方法

以下では、簡単化のため実質割引債に関する元本保証プレミアムの推計方法を解説する。なお、物価連動国債の元本保証は償還元本のみ適用される一方、クーポンには適用されないことから、この簡単化は本稿の推計に影響を及ぼさない。元本保証を持つ (protected) 実質割引債価格を $P_t^p(T, \Pi_t/\Pi_{t_0})$ 、元本保証を持たない (unprotected) 実質割引債価格を $P_t^u(T, \Pi_t/\Pi_{t_0})$ で表す。ここで、 T は債券の満期、 t_0 は債券の発行日である。また、 Π_t/Π_{t_0} は、現時点の物価水準と発行時点の物価水準の比 (発行時点から現時点までのインフレ率) を表すもので、連動係数と呼ばれる³²。元本保証を持たない実質割引債の償還額は Π_T/Π_{t_0} であることから、リスク中立資産価格評価式より次の式を導出できる。

$$P_t^u\left(T, \frac{\Pi_t}{\Pi_{t_0}}\right) = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[\frac{\Pi_T}{\Pi_{t_0}} e^{-\int_t^T r_s^N ds} \right] = \frac{\Pi_t}{\Pi_{t_0}} \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[e^{\int_t^T (r_s^N - r_s^R) ds} e^{-\int_t^T r_s^N ds} \right] = \frac{\Pi_t}{\Pi_{t_0}} \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r_s^R ds} \right] \quad (\text{B.1})$$

一方、元本保証を持つ実質割引債の償還額は、満期時点の連動係数が 1 を下回る場合は 1、1 を上回る場合は Π_T/Π_{t_0} であることから、次の式が成り立つ。

$$\begin{aligned} P_t^p\left(T, \frac{\Pi_t}{\Pi_{t_0}}\right) &= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[\left(\frac{\Pi_T}{\Pi_{t_0}} \cdot \mathbb{1}_{\left\{\frac{\Pi_T}{\Pi_{t_0}} > 1\right\}} + 1 \cdot \mathbb{1}_{\left\{\frac{\Pi_T}{\Pi_{t_0}} \leq 1\right\}} \right) e^{-\int_t^T r_s^N ds} \right] \\ &= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[\frac{\Pi_T}{\Pi_{t_0}} e^{-\int_t^T r_s^N ds} \right] + \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r_s^N ds} \mathbb{1}_{\left\{\frac{\Pi_T}{\Pi_{t_0}} \leq 1\right\}} \right] - \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[\frac{\Pi_T}{\Pi_{t_0}} e^{-\int_t^T r_s^N ds} \mathbb{1}_{\left\{\frac{\Pi_T}{\Pi_{t_0}} \leq 1\right\}} \right] \\ &= P_t^u\left(T, \frac{\Pi_t}{\Pi_{t_0}}\right) + \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r_s^N ds} \mathbb{1}_{\left\{\frac{\Pi_T}{\Pi_{t_0}} \leq 1\right\}} \right] - \frac{\Pi_t}{\Pi_{t_0}} \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r_s^R ds} \mathbb{1}_{\left\{\frac{\Pi_T}{\Pi_{t_0}} \leq 1\right\}} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

ただし、 $\mathbb{1}_{\{\cdot\}}$ は指示関数、すなわち、括弧内の条件が成立する場合に 1 を、それ以外の場合に 0 をとる関数である。式 (B.1)・(B.2) を見比べることで、元本保証プレミアムが以下の式で表現できることがわかる³³。

$$POPt\left(T, \frac{\Pi_t}{\Pi_{t_0}}\right) = \underbrace{\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r_s^N ds} \mathbb{1}_{\left\{\frac{\Pi_T}{\Pi_t} \leq \frac{\Pi_{t_0}}{\Pi_t}\right\}} \right]}_{F_t^N\left(T, \frac{\Pi_t}{\Pi_{t_0}}\right)} - \frac{\Pi_t}{\Pi_{t_0}} \underbrace{\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r_s^R ds} \mathbb{1}_{\left\{\frac{\Pi_T}{\Pi_t} \leq \frac{\Pi_{t_0}}{\Pi_t}\right\}} \right]}_{F_t^R\left(T, \frac{\Pi_t}{\Pi_{t_0}}\right)} \quad (\text{B.3})$$

このように、元本保証プレミアムの推計は、式 (B.3) に現われる 2 つの期待値項 ($F_t^N \cdot F_t^R$) の計算に帰着する。紙幅の関係上、詳細な導出は省くが、Duffie et al. (2000)・Christensen et al. (2012) に

³²正確には、連動係数は、現時点と発行時点における「適用指数」の比である。適用指数は、約 3 か月前の物価指数を基に算出されているため、厳密には、この参照する物価水準のラグを考慮する必要がある。もっとも、このラグが推計に与える影響は大きくないことが先行研究によって明らかになっていることから、本稿ではこの論点は捨象している。

³³なお、Christensen et al. (2012) や CS における導出では、式 (B.3) 右辺第 2 項の期待値にかかる係数 Π_t/Π_{t_0} が含まれていないが、これは誤りである。

よる理論的結果を利用すると、 $F_t^N \cdot F_t^R$ は以下のとおり計算できることが示される。

$$F_t^X \left(T, \frac{\Pi_t}{\Pi_{t_0}} \right) = \frac{\varphi^X(\mathbf{0}, t, T)}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Im}\{e^{-ivz} \varphi^X(\mathbf{0} + iv\mathbf{b}, t, T)\}}{v} dv, \quad X \in \{N, R\} \quad (\text{B.4})$$

ただし、 $\mathbf{0}$ は 5×1 のゼロベクトル、 i は虚数単位、 $\mathbf{b} = [0, 0, 0, 0, 1]^\top$ 、 $z = \log(\Pi_t/\Pi_{t_0})$ 、 $\text{Im}\{\cdot\}$ は引数の虚部を表す関数である。また、式 (B.4) 中に現れる補助関数 φ^X ($X \in \{N, R\}$) は、 $\mathbf{a} = [0, 0, 0, 0, a]^\top$ とすると、以下のとおりである。

$$\begin{aligned} \varphi^N(\mathbf{a}, t, T) &= \exp \left((a-1)(T-t)L_t^N + (a-1) \frac{1 - e^{-\lambda^N(T-t)}}{\lambda^N} S_t^N \right. \\ &\quad \left. - a(T-t)L_t^R - a \frac{1 - e^{-\lambda^R(T-t)}}{\lambda^R} S_t^R + \widehat{A}_t^N(T) \right) \\ \widehat{A}_t^N(T) &= \frac{\sigma_{11}^2}{2} (a-1)^2 \frac{(T-t)^3}{3} + \frac{\sigma_{22}^2}{2} \frac{(a-1)^2}{(\lambda^N)^2} \left((T-t) - 2 \frac{1 - e^{-\lambda^N(T-t)}}{\lambda^N} + \frac{1 - e^{-2\lambda^N(T-t)}}{2\lambda^N} \right) \\ &\quad + \frac{\sigma_{33}^2}{2} a^2 \frac{(T-t)^3}{3} + \frac{\sigma_{44}^2}{2} \frac{a^2}{(\lambda^R)^2} \left((T-t) - 2 \frac{1 - e^{-\lambda^R(T-t)}}{\lambda^R} + \frac{1 - e^{-2\lambda^R(T-t)}}{2\lambda^R} \right) \\ \varphi^R(\mathbf{a}, t, T) &= \exp \left(a(T-t)L_t^N + a \frac{1 - e^{-\lambda^N(T-t)}}{\lambda^N} S_t^N \right. \\ &\quad \left. - (1+a)(T-t)L_t^R - (1+a) \frac{1 - e^{-\lambda^R(T-t)}}{\lambda^R} S_t^R + \widehat{A}_t^R(T) \right) \\ \widehat{A}_t^R(T) &= \frac{\sigma_{11}^2}{2} a^2 \frac{(T-t)^3}{3} + \frac{\sigma_{22}^2}{2} \frac{a^2}{(\lambda^N)^2} \left((T-t) - 2 \frac{1 - e^{-\lambda^N(T-t)}}{\lambda^N} + \frac{1 - e^{-2\lambda^N(T-t)}}{2\lambda^N} \right) \\ &\quad + \frac{\sigma_{33}^2}{2} (1+a)^2 \frac{(T-t)^3}{3} + \frac{\sigma_{44}^2}{2} \frac{(1+a)^2}{(\lambda^R)^2} \left((T-t) - 2 \frac{1 - e^{-\lambda^R(T-t)}}{\lambda^R} + \frac{1 - e^{-2\lambda^R(T-t)}}{2\lambda^R} \right) \end{aligned}$$

補論 C 物価連動国債価格に関する拡張カルマン・フィルターについて

以下、簡単化のために、元本保証を持たない物価連動国債について議論する。なお、実際の推計においては、補論 D で解説する EM アルゴリズムのもと、元本保証プレミアムを所与のものとして状態空間モデルを推計するため、この簡単化は本稿の推計に影響を及ぼさない。本稿では、利付物価連動国債価格を観測変数として用いる。利付物価連動国債価格は、式 (20) のとおり、ファクターの非線形関数であるため、本稿では拡張カルマン・フィルターに基づいて推計する。拡張カルマン・フィルターでは、状態変数の非線形関数 $f_t^i(X_t)$ を、状態変数の予測値 (projected state) $X_{t|t-1}$ 周りで一次近似する。

$$P_t^{R,i} \approx f_t^i(X_{t|t-1}) + \left(\frac{\partial f_t^i}{\partial X} \Big|_{X=X_{t|t-1}} \right)^\top (X_t - X_{t|t-1}) + \varepsilon_t$$

この式を変形することで、次の線形近似された観測方程式が得られるため、通常のカルマン・フィルターを適用することができる。

$$P_t^{R,i} = \underbrace{f_t^i(X_{t|t-1}) - \left(\frac{\partial f_t^i}{\partial X} \Big|_{X=X_{t|t-1}} \right)^\top}_{A_t^{EKF,i}} X_{t|t-1} + \underbrace{\left(\frac{\partial f_t^i}{\partial X} \Big|_{X=X_{t|t-1}} \right)^\top}_{B_t^{EKF,i}} X_t + \varepsilon_t \quad (\text{C.5})$$

この式に現われる導関数を、物価連動国債の理論価格式（式 (16)）から計算することで、 $B_t^{EKF,i}$ の各要素 $[B_t^{EKF,i}]_j$ ($j = 1, 2, \dots, 5$) が以下で与えられることがわかる。

$$\begin{aligned} [B_t^{EKF,i}]_j = & -\frac{c}{2} \frac{\tau_1}{1/2} e^{-\tau_1 R_t^{R,i}(\tau_1)} \tau_1 [B_t(t + \tau_1)]_j - \sum_{k=2}^{N_t^i-1} \frac{c}{2} e^{-\tau_k R_t^{R,i}(\tau_k)} \tau_k [B_t(t + \tau_k)]_j \\ & - \left(1 + \frac{c}{2}\right) e^{-\tau_{N_t^i} R_t^{R,i}(\tau_{N_t^i})} \tau_{N_t^i} [B_t(t + \tau_{N_t^i})]_j \end{aligned}$$

ただし、 $B_t(T)$ は、ゼロクーポン物価連動国債の理論式における各ファクターにかかる係数であり、以下で与えられる。

$$B_t(T) = \begin{bmatrix} B_t^{R,f}(T) \\ B_t^{R,i}(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(T-t) \\ -\frac{1-e^{-\lambda R(T-t)}}{\lambda R} \\ \left(\frac{1-e^{-\kappa_{liq}^Q(T-t)}}{\kappa_{liq}^Q} + \frac{e^{-\lambda^{liq,i}(T-t)} - e^{-\kappa_{liq}^Q(T-t)}}{\lambda^{liq,i} - \kappa_{liq}^Q} \right) \end{bmatrix}$$

補論 D EM アルゴリズムについて

元本保証プレミアムの算出は非常に計算負荷が高いため、最尤推計の各ステップで元本保証プレミアムを再計算することは現実的ではない。このため、本稿では [ACR](#) に倣って、元本保証プレミアムの推計に関して EM (expectation-maximization) アルゴリズムを適用することで推計時間の短縮を図っている。具体的には下記のアプローチに基づき、パラメータの最尤推計と元本保証プレミアムの推計を交互に行うことで、両者を推計している。ただし、 $\theta^{(i)}$ 、 $POP^{(i)}$ はそれぞれ、 i ステップ目におけるモデル・パラメータの推計値と、元本保証プレミアムの（各時点・各銘柄についての）推計値行列、 $\mathcal{L}(\theta, POP)$ は、モデル・パラメータと元本保証プレミアムの推計値が与えられたもとの尤度、 ε は停止条件を表す小さな数である（本稿の分析では 0.1 としている）。

初期化: モデル・パラメータの初期値 $\theta^{(0)}$ を与える。元本保証プレミアムを 0 にセットする ($POP^{(0)} \equiv 0$)。

ステップ 1: 元本保証プレミアムの推計値 $POP^{(i-1)}$ を所与としたうえで、 $\theta^{(i-1)}$ を初期値として、モデル・パラメータ $\theta^{(i)}$ を推計する。

ステップ 2: 下記のステップに基づいて、元本保証プレミアムを算出・更新する。ただし、 $POP^{(i-1,0)} = POP^{(i-1)}$ である。

ステップ 2-1: $\theta^{(i)}$ と $POP^{(i-1,j-1)}$ を所与として、状態変数の推計値 $\{X_t\}^{(j)}$ をカルマン・フィルターにより推計する。

ステップ 2-2: $\theta^{(i)}$ と $\{X_t\}^{(j)}$ を所与として、元本保証プレミアム $POP^{(i-1,j)}$ を推計する。

ステップ 2-3: $\left| \mathcal{L}(\theta^{(i)}, POP^{(i-1,j-1)}) - \mathcal{L}(\theta^{(i)}, POP^{(i-1,j)}) \right| < \varepsilon$ の時、 $POP^{(i)} = POP^{(i-1,j)}$ として、ステップ 3 へ進む。そうでない場合は、 $j = j + 1$ として、ステップ 2-1 に戻る。

ステップ 3: $\left| \mathcal{L}(\theta^{(i-1)}, POP^{(i-1)}) - \mathcal{L}(\theta^{(i)}, POP^{(i)}) \right| < \varepsilon$ の時、 $\theta^{(i)}, POP^{(i)}$ を推計値として、推計を終了する。そうでない場合は、 $i = i + 1$ として、ステップ 1 に戻る。

また、ステップ 1 のパラメータ推計に際しては、[ACR](#) と同様、物価連動国債の各銘柄固有パラメータ θ_{BS} ($\{\lambda^{liq,i}\}$) と共通パラメータ θ_{CP} (それ以外のパラメータ) に分割したうえで、交互にパラメータ推計値を更新している。この手法は、パラメータ数の多いモデルの最尤推計で一般的に用いられるものである ([DeJong and Dave 2007](#))。具体的には、以下のアルゴリズムを実行している。

初期化: $\theta^{(i-1)} = [\theta_{CP}^{(i-1,0)}, \theta_{BS}^{(i-1,0)}]$ としてパラメータを初期化する。

ステップ A: $\theta_{BS}^{(i-1,j-1)}$ を所与として、 $\theta_{CP}^{(i-1,j)}$ を推計する。

ステップ B: $\theta_{CP}^{(i-1,j)}$ を所与として、 $\theta_{BS}^{(i-1,j)}$ を推計する。

ステップ C: $\left| \mathcal{L}(\theta_{CP}^{(i-1,j-1)}, \theta_{BS}^{(i-1,j-1)}) - \mathcal{L}(\theta_{CP}^{(i-1,j)}, \theta_{BS}^{(i-1,j)}) \right| < \varepsilon$ の時、 $\theta^{(i)} = [\theta_{CP}^{(i-1,j)}, \theta_{BS}^{(i-1,j)}]$ として、推計を終了する (上記、ステップ 2 に進む)。そうでない場合は、 $j = j + 1$ としてステップ A に戻る。

補論 E 市場参加者のインフレ予想とデフレ発生確率の算出

方法

以下では、市場参加者のインフレ予想 (式 (21)) とデフレ発生確率を、[Christensen et al. \(2012\)](#) による理論的結果に基づいて算出する方法を解説する。まず、補助変数 $Y_{t,T}$ を以下のとおり導入する。

$$Y_{t,T} = \int_t^T (r_s^N - r_s^{R,f}) ds$$

本稿は、ガウシアン・アフィン期間構造モデルを採用していることから、この補助変数 $Y_{t,T}$ は正規分布に従う。このため、 $m_{t,T}^Y$ と $\sigma_{t,T}^Y$ を、それぞれ、 $Y_{t,T}$ の実確率測度下での期待値と標準偏差とすると、

市場参加者のインフレ予想は、正規分布の積率母関数の公式より、

$$\pi_t^*(T) = \frac{1}{T-t} \log \mathbb{E}_t^{\mathbb{P}} \left[e^{Y_{t,T}} \right] = \frac{1}{T-t} \left(m_{t,T}^Y + \frac{1}{2} (\sigma_{t,T}^Y)^2 \right)$$

となることが分かる。また、デフレ発生確率については、 $\Phi(\cdot)$ を累積標準正規密度関数とすると、

$$\mathbb{P} \left(\frac{\Pi_T}{\Pi_t} < 1 \right) = \mathbb{P} (Y_{t,T} < 0) = \Phi \left(\frac{-m_{t,T}^Y}{\sigma_{t,T}^Y} \right)$$

となることが分かる。このため、市場参加者のインフレ予想とデフレ発生確率の算出は、 $m_{t,T}^Y$ と $\sigma_{t,T}^Y$ の算出に帰着する。 $m_{t,T}^Y$ と $\sigma_{t,T}^Y$ は、以下の手法で数値的に算出することができる。まず、本稿のファンダメンタル・ファクターの定式化のもと、 $Y_{t,s}$ が次の確率微分方程式を満たすことに着目する³⁴。

$$dY_{t,s} = \left(r_s^N - r_s^{R,f} \right) ds = \left(L_s^N + S_s^N - L_s^R - S_s^R \right) ds, \quad Y_{t,t} = 0$$

このため、ファンダメンタル・ファクターと補助変数を組とした状態変数ベクトル $Z_s = [L_s^N, S_s^N, L_s^R, S_s^R, Y_{t,s}]$ は、次の確率微分方程式に従うことが分かる。

$$dZ_s = (A + BZ_s)ds + \bar{\Sigma}dW_s^{\mathbb{P}}, \quad Z_t = [L_t^N, S_t^N, L_t^R, S_t^R, 0]$$

ただし、

$$A = \begin{bmatrix} \kappa_{11}^{\mathbb{P}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{22}^{\mathbb{P}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{33}^{\mathbb{P}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa_{44}^{\mathbb{P}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = - \begin{bmatrix} \kappa_{11}^{\mathbb{P}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{22}^{\mathbb{P}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{33}^{\mathbb{P}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa_{44}^{\mathbb{P}} & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$\bar{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{44}, 0)$ である。Christensen et al. (2012) は、状態変数ベクトル Z_s の条件付期待値 $m_t^{\mathbb{P}}(s) = \mathbb{E}_t^{\mathbb{P}}[Z_{t,s}]$ と、条件付共分散行列 $V_t^{\mathbb{P}}(s) = \text{Var}_t^{\mathbb{P}}(Z_{t,s})$ が、それぞれ、次の常微分方程式を満たすことを示している。

$$\frac{dm_t^{\mathbb{P}}(s)}{ds} = A + Bm_t^{\mathbb{P}}(s), \quad m_t^{\mathbb{P}}(t) = Z_t$$

$$\frac{dV_t^{\mathbb{P}}(s)}{ds} = BV_t^{\mathbb{P}}(s) + V_t^{\mathbb{P}}(s)B^{\top} + \bar{\Sigma}\bar{\Sigma}^{\top}, \quad V_t^{\mathbb{P}}(t) = 0$$

これらの常微分方程式を数値的に解くことで得られる $m_t^{\mathbb{P}}(T)$ と $V_t^{\mathbb{P}}(T)$ について、補助変数 $Y_{t,T}$ に対応する成分をみることで $m_{t,T}^Y$ と $\sigma_{t,T}^Y$ を得ることができる。本稿では、4次のルンゲ・クッタ法により、常微分方程式を数値的に解くことで、市場参加者のインフレ予想とデフレ発生確率を算出している。

³⁴以下では、 t を固定したうえで、 s を時間発展する変数とみなしている。

表 1: 物価連動国債の流動性と発行からの経過年数のパネル分析

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
経過年数	-17.34**	-19.63**	-22.27**	-22.40**	-17.20**
元本保証ダミー		-37.32*			
R^2	0.32	0.36	0.47	0.47	0.86
観測数	39,238	39,238	39,238	8,056	8,056
データ頻度	日次	日次	日次	週次	週次
銘柄固定効果	×	×	○	○	○
時間固定効果	×	×	×	×	○

被説明変数：インフレスワップレートと銘柄別 BEI の較差 (IS-BEI 較差)。

単位は、ベースポイント (bps)。

推計期間：2007 年 3 月 2 日～2020 年 1 月 31 日。

週次推計においては金曜日のデータを使用している。

**、* はそれぞれ、1%、5% 有意を表す。

表 2: 名目ゼロクーポンレートとインフレスワップレートのフィット

名目ゼロクーポンレート		
年限	平均誤差	RMSE
6 か月	5.44	8.85
1 年	3.19	5.61
2 年	-1.02	2.98
3 年	-4.08	6.00
5 年	-5.71	8.48
7 年	-5.69	8.11
10 年	6.90	9.05
平均	-0.14	7.01
インフレスワップレート		
年限	平均誤差	RMSE
1 年	-12.63	32.34
2 年	2.23	18.19
3 年	9.63	21.20
4 年	10.74	21.54
5 年	4.59	13.99
6 年	3.79	12.67
7 年	0.25	10.47
8 年	-3.59	13.18
9 年	-5.85	17.07
10 年	-7.91	17.28
平均	0.12	17.79

単位は、ベースポイント (bps)。

表 3: 物価連動国債のフィット

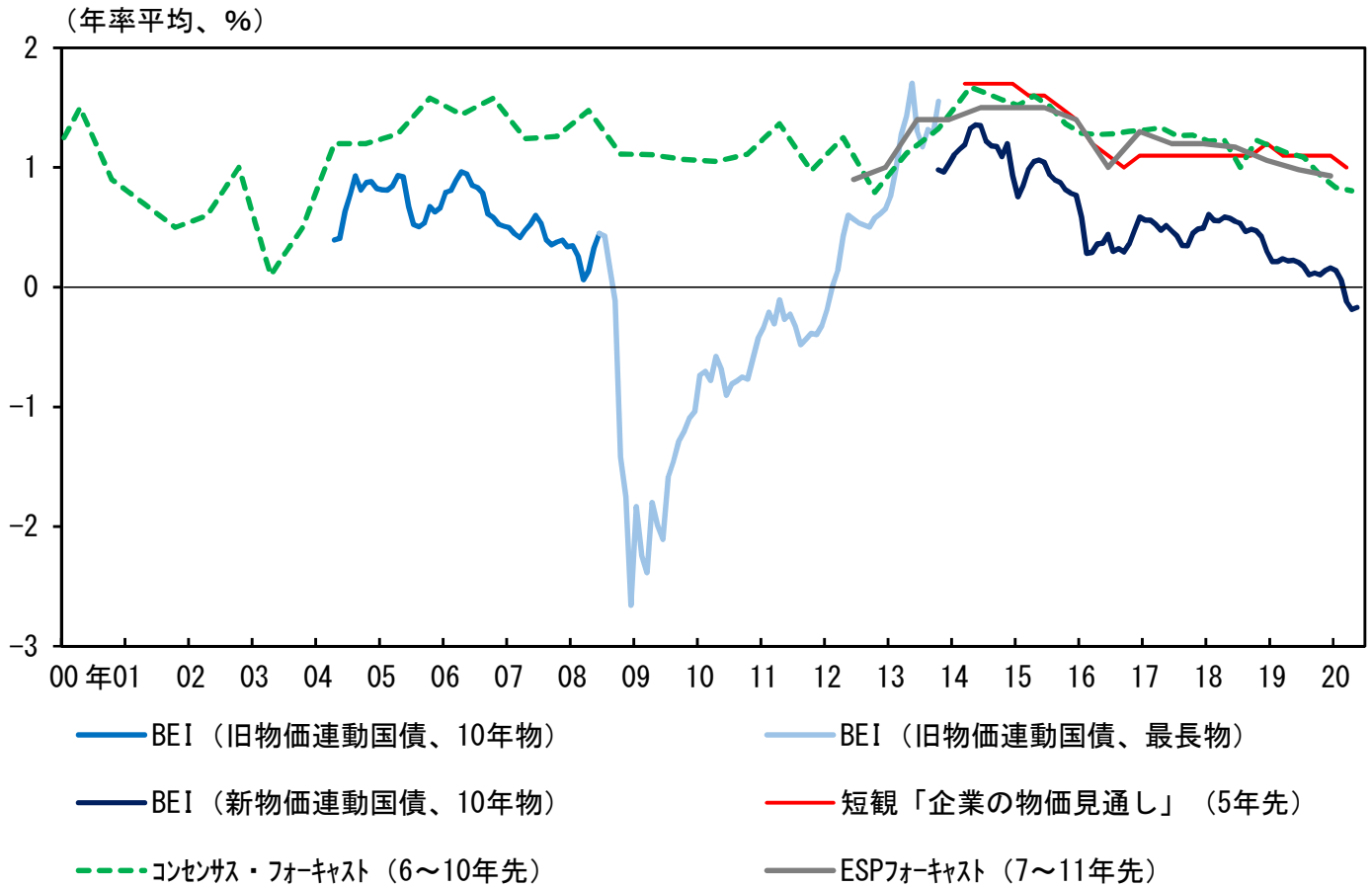
物価連動国債銘柄情報					フィット		銘柄固有 パラメータ	
回数	初回 発行日	満期日	クーポン 利率	元本 保証	平均 誤差	RMSE	$\lambda^{liq,i}$	s.e.
1	2004/3/10	2014/3/10	1.2%	×	-2.60	16.79	0.51	(0.05)
2	2004/6/10	2014/6/10	1.1%	×	2.45	10.41	0.29	(0.01)
3	2004/12/10	2014/12/10	0.5%	×	2.21	6.75	0.52	(0.02)
4	2005/6/10	2015/6/10	0.5%	×	2.40	9.38	0.29	(0.01)
5	2005/9/12	2015/9/10	0.8%	×	-1.22	8.79	0.32	(0.01)
6	2005/12/12	2015/12/10	0.8%	×	-2.79	8.19	0.48	(0.02)
7	2006/3/10	2016/3/10	0.8%	×	-1.89	6.93	0.50	(0.02)
8	2006/6/12	2016/6/10	1.0%	×	3.84	8.39	0.80	(0.02)
9	2006/10/11	2016/9/10	1.1%	×	-0.48	2.78	1.05	(0.04)
10	2006/12/12	2016/12/10	1.1%	×	-0.42	2.71	1.22	(0.05)
11	2007/4/10	2017/3/10	1.2%	×	-0.10	3.83	1.28	(0.05)
12	2007/6/12	2017/6/10	1.2%	×	0.54	3.71	1.21	(0.06)
13	2007/10/10	2017/9/10	1.3%	×	-0.56	3.97	1.53	(0.07)
14	2007/12/11	2017/12/10	1.2%	×	-0.04	4.52	1.69	(0.07)
15	2008/4/10	2018/3/10	1.4%	×	-0.67	5.23	1.81	(0.08)
16	2008/6/10	2018/6/10	1.4%	×	0.64	6.78	1.51	(0.10)
17	2013/10/10	2023/9/10	0.1%	○	-0.37	2.83	0.09	(0.02)
18	2014/4/10	2024/3/10	0.1%	○	-0.14	2.31	0.08	(0.02)
19	2014/10/10	2024/9/10	0.1%	○	0.39	3.07	0.07	(0.02)
20	2015/5/12	2025/3/10	0.1%	○	0.20	2.15	0.06	(0.01)
21	2016/4/14	2026/3/10	0.1%	○	-0.09	1.73	0.06	(0.02)
22	2017/4/13	2027/3/10	0.1%	○	-0.53	2.52	0.06	(0.02)
23	2018/5/11	2028/3/10	0.1%	○	-0.07	1.83	0.05	(0.01)
24	2019/5/13	2029/3/10	0.1%	○	1.06	4.01	0.02	(0.01)
平均					0.07	5.40		

フィット誤差の単位は、ベースポイント (bps)。

表 4: モデル・パラメータの推計値

	推計値	s.e.
λ^N	0.0641	(0.0029)
λ^R	0.2833	(0.0124)
κ^{liq}	0.6540	(0.0147)
θ^{liq}	0.0103	(0.0005)
θ_1	0.0388	(0.0649)
θ_2	0.0233	(0.0117)
θ_3	0.0133	(0.0254)
θ_4	-0.0170	(0.0196)
θ_5	-0.0060	(0.0232)
σ_{11}	0.0022	(0.0001)
σ_{22}	0.0022	(0.0001)
σ_{33}	0.0043	(0.0002)
σ_{44}	0.0071	(0.0003)
σ_{55}	0.0290	(0.0006)
κ_{11}	0.0006	(0.0011)
κ_{22}	0.0033	(0.0020)
κ_{33}	0.0113	(0.0161)
κ_{44}	0.1408	(0.2560)
κ_{55}	0.2280	(0.1048)
σ^N	0.0008	(9.32E-6)
σ^{IS}	0.0019	(1.88E-5)
σ^R	0.0006	(6.51E-6)
log LLH	102,119.3	

図 1 : BEIとサーベイベースの長期インフレ予想



(注) 1. BEIは、日次データの月次平均値。直近は、2020年5月。

2. 新物価連動国債は2013年10月以降に発行されたものを、旧物価連動国債はそれ以外のものを指す。最長物は第16回債(2018年6月償還の銘柄)。

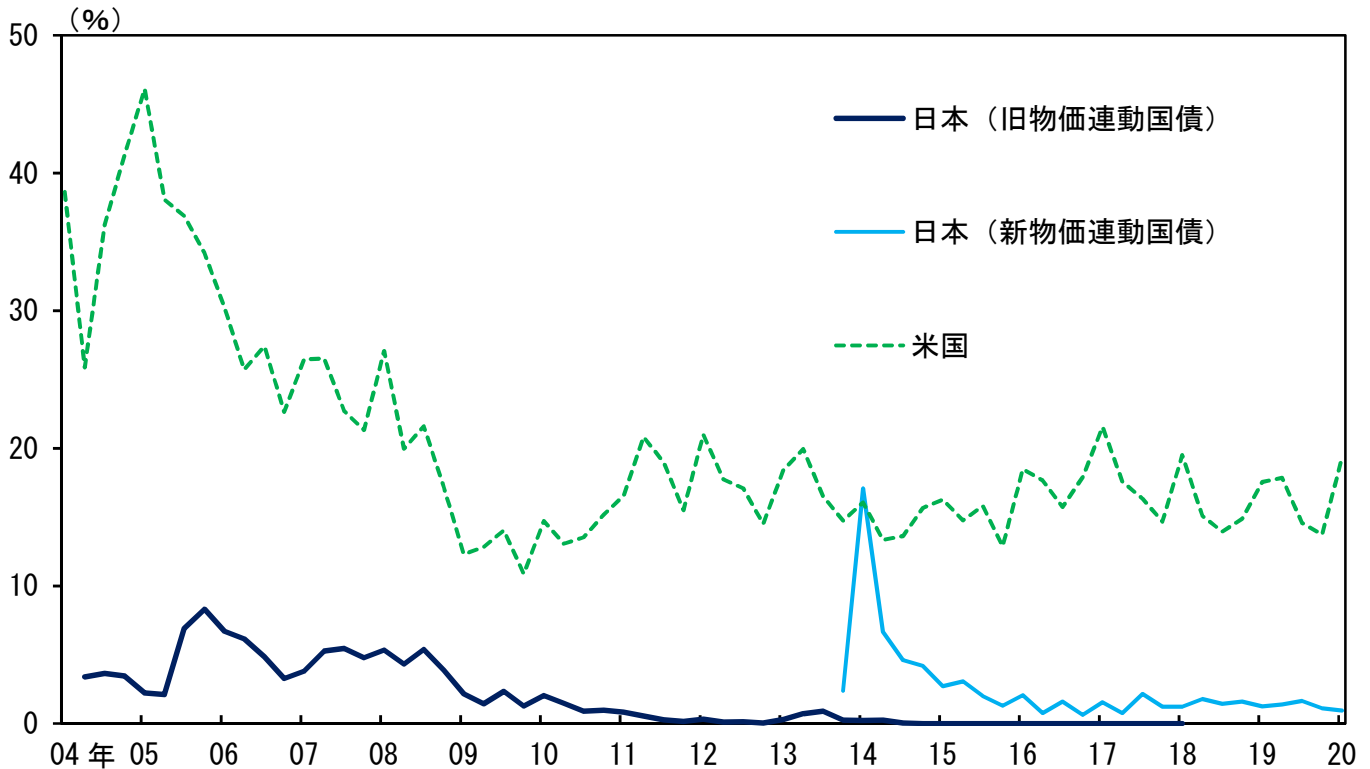
(出所) Bloomberg、Consensus Economics「コンセンサス・フォーキャスト」、日本経済研究センター、日本銀行

図2：物価連動国債の商品設計と市場環境

(1) 物価連動国債の商品設計

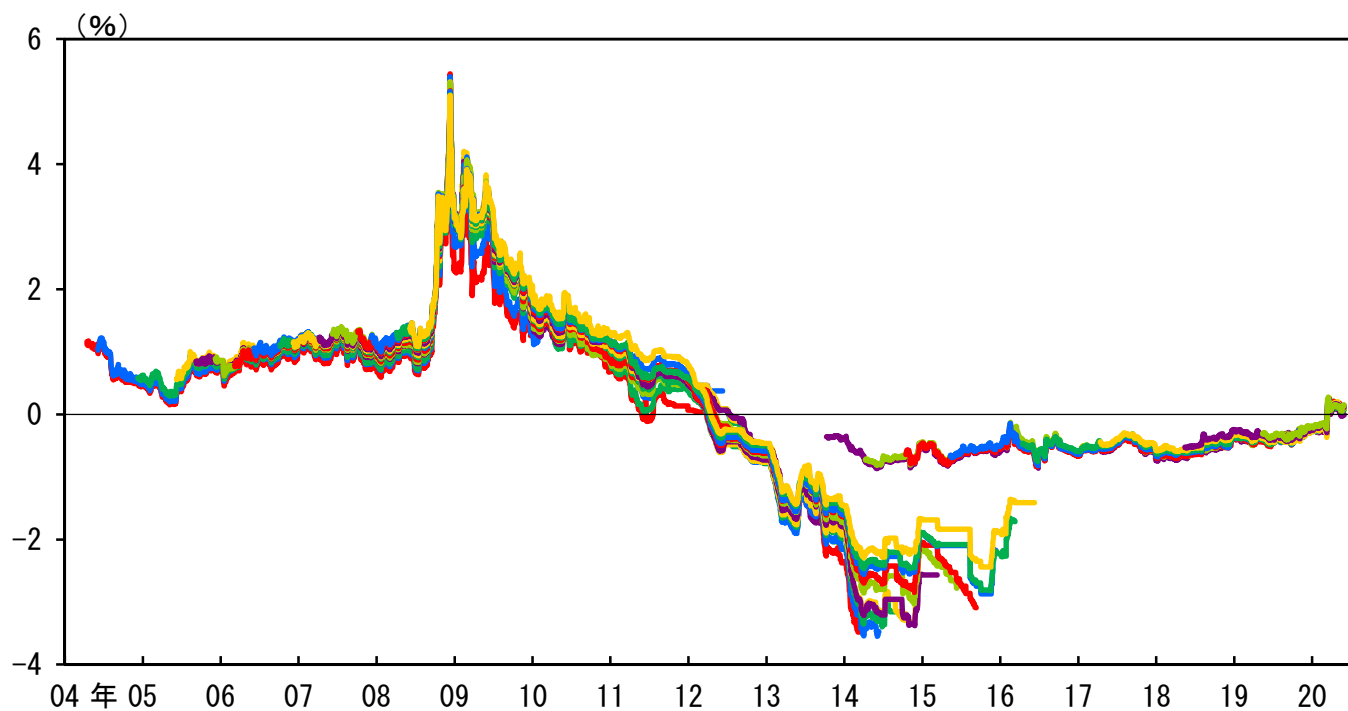
		発行時期	発行 銘柄数	元本 保証	参照する 物価指数	発行年限	国債発行残高に 占める割合
日本	旧	2004～08年	16	×	CPI (除く生鮮食品)	10年のみ	1.2%
	新	2013年～	8	○			
米国		1997年～	77	○	CPI-U	5, 10, 20, 30年	8.9%

(2) 物価連動国債の売買回転率



- (注) 1. (1) の発行銘柄数と国債発行残高に占める割合は、2020年3月末時点。
 2. (1) の国債発行残高に占める割合の分母は、日本は普通国債+財投債、米国は市場性国債。
 3. (2) は、四半期の総取引高を、四半期末時点での物価連動国債残高で割ったもの。
 直近は2020年第1四半期。
 4. (2) の物価連動国債残高は、日本は市中流通残高ベース、米国は総発行残高ベース。
 (出所) Treasury Direct、Federal Reserve Bank of New York、QUICK、財務省、日本銀行

図3：物価連動国債の銘柄別利回り

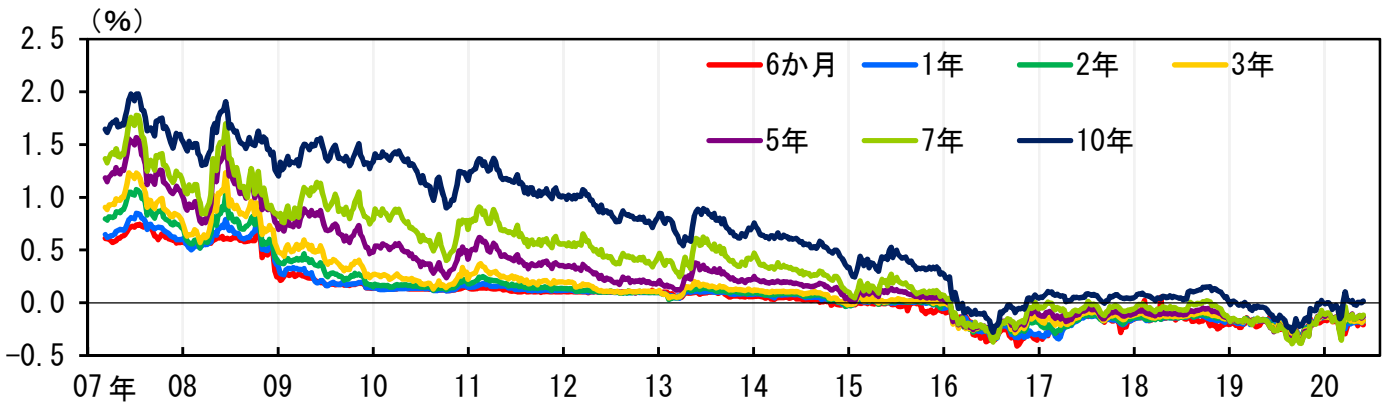


- (注) 1. 各系列（各線色）は、第1回債～第24回債の利回りの推移を表す。
2. 各系列の始点（左端）は発行日。
3. 旧物価連動国債（第1回債～第16回債）の各系列の終点（右端）は、残存年数が2年となる時点。
新物価連動国債（第17回債～第24回債）の各系列の終点（右端）は、いずれの回号も直近時点における残存年数が2年以上であるため、2020年5月29日。

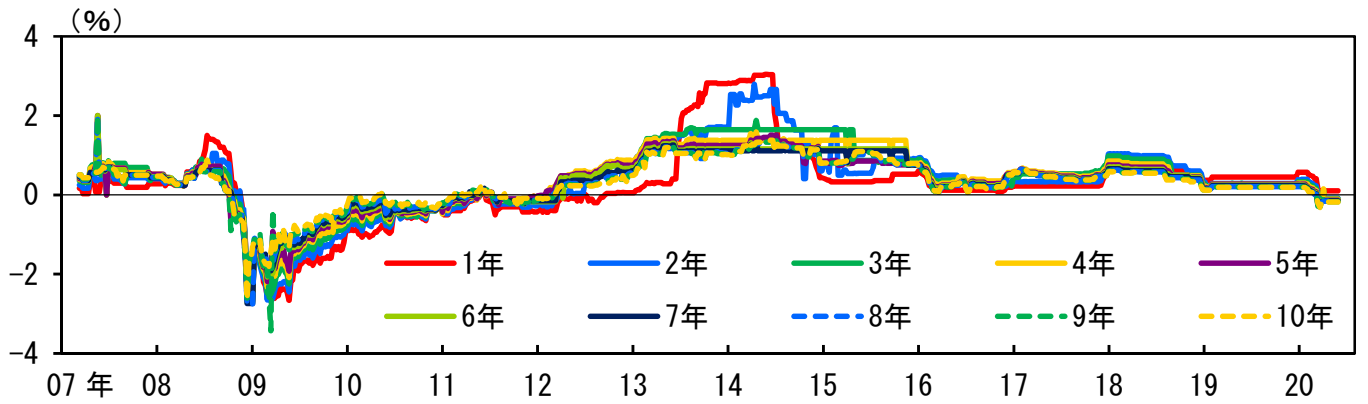
(出所) Bloomberg、財務省

図4：推計に使用したデータ

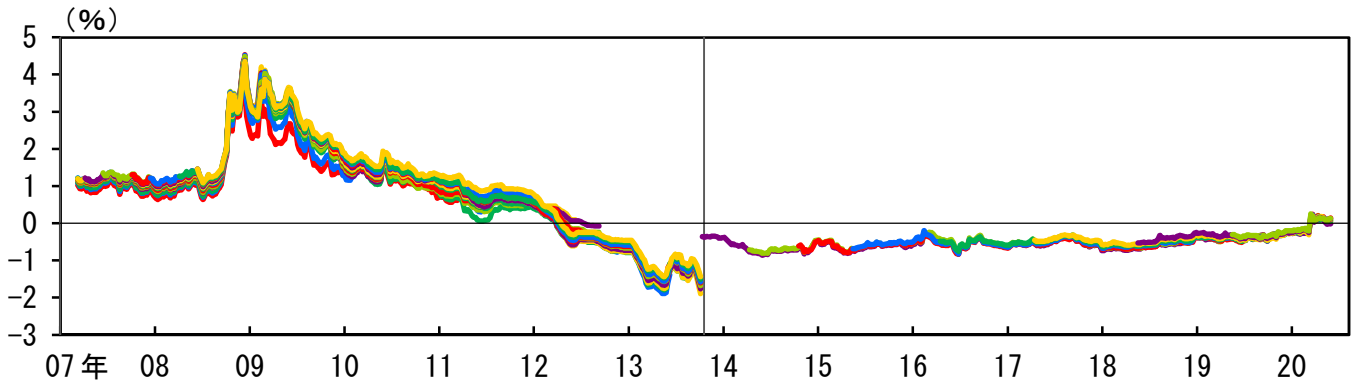
(1) 名目ゼロクーポンレート



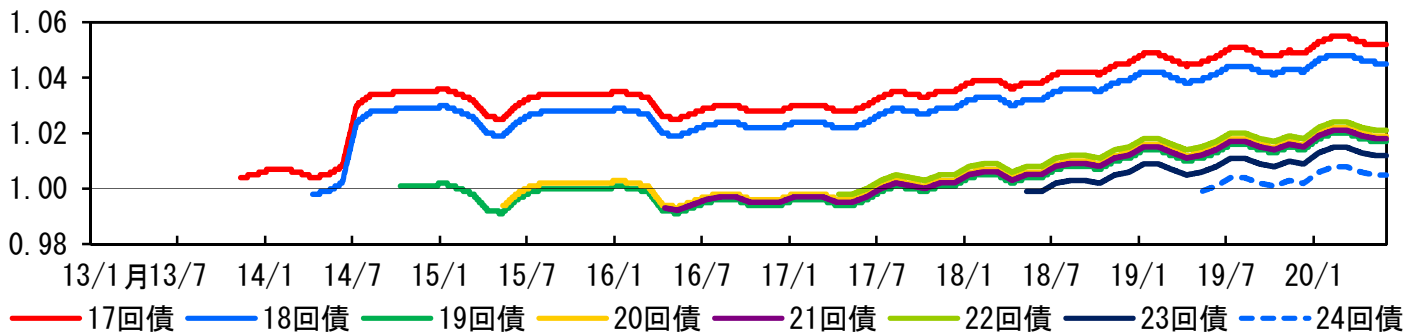
(2) インフレスワップレート



(3) 物価連動国債利回り（銘柄別）



(4) 連動係数（各時点と発行時点の適用指数の比）



(注) 1. (3) の各系列（各線色）は、第1回債～第24回債の物価連動国債利回りを表す。

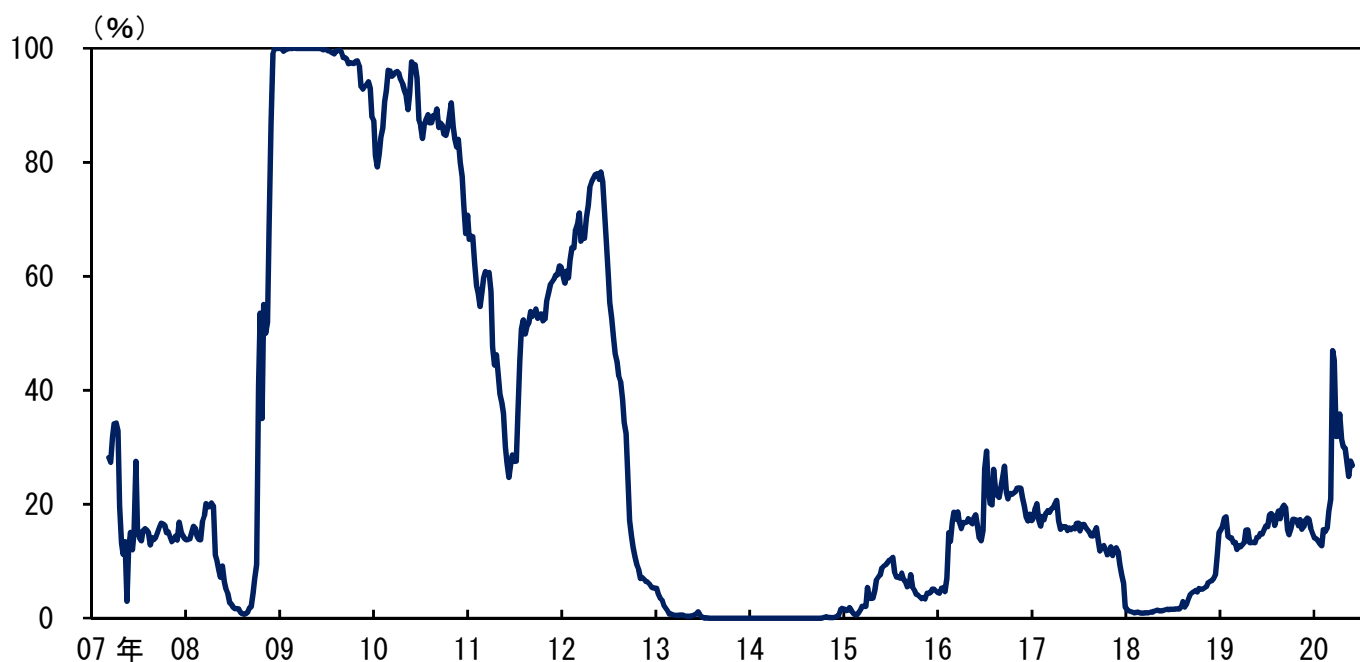
縦線は、新物価連動国債の発行開始日を表す。

2. 直近は、2020年5月29日週。

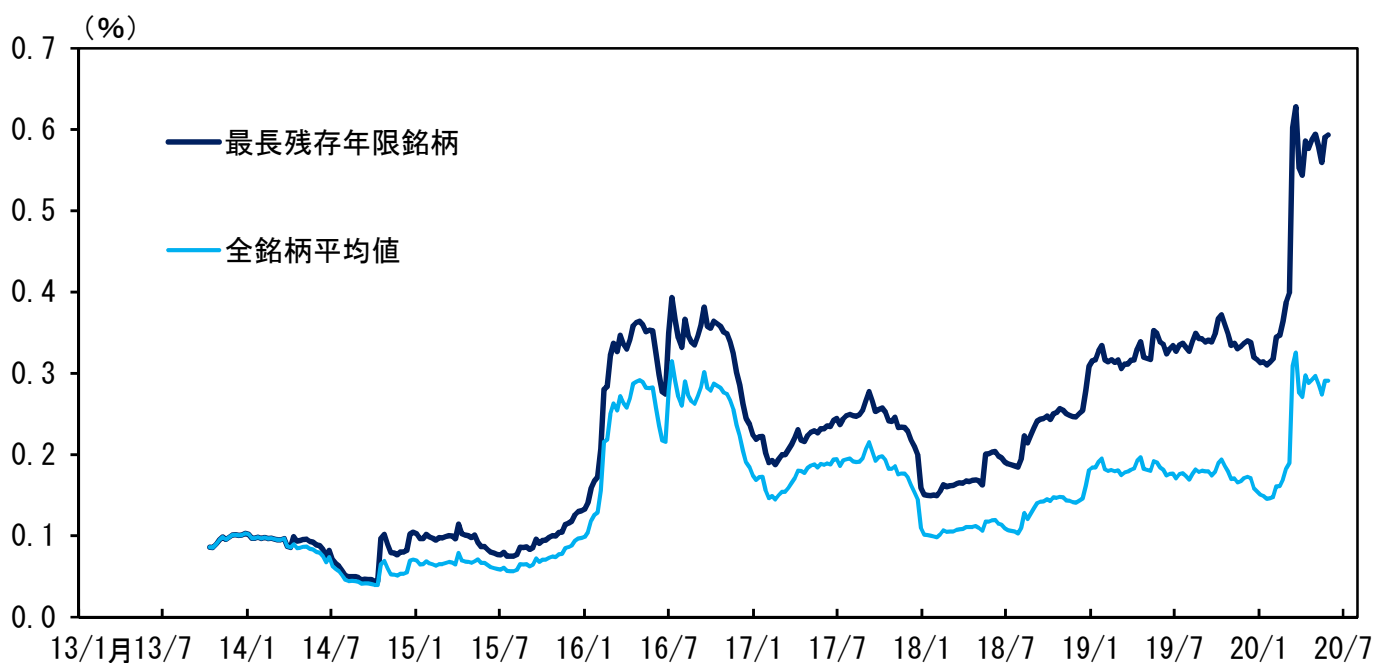
(出所) Bloomberg、財務省

図5：物価連動国債の元本保証プレミアムの推計値

(1) 1年先デフレ発生確率の推計値



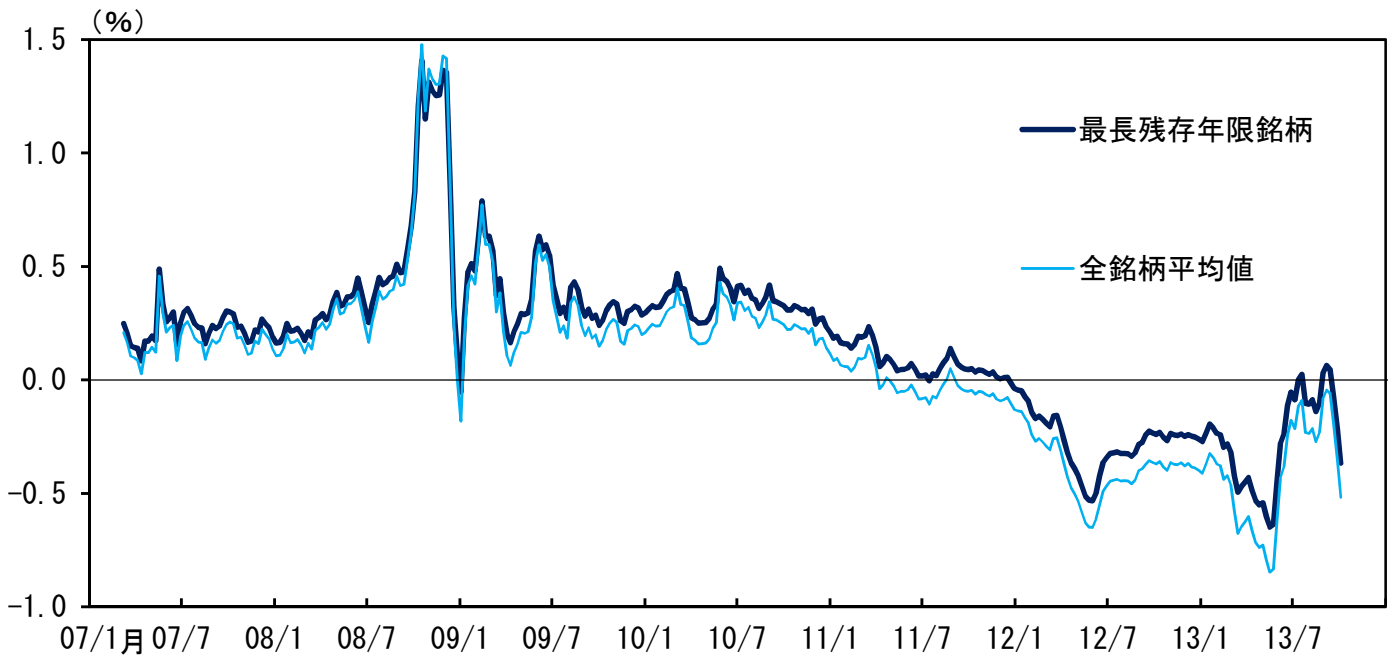
(2) 新物価連動国債の元本保証プレミアムの推計値



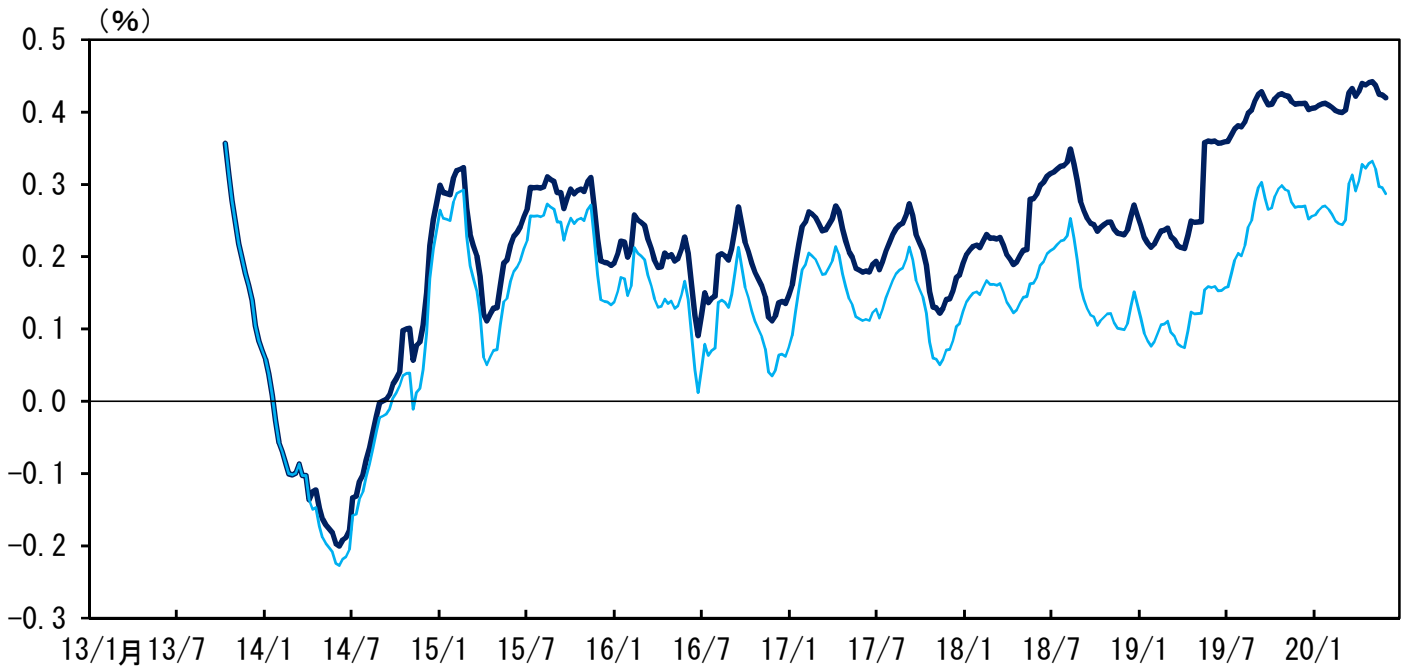
(注) 直近は、2020年5月29日週。

図6：物価連動国債の流動性プレミアムの推計値

(1) 旧物価連動国債の流動性プレミアムの推計値

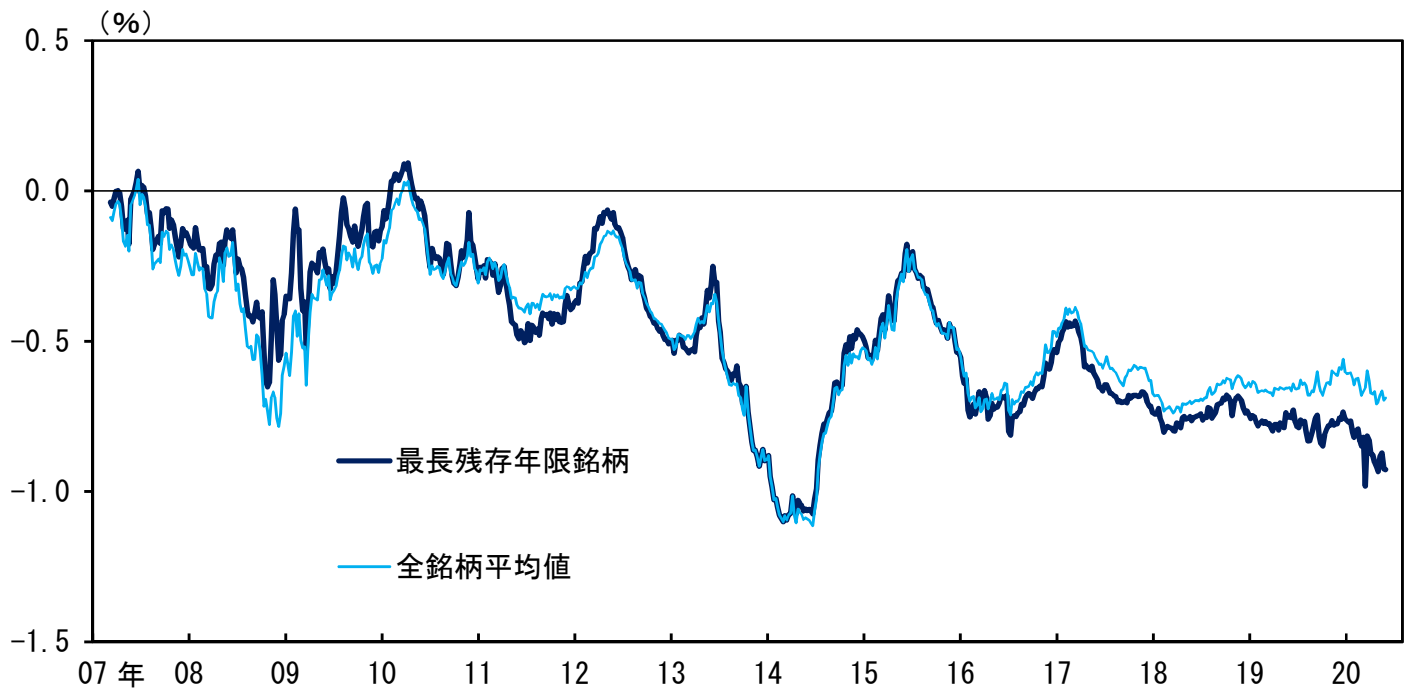


(2) 新物価連動国債の流動性プレミアムの推計値



(注) (2) の直近は、2020年5月29日週。

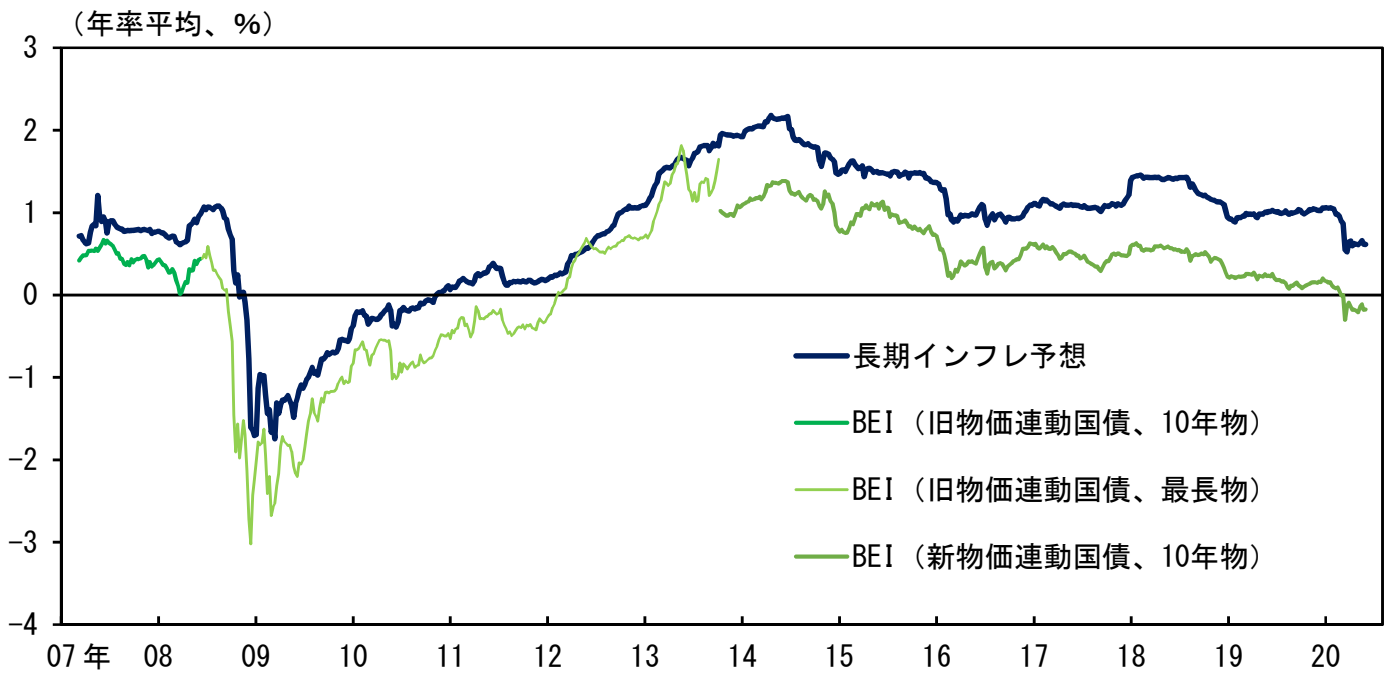
図 7 : TP較差の推計値



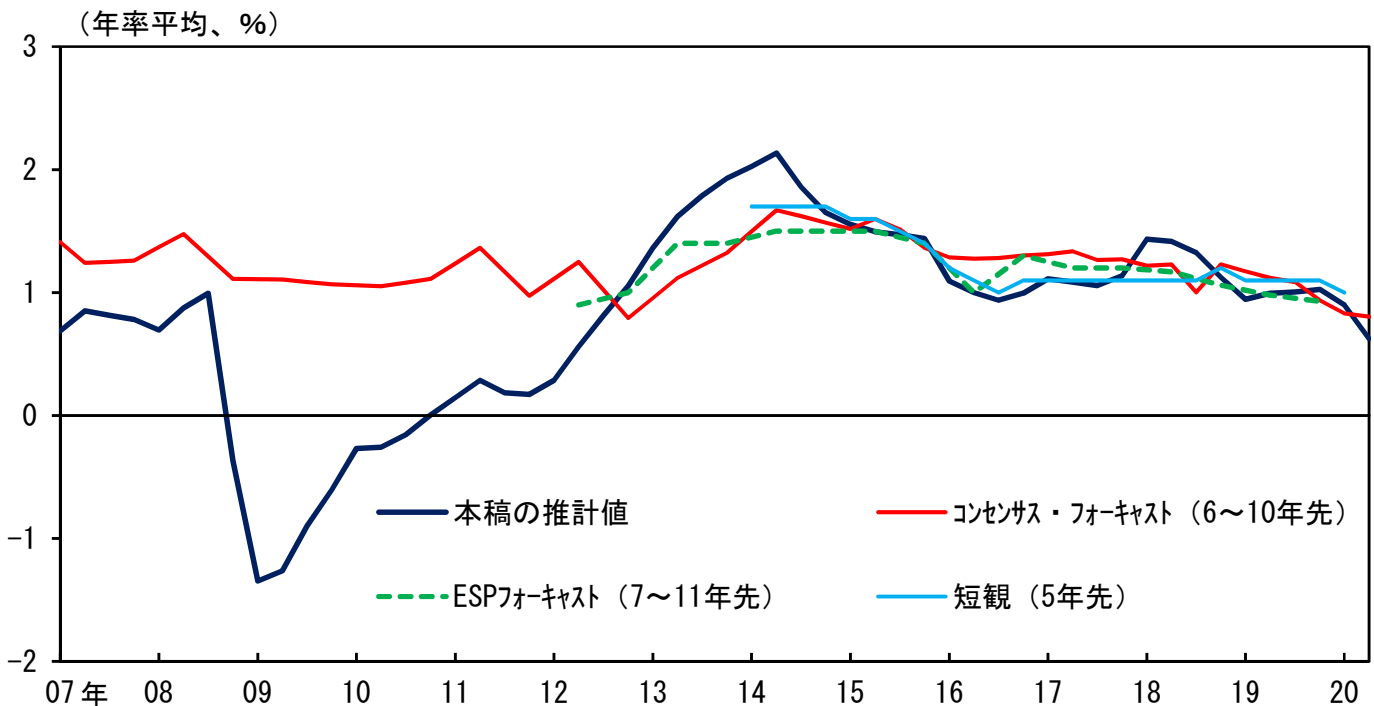
(注) 直近は、2020年5月29日週。

図8：市場参加者の長期インフレ予想の推計値

(1) 市場参加者の長期インフレ予想（10年）の推計値



(2) サーベイベースのインフレ予想指標との比較



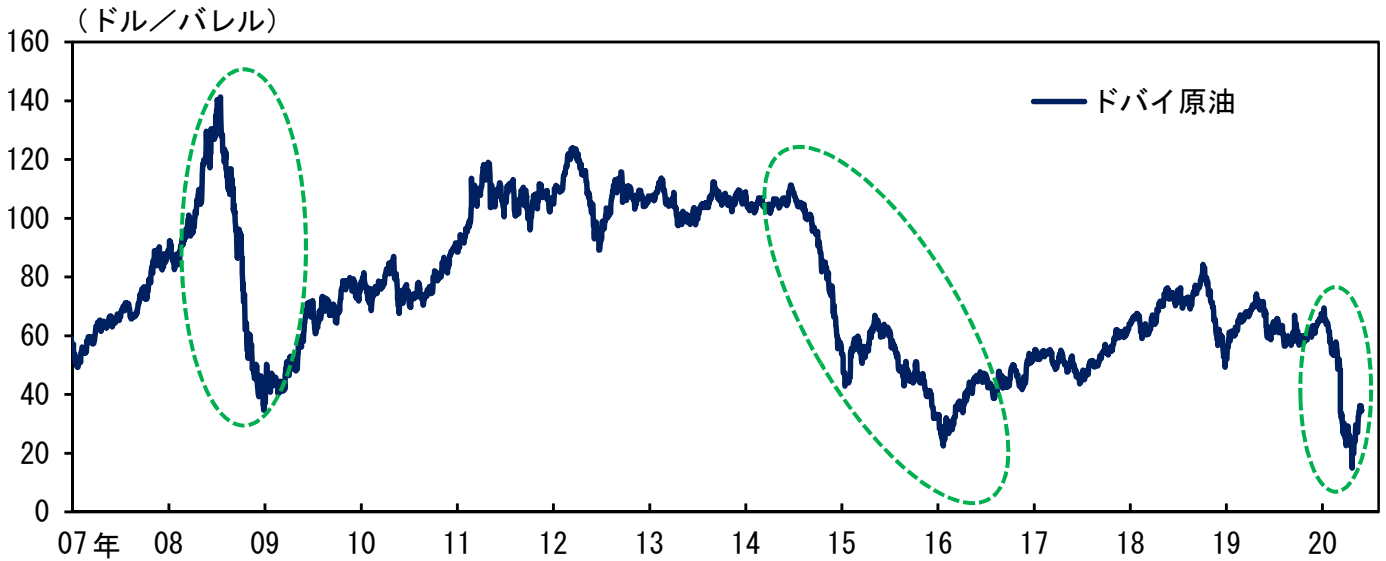
(注) 1. (1) の直近は、2020年5月29日週。

2. (2) の「本稿の推計値」の値は、週次の長期インフレ予想（10年）の推計値の四半期平均。ただし、2020年第2四半期の数値は、2020年4月～5月の推計値の平均値。

(出所) Bloomberg、Consensus Economics「コンセンサス・フォーキャスト」、日本経済研究センター、日本銀行

図9：市場参加者の長期インフレ予想と原油価格

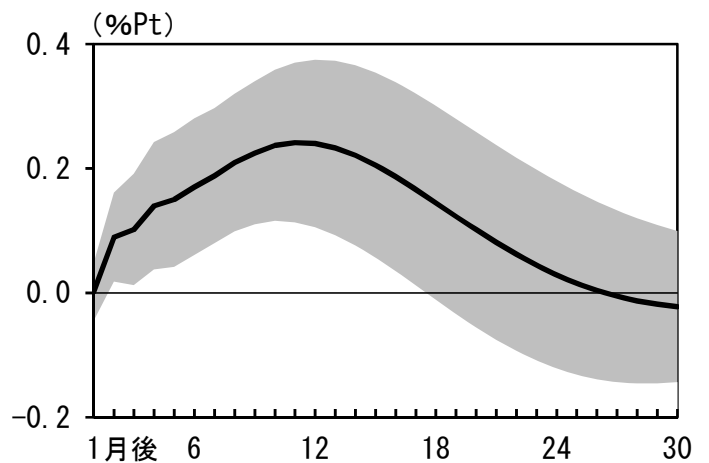
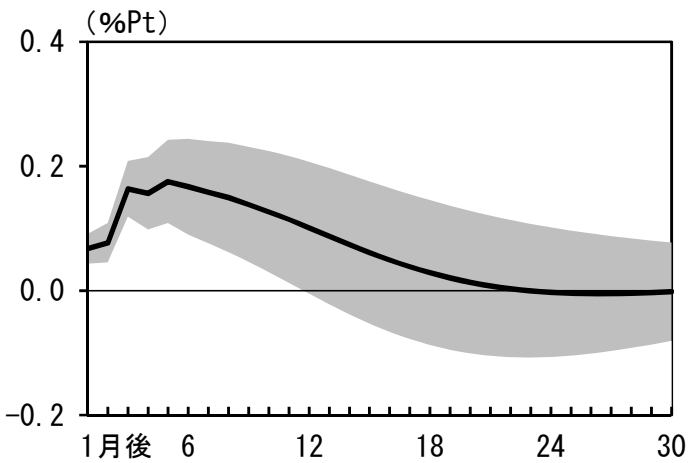
(1) 原油価格の推移



(2) 原油価格10%上昇ショックに対するインパルス応答

①市場参加者の長期インフレ予想

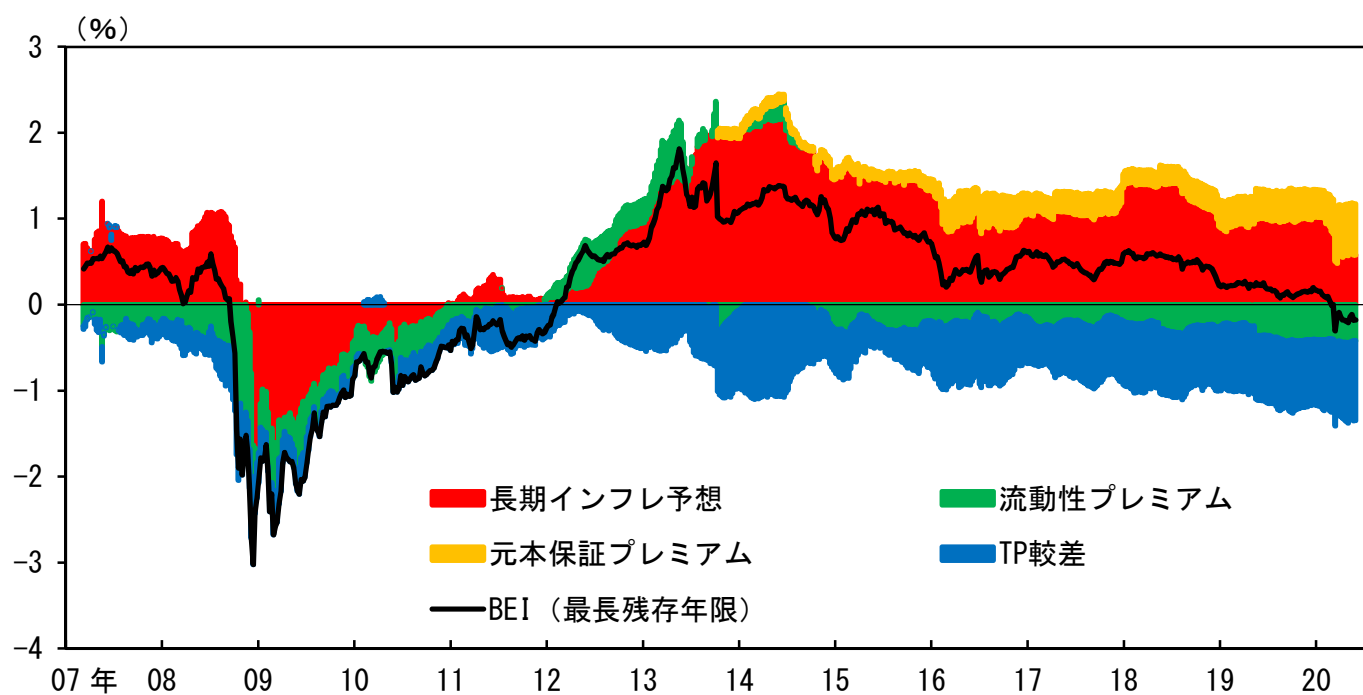
②CPI実績値（前年比）



推計期間：2007年3月～2019年12月（月次、月末値）
 使用変数：1. ドバイ原油価格（対数値）
 2. 市場参加者の長期インフレ予想（10年）の推計値
 3. CPI（総合除く生鮮食品）前年比
 推計の詳細：ラグ次数は、AICに基づき、4を選択
 構造ショックは、変数123の順のコレスキー分解により識別

(注) 1. (1) の直近は、2020年5月29日。
 2. (2) のシャドーは±2標準偏差の範囲を表す。
 (出所) Bloomberg、総務省

図10：最長残存年限BEIの要因分解



(注) 直近は、2020年5月29日週。

